Matrizen und Gozinto-Graphen

Inhalt:

Allgemeine Hinweise zur Übertragung dieser Themen

Linearisierte Übungsbeispiele mit Lösungen und vergrößerten Originalgrafiken (siehe: www.srdp.at; Stand: Oktober 2018)

Inhaltsverzeichnis

Allgemeines

Quelle der Beispiele:

https://www.srdp.at/downloads/dl/aufgabenpools-angewandte-mathematik/

Thema "Matrizen" (Stand: Oktober 2018)

Inhalt: Alle im Oktober 2018 veröffentlichten Übungsbeispiele zu diesem Thema aufbereitet für Schülerinnen und Schüler mit Blindheit oder hochgradiger Sehbehinderung

Ergänzend zu diesem Dokument gibt es noch das Dokument "02_Abb_Orig_Matrizen und Gozintographen". Es enthält alle Originalabbildungen vergrößert, auf je einer Seite. Der Hinweis auf die Abbildungen befindet sich jeweils im Text.

Leere eckige Klammern **[]** bedeuten, dass etwas einzusetzen ist.
Die Beschreibung von Abbildungen steht zwischen doppelten geschwungenen Klammern.
Drei bzw. fünf einfache Bindestriche dienen der Strukturierung.

Darstellung von Matrizen

Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten wird durch 'mat[m|n] angekündigt.

Die Matrix selbst steht in runden Klammern, jede Zeile steht innerhalb eckiger Klammern. Zwischen den eckigen Klammern ist kein Abstand, jeder Eintrag wird vom nächsten durch einen Strichpunkt getrennt.

z.B:

'mat[3|2]([1; 2][4; 5][6; 7])

'mat[3|1]([1][4][6])

'mat[1|3]([1; 2; 3])

Wird optisch gearbeitet und/oder eine zeilenweise Strukturierung gewünscht, kann dies beim Erlesen sofort durch das Drücken der Eingabetaste erreicht werden.

Mit 'det[A] wird nach der Determinante einer Matrix A gefragt.

Vorlage für häufig vorkommende Matrizen

'mat[3|1](**[][][]**)

'mat[1|3]([; ;])

'mat[2|2]([;][;])

'mat[2|3]([; ;][; ;])

'mat[3|3]([; ;][; ;][; ;])

'mat[6|6] ([; ; ; ; ;][; ; ; ; ;][; ; ; ; ;][; ; ; ; ;][; ; ; ; ;][; ; ; ; ;])

Gozinto-Graph (Tabellen und Beschreibung)

Der Gozinto-Graph wird nur im Original abgebildet.

Tabellen werden, wenn dies die Aufgabenstellung zulässt oder es sinnvoll erscheint, so aufgelöst, dass möglichst wenig Spalten entstehen (Idealerweise sollten maximal 20 Zeichen pro Zeile entstehen).

Zelleneinträge werden durch Pipes (|) zwischen Abständen voneinander getrennt.

Bei der Beschreibung des Gozinto-Graphen folgt nach der Legende die Anzahl der Pfade und die einzelnen Pfade, die zu den Endprodukten führen. Die dazugehörigen Mengenangaben stehen in runden Klammern.

---

z.B. (Tabellen sind angegeben, ein Gozinto-Graph ist zu ergänzen)

Legende:

R_x ... Rohstoff x

Z_x ... Zwischenprodukt x

E_x ... Endprodukt x

Tabelle 1:

-| Z_1 | Z_2 | Z_3

R_1 | 10 | 5 | 0

R_2 | 15 | 0 | 25

Tabelle 2:

-| E_1 | E_2

Z_1 | 30 | 35

Z_2 | 25 | 20

Z_3 | 0 | 10

{{Beschreibung des Gozinto-Graphen:

Legende:

Px ... Pfad x

R_x()... Rohstoff x

Z_x()... Zwischenprodukt x

E_x()... Endprodukt x

---

12 Pfade:

P1: R_1()-Z_1()-E_1

P2: R_1()-Z_1()-E_2

P3: R_1()-Z_2()-E_1

P4: R_1()-Z_2()-E_2

P5: R_1()-Z_3()-E_1

P6: R_1()-Z_3()-E_2

P7: R_2()-Z_1()-E_1

P8: R_2()-Z_1()-E_2

P9: R_2()-Z_2()-E_1

P10: R_2()-Z_2()-E_2

P11: R_2()-Z_3()-E_1

P12: R_2()-Z_3()-E_2}}

-----

1 Farben (2) (B_082)

Farben (2)

Aufgabennummer: B_082

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt unterschiedliche Farbprodukte für den Malerbedarf her.

a) Textilmalfarbe wird an Großkunden nur in ganzen Paletten verkauft. In diesem Fall wird je nach Abnahme ein Mengenrabatt gewährt. Der Preis pro Palette p_1 nimmt mit steigender Anzahl der Paletten exponentiell ab, wobei das Preislimit pro Palette nach unten begrenzt ist. Es wird folgendes Abnahmemodell angenommen:

$$p_1(x) = 10\,000 + a \cdot e^{-b \cdot x}$$

x … Palettenanzahl
$p_1(x)$ … Preis pro Palette für eine Abnahme von x Paletten in €
a, b … Parameter des Preisabnahmemodells

Bei Abnahme von nur 1 Palette kostet dies aktuell € 15.000, bei Abnahme von 2 Paletten muss man nur mehr € 14.000 pro Palette zahlen.

– Ermitteln Sie die Parameter a und b der Preisfunktion p_1 in Abhängigkeit von der Anzahl x der Paletten.
– Erklären Sie, warum bei diesem Preismodell das Preislimit von € 10.000 nicht unterschritten werden kann.
– Stellen Sie die dazugehörige Erlösfunktion E in Abhängigkeit von der Anzahl x der Paletten auf.

b) Die Nachfragefunktion ist die Umkehrfunktion zur Preisfunktion.

– Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Nachfragefunktion n_2 als Umkehrfunktion der folgenden Preisfunktion p_2:

$$p_2(x) = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot x}\right)$$

x … Palettenanzahl
$p_2(x)$ … Preis für x Paletten in €

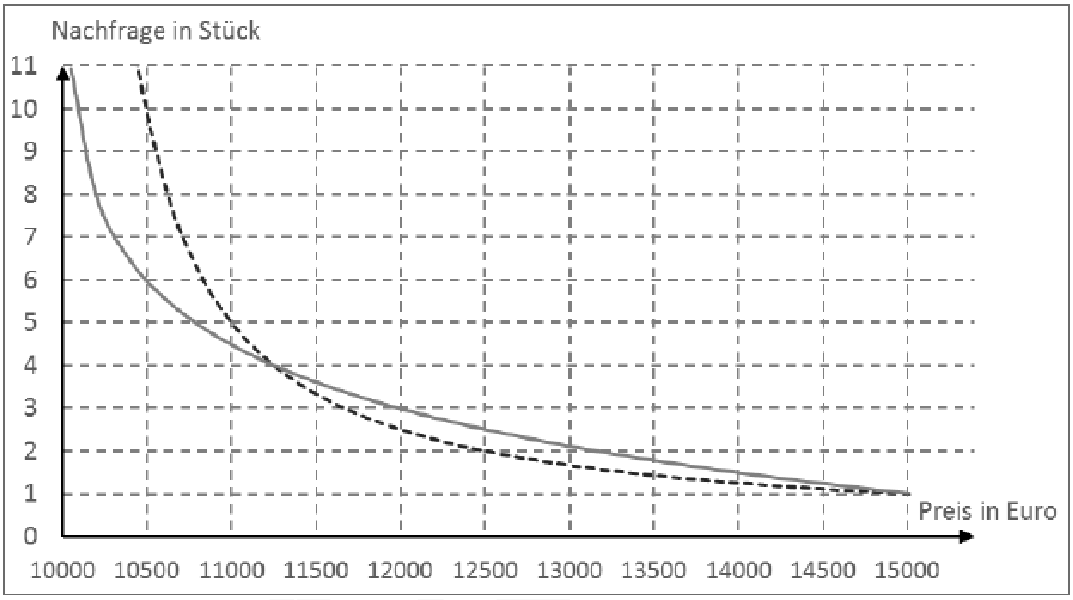
– Erklären Sie den grafischen Zusammenhang zwischen den Graphen der Nachfragefunktion und der Preisfunktion.

In der nachstehenden Abbildung sind folgende Funktionen grafisch dargestellt:

- die Nachfragefunktion n_2
- eine zweite Nachfragefunktion n_1 basierend auf dem Preisabnahmemodell p_1 mit

$p_1(x) = 10\,000 + 8\,000 \cdot e^{-0{,}464 \cdot x}$

x … Palettenanzahl
$p_1(x)$ … Preis pro Palette für eine Abnahme von x Paletten in €



– Kennzeichnen Sie in der Grafik die beiden Nachfragefunktionen n_1 und n_2.

c) Die Produktionskosten für eine Abdeckfarbe sollen ermittelt werden. Die Produktionskosten pro Palette lassen sich mithilfe einer Polynomfunktion 3. Grades beschreiben, wobei gilt:

Die Kostenkehre (Wendestelle der Funktion) wird bei 24 Paletten erreicht.
Die Fixkosten betragen € 4.000.
Die Produktionskosten für 10 Paletten liegen bei € 9.311, für 20 Paletten bei € 13.688.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion auf.
– Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem in Matrix-Schreibweise auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Farben (B_082) aufbereitet

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Ein Unternehmen stellt unterschiedliche Farbprodukte für den Malerbedarf her.

-----

a.)

Textilmalfarbe wird an Großkunden nur in ganzen Paletten verkauft. In diesem Fall wird je nach Abnahme ein Mengenrabatt gewährt. Der Preis pro Palette p_1 nimmt mit steigender Anzahl der Paletten exponentiell ab, wobei das Preislimit pro Palette nach unten begrenzt ist. Es wird folgendes Abnahmemodell angenommen:

p_1(x) =10000 +a *'e^(-b *x)

---

x ... Palettenanzahl

p_1(x) ... Preis pro Palette für eine Abnahme von x Paletten in €

a, b ... Parameter des Preisabnahmemodells

Bei Abnahme von nur 1 Palette kostet dies aktuell € 15000, bei Abnahme von 2 Paletten muss man nur mehr € 14000 pro Palette zahlen.

-) Ermitteln Sie die Parameter a und b der Preisfunktion p_1 in Abhängigkeit von der Anzahl x der Paletten.

[]

-) Erklären Sie, warum bei diesem Preismodell das Preislimit von € 10000 nicht unterschritten werden kann.

[]

-) Stellen Sie die dazugehörige Erlösfunktion E in Abhängigkeit von der Anzahl x der Paletten auf.

[]

-----

b.)

Die Nachfragefunktion ist die Umkehrfunktion zur Preisfunktion.

-) Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Nachfragefunktion n_2 als Umkehrfunktion der folgenden Preisfunktion p_2:

x ... Palettenanzahl

p_2(x) ... Preis für x Paletten in €

p_2(x) =10000 *(1 +1/(2 *x)

[]

-) Erklären Sie den grafischen Zusammenhang zwischen den Graphen der Nachfragefunktion und der Preisfunktion.

In der nachstehenden Abbildung (Abbildungen_Original: Aufgabe B_082) sind folgende Funktionen grafisch dargestellt:

 *) die Nachfragefunktion n_2

 *) eine zweite Nachfragefunktion n_1 basierend auf dem Preisabnahmemodell p_1 mit

p_1(x) =10000 +8000 *'e^(-0,464 *x)

x ... Palettenanzahl

p_1(x) ... Preis pro Palette für eine Abnahme von x Paletten in €

{{Beschreibung der Abbildung und die Möglichkeit den beschriebenen Graphen n_1 oder n_2 zuzuordnen:

Koordinatensystem

waagrechte Achse: Preis in Euro; [10000; 15000]; Skalierung: 100;

senkrechte Achse: Nachfrage in Stück; [0; 11]; Skalierung: 1;

[] Graph 1 (durchgezogen) beginnt bei ca. (10050|11), ist linksgekrümmt (positiv gekrümmt) und streng monoton fallend. Er enthält die Punkte (10500|6), (11250|4) und (15000|1).

[] Graph 2 (strichliert) beginnt bei ca. (10450|11), ist linksgekrümmt (positiv gekrümmt) und streng monoton fallend. Er enthält die Punkte (10500|10), (11250|50), und (15000|1)}}

-----

c.)

Die Produktionskosten für eine Abdeckfarbe sollen ermittelt werden. Die Produktionskosten pro Palette lassen sich mithilfe einer Polynomfunktion 3. Grades beschreiben, wobei gilt:

Die Kostenkehre (Wendestelle der Funktion) wird bei 24 Paletten erreicht.

Die Fixkosten betragen € 4000.

Die Produktionskosten für 10 Paletten liegen bei € 9311, für 20 Paletten bei € 13688.

-) Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion auf.

[]

-) Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem in Matrix-Schreibweise auf.

[]

1.1 Möglicher Lösungsweg (B_082)

Möglicher Lösungsweg

a) bei Abnahme von 1 Palette … € 15.000 pro Palette: $p_1(1) = 15\,000$
bei Abnahme von 2 Paletten … € 14.000 pro Palette: $p_1(2) = 14\,000$

$$\Rightarrow 5\,000 = a \cdot e^{-b \cdot 1}$$
$$4\,000 = a \cdot e^{-b \cdot 2}$$

Lösen mittels Technologieeinsatz:
$a = 6\,250$
$b = \ln\left(\frac{5}{4}\right) = 0{,}22314$

Der Ausdruck $a \cdot e^{-b \cdot x}$ strebt für wachsendes x gegen null, somit strebt der Preis $p_1(x) = 10\,000 + a \cdot e^{-b \cdot x}$ gegen € 10.000.

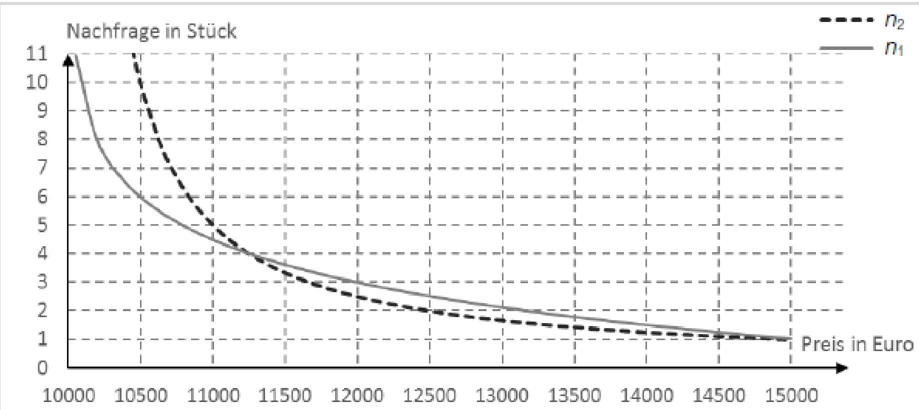
$$E(x) = p_1(x) \cdot x = 10\,000 \cdot x + a \cdot x \cdot e^{-b \cdot x}$$

b) $n_2(p) = \frac{1}{\frac{p}{5000} - 2} = \frac{5\,000}{p - 10\,000}$

Der Graph der Umkehrfunktion n_2 ist die Spiegelung des Graphen der Funktion p_2 an der 1. Mediane.

b) $n_2(p) = \frac{1}{\frac{p}{5000} - 2} = \frac{5\,000}{p - 10\,000}$

Der Graph der Umkehrfunktion n_2 ist die Spiegelung des Graphen der Funktion p_2 an der 1. Mediane.



c) Ermittlung der Ableitungen:

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
$K''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

Gleichungssystem:

Kostenkehre bei 24 Stück	$K''(24) = 0$
Fixkosten € 4.000	$K(0) = 4\,000$
10 Stück Paletten kosten € 9.311.	$K(10) = 9\,311$
20 Stück Paletten kosten € 13.688.	$K(20) = 13\,688$

Matrizenform des Gleichungssystems (auch andere Schreibweisen in Matrixform sind zulässig):

$$\begin{pmatrix} 144 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4000 \\ 1\,000 & 100 & 10 & 1 & 9311 \\ 8000 & 400 & 20 & 1 & 13\,688 \end{pmatrix}$$

Möglicher Lösungsweg (B_082) aufbereitet

a.)

bei Abnahme von 1 Palette ... € 15000 pro Palette:

p_1(1) =15000

bei Abnahme von 2 Paletten ... € 14000 pro Palette:

p_1(2) =14000

-->

5000 =a *'e^(-b *1)

4000 =a *'e^(-b *2)

Lösen mittels Technologieeinsatz:

a =6250

b ='ln(5/4) =0,22314

Der Ausdruck a *'e^(-b *x) strebt für wachsendes x gegen null,

somit strebt der Preis p_1(x) =10000 +a *'e^(-b *x) gegen €

10000.

E(x) =p_1(x) *x =10000 *x +a *x *'e^(-b *x)

-----

b.)

n_2(p) =1/(p/5000 -2)=5000/(p -10000)

Der Graph der Umkehrfunktion n_2 ist die Spiegelung des

Graphen der Funktion p_2 an der 1. Mediane.

(Abbildungen_Original: Aufgabe B_082_L)

{{Beschreibung der Abbildung:

Koordinatensystem

waagrechte Achse: Preis in Euro; [10000; 15000]; Skalierung:

100;

senkrechte Achse: Nachfrage in Stück; [0; 11]; Skalierung: 1;

[n_1] Graph 1 (durchgezogen) beginnt bei ca. (10050|11), ist

linksgekrümmt (positiv gekrümmt) und streng monoton fallend.

Er enthält die Punkte (10500|6), (11250|4) und (15000|1).

[n_2] Graph 2 (strichliert) beginnt bei ca. (10450|11), ist linksgekrümmt (positiv gekrümmt) und streng monoton fallend. Er enthält die Punkte (10500|10), (11250|50), und (15000|1)}}

-----

c.)

Ermittlung der Ableitungen:

K(x) =a *x^3 +b *x^2 +c *x +d

K'(x) =3 *a *x^2 +2 *b *x +c

K''(x) =6 *a *x +2 *b

Gleichungssystem:

Kostenkehre bei 24 Stück

K''(24) =0

Fixkosten € 4000

K(0) =4000

10 Stück Paletten kosten € 9311.

K(10) =9311

20 Stück Paletten kosten € 13688.

K(20) =13688

Matrizenform des Gleichungssystems (auch andere Schreibweisen in Matrixform sind zulässig):

'mat[4|5]([144; 2; 0; 0; 0][0; 0; 0; 1; 4000][1000; 100; 10; 1; 9311][8000; 400; 20; 1; 13688])

-----

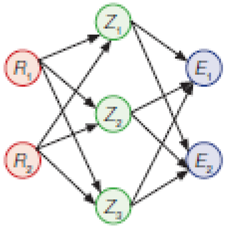
2 Rohstoffbedarf (B_162)

Rohstoffbedarf

Aufgabennummer: B_162

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Unternehmen können die Verflechtungen zwischen den Rohstoffen R_1 und R_2, den Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3 und den beiden Endprodukten E_1 und E_2 in einem zweistufigen Produktionsverfahren durch den nachstehenden Gozinto-Graphen und mit den beiden nachstehenden Tabellen dargestellt werden. Die Tabellen geben an, wie viele ME von den jeweiligen Rohstoffen bzw. Zwischenprodukten benötigt werden, um jeweils eine ME der Zwischenprodukte bzw. Endprodukte herzustellen.



	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	10	5	0
R_2	15	0	25

	E_1	E_2
Z_1	30	35
Z_2	25	20
Z_3	0	10

Von E_1 werden 200 ME und von E_2 350 ME nachgefragt.

a) – Übertragen Sie die in den Tabellen angegebenen Mengen in den Gozinto-Graphen.

b) – Stellen Sie eine Matrix auf, die den Rohstoffbedarf pro ME für die beiden Endprodukte beschreibt.
– Interpretieren Sie die Zahlen in der ersten Spalte dieser Matrix.

c) Es sollen 200 ME von E_1 und 350 ME von E_2 verkauft werden. Die nachgefragten Mengen von E_1 werden zu einem Preis von € 4 pro ME und jene von E_2 zu € 3,50 pro ME verkauft.

– Kreuzen Sie den korrekten Rechenansatz für den gesamten Erlös E an. *[1 aus 5]*

$E = \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$	☐
$E = \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix} \cdot (4 \quad 3{,}5)$	☐
$E = \begin{pmatrix} 4 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix}$	☐
$E = \begin{pmatrix} 4 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \cdot (200 \quad 350)$	☐
$E = (4 \quad 3{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix}$	☐

d) – Berechnen Sie das Produkt der beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 20 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix}$.

– Erklären Sie, welchen Typ von Matrix das Ergebnis darstellt.
– Interpretieren Sie, welche Aussagen über die oben beschriebene Produktion aus der berechneten Matrix abgelesen werden können.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Rohstoffbedarf (B_162) aufbereitet

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

In einem Unternehmen können die Verflechtungen zwischen den Rohstoffen R_1 und R_2, den Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3 und den beiden Endprodukten E_1 und E_2 in einem zweistufigen Produktionsverfahren durch den nachstehenden Gozinto-Graphen (Abbildungen_Original: Aufgabe B_162) und mit den beiden nachstehenden Tabellen dargestellt werden. Die Tabellen geben an, wie viele ME von den jeweiligen Rohstoffen bzw. Zwischenprodukten benötigt werden, um jeweils eine ME der Zwischenprodukte bzw. Endprodukte herzustellen.

Legende:

R_x ... Rohstoff

Z_x ... Zwischenprodukt

E_x ... Endprodukt

Tabelle 1:

-| Z_1 | Z_2 | Z_3

R_1 | 10 | 5 | 0

R_2 | 15 | 0 | 25

Tabelle 2:

-| E_1 | E_2

Z_1 | 30 | 35

Z_2 | 25 | 20

Z_3 | 0 | 10

Von E_1 werden 200 ME und von E_2 350 ME nachgefragt.

-----

a.)

Übertragen Sie die in den Tabellen angegebenen Mengen in den Gozinto-Graphen.

{{Beschreibung des Gozinto-Graphen:

Legende:

Px ... Pfad

R_x()... Rohstoff

Z_x()... Zwischenprodukt

E_x()... Endprodukt

---

12 Pfade:

P1: R_1(**[]**)-Z_1(**[]**)-E_1

P2: R_1(**[]**)-Z_1(**[]**)-E_2

P3: R_1(**[]**)-Z_2(**[]**)-E_1

P4: R_1(**[]**)-Z_2(**[]**)-E_2

P5: R_1(**[]**)-Z_3(**[]**)-E_1

P6: R_1(**[]**)-Z_3(**[]**)-E_2

P7: R_2(**[]**)-Z_1(**[]**)-E_1

P8: R_2(**[]**)-Z_1(**[]**)-E_2

P9: R_2(**[]**)-Z_2(**[]**)-E_1

P10: R_2(**[]**)-Z_2(**[]**)-E_2

P11: R_2(**[]**)-Z_3(**[]**)-E_1

P12: R_2(**[]**)-Z_3(**[]**)-E_2}}

-----

b.)

-) Stellen Sie eine Matrix auf, die den Rohstoffbedarf pro ME für die beiden Endprodukte beschreibt.

-) Interpretieren Sie die Zahlen in der ersten Spalte dieser Matrix.

[]

-----

c.)

Es sollen 200 ME von E_1 und 350 ME von E_2 verkauft werden.
Die nachgefragten Mengen von E_1 werden zu einem Preis von € 4 pro ME und jene von E_2 zu € 3,50 pro ME verkauft.

-) Kreuzen Sie den korrekten Rechenansatz für den gesamten Erlös E an. [1 aus 5]

[] E ='mat[2|1]([200][350]) *'mat[2|1]([4][3,5])

[] E ='mat[2|1]([200][350]) *'mat[1|2] ([4; 3,5])

[] E ='mat[2|1]([4][3,5]) *'mat[2|1]([200][350])

[] E ='mat[2|1]([4][3,5]) *'mat[1|2]([200; 350])

[] E ='mat[1|2] ([4; 3,5]) *'mat[2|1]([200][350])

-----

d.)

-) Berechnen Sie das Produkt der beiden Matrizen 'mat[3|2] und 'mat[2|1].

'mat[3|2]([30; 35][25; 20][0; 10])
*'mat[4|1]([200][350])
=**[]**

-) Erklären Sie, welchen Typ von Matrix das Ergebnis darstellt.

[]

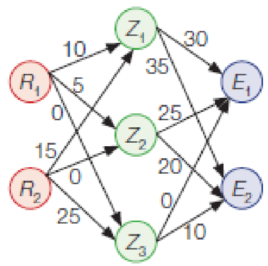
-) Interpretieren Sie, welche Aussagen über die oben beschriebene Produktion aus der berechneten Matrix abgelesen werden können.

[]

2.1 Möglicher Lösungsweg (B_162)

Möglicher Lösungsweg

a)



b) $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 15 & 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 20 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 425 & 450 \\ 450 & 775 \end{pmatrix}$

Vom Rohstoff R_1 werden für die Produktion von 1 ME des Endprodukts E_1 425 ME benötigt.
Vom Rohstoff R_2 werden für die Produktion von 1 ME des Endprodukts E_1 450 ME benötigt.

c)

d) $\begin{pmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 20 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18250 \\ 12000 \\ 3500 \end{pmatrix}$

Es handelt sich um einen dreizeiligen Spaltenvektor (3×1-Matrix).

18 250 ME des 1. Zwischenprodukts und 12 000 ME des 2. Zwischenprodukts sowie 3 500 ME des 3. Zwischenprodukts werden benötigt, um 200 ME von E_1 und 350 ME von E_2 herstellen zu können.

Möglicher Lösungsweg (B_162) aufbereitet

a.)

(Abbildungen_Original: Aufgabe B_162_L)

{{Beschreibung des Gonzinto-Graphen:

12 Pfade:

P1: R_1(10)-Z_1(30)-E_1

P2: R_1(10)-Z_1(35)-E_2

P3: R_1(5)-Z_2(25)-E_1

P4: R_1(5)-Z_2(20)-E_2

P5: R_1(0)-Z_3(0)-E_1

P6: R_1(0)-Z_3(10)-E_2

P7: R_2(15)-Z_1(30)-E_1

P8: R_2(15)-Z_1(35)-E_2

P9: R_2(0)-Z_2(25)-E_1

P10: R_2(0)-Z_2(20)-E_2

P11: R_2(25)-Z_3(0)-E_1

P12: R_2(25)-Z_3(10)-E_2}}

-----

b.)

Matrixgleichung: 'mat[2|3] *'mat[3|2] ='mat[2|2]

'mat[2|3]([10; 5; 0][15; 0; 25])

*'mat[3|2]([30; 35][25; 20][0; 10])

='mat[2|2]([425; 450][450; 775])

Vom Rohstoff R_1 werden für die Produktion von 1 ME des Endprodukts E_1 425 ME benötigt.

Vom Rohstoff R_2werden für die Produktion von 1 ME des Endprodukts E_1 450 ME benötigt.

-----

c.)

[]

[]

[]

[]

[x] E ='mat[1|2]([4; 3,5]) *'mat[2|1]([200][350])

-----

d.)

'mat[3|2]([30; 35][25; 20][0; 10])

*'mat[2|1]([200][350])

='mat[3|1]([18250][12000][3500])

Es handelt sich um einen dreizeiligen Spaltenvektor (3 mal 1-Matrix).

18250 ME des 1. Zwischenprodukts und 12000 ME des 2. Zwischenprodukts sowie 3500 ME des 3. Zwischenprodukts werden benötigt, um 200 ME von E_1 und 350 ME von E_2 herstellen zu können.

-----

3 Zweistufige_Produktion (B_163)

Zweistufige Produktion

Aufgabennummer: B_163

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Unternehmen werden 3 Endprodukte E_1, E_2 und E_3 über 3 Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 aus 2 verschiedenen Rohstoffen R_1 und R_2 gefertigt. Die Mengenangaben erfolgen in Mengeneinheiten (ME).

a) Die Verflechtungen zwischen den Rohstoffen sowie den Zwischen- und Endprodukten sind durch die nachstehenden Tabellen in ME gegeben. Die Tabellen geben an, wie viele ME von den jeweiligen Rohstoffen bzw. Zwischenprodukten benötigt werden, um jeweils eine ME der Zwischenprodukte bzw. Endprodukte herzustellen.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2,1	1,2	4,3
R_2	3,4	2,5	1,6

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2,0	1,3	0
Z_2	3,1	2,4	0
Z_3	0	4,5	2,8

– Stellen Sie die Verflechtungen als Gozinto-Graph dar.

– Erstellen Sie mithilfe der Tabellen die Teilmatrizen des Bedarfs an Rohstoffen für die Zwischenprodukte und des Bedarfs an Zwischenprodukten für die Endprodukte.

– Berechnen Sie, welche Mengen der Rohstoffe R_1 und R_2 in Summe benötigt werden, wenn von allen drei Endprodukten je 1 ME erzeugt wird.

b) Die 2×3-Matrix $\boldsymbol{RE}$ beschreibt den Bedarf an Rohstoffen für die Erzeugung von je 1 ME der Endprodukte. Der Spaltenvektor $\boldsymbol{N}$ (3×1-Matrix) gibt die am Markt nachgefragten Mengen der Endprodukte in ME an. Es sollen die insgesamt benötigten Rohstoffmengen für die nachgefragten Mengen der Endprodukte berechnet werden.

– Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den geeigneten Ansatz aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Zeilenvektors.	
Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Spaltenvektors.	

A	$\boldsymbol{RE} \cdot \boldsymbol{N}^T$
B	$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{RE}$
C	$\boldsymbol{RE} \cdot \boldsymbol{N}$
D	$\boldsymbol{N}^T \cdot \boldsymbol{RE}^T$

Die Preise für die Rohstoffe sind durch den Zeilenvektor $\boldsymbol{P} = (20 \quad 50)$ in €/ME (1×2-Matrix) gegeben.

– Berechnen Sie die Rohstoffkosten in Euro für die Produktion der nachgefragten Mengen bei folgenden konkreten Angaben:

$$\boldsymbol{RE} = \begin{pmatrix} 8 & 25 & 12 \\ 15 & 18 & 5 \end{pmatrix}; \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 100 \\ 160 \\ 140 \end{pmatrix}$$

c) Im Lager sind Rohstoffmengen vorhanden, die bei der Produktion restlos verbraucht werden sollen. Die Nachfrage nach dem Endprodukt E_3 ist doppelt so hoch wie die Nachfrage nach dem Endprodukt E_1.

Für die Produktion kann die folgende Matrixgleichung aufgestellt werden:

$$\begin{pmatrix} 570 \\ 430 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 25 & 12 \\ 15 & 18 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 2n_1 \end{pmatrix}$$

– Erklären Sie die Aussage der einzelnen Matrizen in dieser Gleichung.
– Berechnen Sie die Menge der erzeugbaren Endprodukte.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Zweistufige_Produktion (B_163) aufbereitet

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

In einem Unternehmen werden 3 Endprodukte E_1, E_2 und E_3 über 3 Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 aus 2 verschiedenen Rohstoffen R_1 und R_2 gefertigt. Die Mengenangaben erfolgen in Mengeneinheiten (ME).

-----

a.)

Die Verflechtungen zwischen den Rohstoffen sowie den Zwischen- und Endprodukten sind durch die nachstehenden Tabellen in ME gegeben. Die Tabellen geben an, wie viele ME von den jeweiligen Rohstoffen bzw. Zwischenprodukten benötigt werden, um jeweils eine ME der Zwischenprodukte bzw. Endprodukte herzustellen.

Legende:

R_x ... Rohstoff

Z_x ... Zwischenprodukt

E_x ... Endprodukt

Tabelle 1:

-	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2,1	1,2	4,3
R_2	3,4	2,5	1,6

Tabelle 2:

-	E_1	E_2	E_3
Z_1	2,0	1,3	0
Z_2	3,1	2,4	0
Z_3	0	4,5	2,8

-) Stellen Sie die Verflechtungen als Gozinto-Graph dar.

Alternativ: Beschreiben Sie den Gozinto-Graphen.

{{Beschreibung des Gozinto-Graphen

Legende:

Px ... Pfad x

R_x()... Rohstoff x

Z_x()... Zwischenprodukt x

E_x()... Endprodukt x

[]}}

-) Erstellen Sie mithilfe der Tabellen die Teilmatrizen des Bedarfs an Rohstoffen für die Zwischenprodukte und des Bedarfs an Zwischenprodukten für die Endprodukte.

[]

-) Berechnen Sie, welche Mengen der Rohstoffe R_1 und R_2 in Summe benötigt werden, wenn von allen drei Endprodukten je 1 ME erzeugt wird.

[]

-----

b.)

Die 2 mal 3-Matrix RE beschreibt den Bedarf an Rohstoffen für die Erzeugung von je 1 ME der Endprodukte. Der Spaltenvektor N (3 mal 1-Matrix) gibt die am Markt nachgefragten Mengen der Endprodukte in ME an. Es sollen die insgesamt benötigten Rohstoffmengen für die nachgefragten Mengen der Endprodukte berechnet werden.

-) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den geeigneten Ansatz aus A bis D zu. [2 zu 4]

A: RE *N^T

B: N *RE

C: RE *N

D: N^T *RE^T

[] Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Zeilenvektors.

[] Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Spaltenvektors.

Die Preise für die Rohstoffe sind durch den Zeilenvektor P =(20|50) in €/ME (1 mal 2-Matrix) gegeben.

-) Berechnen Sie die Rohstoffkosten in Euro für die Produktion der nachgefragten Mengen bei folgenden konkreten Angaben:

RE ='mat[2|3]([8; 25; 12][15; 8; 5])

N =(100|160|140)

[]

-----

c.)

Im Lager sind Rohstoffmengen vorhanden, die bei der Produktion restlos verbraucht werden sollen. Die Nachfrage nach dem Endprodukt E_3 ist doppelt so hoch wie die Nachfrage nach dem Endprodukt E_1.

Für die Produktion kann die folgende Matrixgleichung aufgestellt werden:

'mat[2|1] ='mat[2|3] *'mat[3|1]

'mat[2|1]([570][430])

=

'mat[2|3]([8; 25; 12][15; 8; 12])

mal

'mat[3|1]([n_1][n_2][2 *n_1])

-) Erklären Sie die Aussage der einzelnen Matrizen in dieser Gleichung.

[]

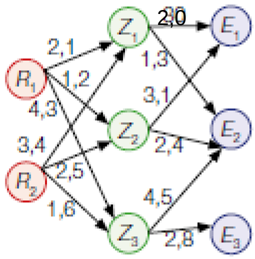
-) Berechnen Sie die Menge der erzeugbaren Endprodukte.

[]

3.1 Möglicher Lösungsweg (B_163)

Möglicher Lösungsweg

a)



$$\boldsymbol{RZ} = \begin{pmatrix} 2{,}1 & 1{,}2 & 4{,}3 \\ 3{,}4 & 2{,}5 & 1{,}6 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{ZE} = \begin{pmatrix} 2{,}0 & 1{,}3 & 0 \\ 3{,}1 & 2{,}4 & 0 \\ 0 & 4{,}5 & 2{,}8 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{RZ} \cdot \boldsymbol{ZE} = \begin{pmatrix} 7{,}92 & 24{,}96 & 12{,}04 \\ 14{,}55 & 17{,}62 & 4{,}48 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7{,}92 & 24{,}96 & 12{,}04 \\ 14{,}55 & 17{,}62 & 4{,}48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44{,}92 \\ 36{,}65 \end{pmatrix}$$ oder einfach die Zeilen addieren

Vom Rohstoff R_1 benötigt man für die Erzeugung von 1 ME aller Endprodukte in Summe 44,92 ME, vom Rohstoff R_2 für die Erzeugung aller Endprodukte 36,65 ME.

b)

Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Zeilenvektors.	D
Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Spaltenvektors.	C

A	$\boldsymbol{RE} \cdot \boldsymbol{N}^T$
B	$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{RE}$
C	$\boldsymbol{RE} \cdot \boldsymbol{N}$
D	$\boldsymbol{N}^T \cdot \boldsymbol{RE}^T$

$$K_{gesamt} = \boldsymbol{P} \cdot (\boldsymbol{RE} \cdot \boldsymbol{N}) = (20 \;\; 50) \cdot \begin{pmatrix} 6480 \\ 5080 \end{pmatrix}$$

gesamte Rohstoffkosten: € 383.600

c) $\begin{pmatrix} 570 \\ 430 \end{pmatrix}$ gibt die Rohstoffmengen wieder, die für die gesamte Produktion der Endprodukte zur Verfügung stehen und im Lager bereit liegen

$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 2n_1 \end{pmatrix}$ gibt die Nachfrage nach den Endprodukten an

$\begin{pmatrix} 8 & 25 & 12 \\ 15 & 18 & 5 \end{pmatrix}$ gibt die einzelnen Rohstoffmengen an, die für die Erzeugung von jeweils 1 ME eines Endprodukts gebraucht werden

$570 = 8 \cdot n_1 + 25 \cdot n_2 + 24 \cdot n_1 = 32 \cdot n_1 + 25 \cdot n_2$
$430 = 15 \cdot n_1 + 18 \cdot n_2 + 10 \cdot n_1 = 25 \cdot n_1 + 18 \cdot n_2$
$n_1 = 10$
$n_2 = 10$
Von E_1 können 10 ME erzeugt werden, von E_2 10 ME und von E_3 20 ME.

– – – – –

Möglicher Lösungsweg (B_163) aufbereitet

a.)

Abbildungen_Original: Aufgabe B_163_L

{{Beschreibung des Gozinto-Graphen:

12 Pfade:

P1: R_1(2,1)-Z_1(2,0)-E_1

P2: R_1(2,1)-Z_1(1,3)-E_2

P3: R_1(1,2)-Z_2(3,1)-E_1

P4: R_1(1,2)-Z_2(2,4)-E_2

P5: R_1(4,3)-Z_3(4,5)-E_2

P6: R_1(4,3)-Z_3(2,8)-E_3

P7: R_2(3,4)-Z_1(30)-E_1

P8: R_2(3,4)-Z_1(1,3)-E_2

P9: R_2(2,5)-Z_2(3,1)-E_1

P10: R_2(2,5)-Z_2(2,4)-E_2

P11: R_2(1,6)-Z_3(4,5)-E_2

P12: R_2(1,6)-Z_3(2,8)-E_3

RZ ='mat[2|3]([2,1; 1,2; 4,3][3,4; 2,5; 1,6])

ZE ='mat[3|3]([2,0; 1,3; 0][3,1; 2,4; 0][0; 4,5; 2,8])

RZ *ZE ='mat[2|3]([7,92; 24,96; 12,04][14,55; 17,62; 4,48])

RZ *ZE *'mat[3|1]([1][1][1]) 'mat[2|3]([7,92; 24,96; 12,04][14,55; 17,62; 4,48]) *'mat[3|1]([1][1][1]) = =(44,92; 36,65) oder einfach die Zeilen addieren.

Vom Rohstoff R_1 benötigt man für die Erzeugung von 1 ME aller Endprodukte in Summe 44,92 ME, vom Rohstoff R_2 für die Erzeugung aller Endprodukte 36,65 ME.

-----

b.)

[D] Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Zeilenvektors.

[C] Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Spaltenvektors.

K_(gesamt) =P *(RE *N) ='mat[1|2]([20; 50])
*'mat[2|1]([6480][5080])

gesamte Rohstoffkosten: € 383600

-----

c.)

'mat[2|1]([570][430]) gibt die Rohstoffmengen wieder, die für die gesamte Produktion der Endprodukte zur Verfügung stehen und im Lager bereit liegen.

'mat[3|1] ([n_1][n_2][2 *n_1]) gibt die Nachfrage nach den Endprodukten an

---

'mat[2|3]([8; 25; 12][15; 8; 5]) gibt die einzelnen Rohstoffmengen an, die für die Erzeugung von jeweils 1 ME eines Endprodukts gebraucht werden.

---

570 =8 *n_1 +25 *n_2 +24 *n_1 =32 *n_1 +25 *n_2
430 =15 * n_1 +18 *n_2 +10 * n_1 =25 *n_1 +18 *n_2
n_1 =10
n_2 =10

Von E_1 können 10 ME erzeugt werden, von E_2 10 ME und von E_3 20 ME.

-----

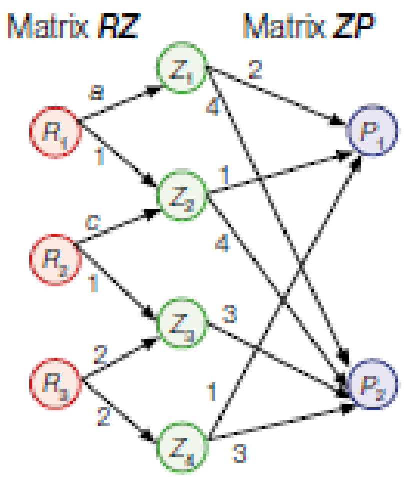
4 Kosten_und_Gewinn (B_164)

Kosten und Gewinn

Aufgabennummer: B_164

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 und aus diesen die Endprodukte P_1 und P_2 her.
Die Materialverflechtung in Mengeneinheiten (ME) wird durch den nebenstehenden Gozinto-Graphen dargestellt.



a) Die Matrix ***RP*** beschreibt die Mengen an Rohstoffen, die für die Produktion der Endprodukte pro ME jeweils benötigt werden:

$$\boldsymbol{RP} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 15 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

- Erstellen Sie die Matrix ***RZ***, die die Mengen beschreibt, die jeweils von den Rohstoffen für die Zwischenprodukte benötigt werden.
- Berechnen Sie die fehlenden Werte a und c der Matrix ***RZ***.
- Lesen Sie aus der Matrix ab, welche Mengen an Rohstoffen für die Erzeugung von 1 ME des Endprodukts P_1 verwendet werden.

b) Der Materialbestand im Lager beträgt 1 460 ME von R_1, 660 ME von R_2 und 1 160 ME von R_3. Es wird eine Produktion gestartet, die nach dem obigen Gozinto-Graphen mit

$\boldsymbol{RP} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 7 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$ abläuft. (Hinweis: $a = 2$ und $c = 1$ sind hier vorgegeben.)

- Erstellen Sie eine Matrix-Gleichung zur Berechnung der bei diesem Lagerbestand möglichen Absatzmengen.
- Berechnen Sie die entsprechenden Absatzmengen.

Kosten_und_Gewinn aufbereitet (B164) aufbereitet

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 und aus diesen die Endprodukte P_1 und P_2 her.

Die Materialverflechtung in Mengeneinheiten (ME) wird durch den nebenstehenden Gozinto-Graphen dargestellt.

(Abbildungen_Original: Aufgabe B_164)

{{Beschreibung des Gozinto-Graphen

Legende:

Px ... Pfad x

R_x ... Rohstoff x

Z_x ... Zwischenprodukt x

E_x ... Endprodukt x (P_1; P_2)

Matrix RZ | Matrix ZP

10 Pfade:

P1: R_1(**a**)-Z_1(2)-E_1

P1: R_1(**a**)-Z_1(4)-E_2

P3: R_1(1)-Z_2(1)-E_1

P4: R_1(1)-Z_2(4)-E_2

P5: R_2(**c**)-Z_2(1)-E_1

P6: R_2(c)-Z_2(4)-E_2

P7: R_2(**1**)-Z_3(3)-E_1

P8: R_3(2)-Z_3(3)-E_2

P9: R_3(2)-Z_4(1)-E_1

P10: R_3(2)-Z_4(3)-E_2}}

-----

a.)

Die Matrix RP beschreibt die Mengen an Rohstoffen, die für die Produktion der Endprodukte pro ME jeweils benötigt werden:

RP:

'mat[3|2]([5; 12][3; 15][2; 12])

-) Erstellen Sie die Matrix RZ, die die Mengen beschreibt, die jeweils von den Rohstoffen für die Zwischenprodukte benötigt werden.

[]

-) Berechnen Sie die fehlenden Werte a und c der Matrix RZ.

[]

-) Lesen Sie aus der Matrix ab, welche Mengen an Rohstoffen fur die Erzeugung von 1 ME des Endprodukts P_1 verwendet werden.

[]

-----

b.)

Der Materialbestand im Lager beträgt 1460 ME von R_1, 660 ME von R_2 und 1160 ME von R_3. Es wird eine Produktion gestartet, die nach dem obigen Gozinto-Graphen mit der Matrix RP ='mat[3|2]([5; 12][1; 7][2; 12]) abläuft. (Hinweis: a =2 und c =1 sind hier vorgegeben.)

-) Erstellen Sie eine Matrix-Gleichung zur Berechnung der bei diesem Lagerbestand möglichen Absatzmengen.

[]

-) Berechnen Sie die entsprechenden Absatzmengen.

[]

-----

c.)

Bei einem Produktionsgang stellt man von dem Endprodukt P_2 x Mengeneinheiten (ME) her. Die Herstellungskosten in Geldeinheiten (GE) für dieses Produkt lassen sich mit

K(x) =2,5 *x^2 +59 *x +80 beschreiben.

Der Erlös in GE beim Verkauf des Produkts beträgt E(x) =187 *x -6 *x^2.

Es wird angenommen, dass die gesamte Produktion von P_2 verkauft werden kann.

-) Berechnen Sie, bei welcher Absatzmenge ein maximaler Gewinn zu erwarten ist.

[]

-) Dokumentieren Sie in Worten, wie man den Preis des Endprodukts beim Verkauf der gewinnoptimalen Menge erhalten kann.

[]

-) Lesen Sie aus dem obigen Gozinto-Graphen ab, wie viel Mengeneinheiten von den Zwischenprodukten für die gewinnoptimale Menge des Endprodukts P_2 benötigt werden.

[]

4.1 Möglicher Lösungsweg (B_164)

Möglicher Lösungsweg

a) $RZ = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $ZP = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+1 & 4a+4 \\ c & 4c+3 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$; es gilt: $\begin{pmatrix} 2a+1 & 4a+4 \\ c & 4c+3 \\ 62 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 15 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$

$a = 2$; $c = 3$

Von den Rohstoffen benötigt man für P_1 5 ME von R_1, 3 ME von R_2 und 2 ME von R_3.

b) $\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 7 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,460 \\ 660 \\ 1\,160 \end{pmatrix}$

$5n_1 + 12n_2 = 1\,460$
$\underline{n_1 + 7n_2 = 660}$

$n_1 = 100$ ME; $n_2 = 80$ ME; Probe, einsetzen in die 3. Zeile: $200 + 960 = 1\,160$

c) $K(x) = 2{,}5x^2 + 59x + 80$; $E(x) = 187x - 6x^2$
$G(x) = 128x - 8{,}5x^2 - 80$
$G'(x) = 0 \Rightarrow 128 - 17x = 0$; $x_C = 7{,}529\ldots \approx 7{,}53$
Die gewinnoptimale Menge beträgt ca. 7,53 ME.

Die Preisfunktion der Nachfrage des Produkts berechnet man durch die Division von $E(x)$ durch x. Die gewinnoptimale Menge 7,529... wird in die Preisfunktion der Nachfrage eingesetzt. Der Funktionswert an dieser Stelle ergibt den Preis des Endprodukts beim Verkauf der gewinnoptimalen Menge.

Für die gewinnoptimale Menge benötigt man jeweils 4-mal die gewinnoptimale Menge (= 30,12 ME) von Z_1 und Z_2 sowie jeweils 3-mal die gewinnoptimale Menge (= 22,59 ME) von Z_3 und Z_4.

Möglicher Lösungsweg (B_164) aufbereitet

```
a.)
RZ ='mat[3|4]([a; 1; 0; 0][0; c; 1; 0][0; 0; 2; 2])
ZP ='mat[4|2]([2; 4][1; 4][0; 3])
---
RZ * ZP ='mat[3|2]([2a +1; 4a +4][c; 4c +3][2; 12])
Es gilt:
'mat[3|2]([2a +1; 4a +4][c; 4c +3][2; 12])
=
'mat[3|2]([5; 12[1; 7][2; 12])
---
a =2; c =3
---
Von den Rohstoffen benötigt man für P_1 5 ME von R_1, 3 ME von
R_2 und 2 ME von R_3.
-----
b.)
'mat[3|2]([5; 12][1; 7][2; 12])
*'mat[2|1]([n_1][n_2])
='mat[3|1]([460][660][1160])
---
5 *n_1 +12 *n_2 =1460
n_1 +7 *n_2 =660
---
--> n_1 =100 ME; n_2 =80 ME; Probe, einsetzen in die 3. Zeile:
200 +960 =1160
-----
c.)
K(x) =2,5 *x^2 +59 *x +80; E(x) =187 *x -6 *x^2
G(x) =128 *x -8,5 *x^2 -80
G'(x) =0
--> 128 -17x =0; x_C =7,529... ~~7,53
Die gewinnoptimale Menge betragt ca. 7,53 ME.
```

Die Preisfunktion der Nachfrage des Produkts berechnet man durch die Division von E(x) durch x. Die gewinnoptimale Menge 7,529... wird in die Preisfunktion der Nachfrage eingesetzt. Der Funktionswert an dieser Stelle ergibt den Preis des Endprodukts beim Verkauf der gewinnoptimalen Menge.

Für die gewinnoptimale Menge benötigt man jeweils 4-mal die gewinnoptimale Menge (=30,12 ME) von Z_1 und Z_2 sowie jeweils 3-mal die gewinnoptimale Menge (=22,59 ME) von Z_3 und Z_4.

-----

5 Konfiserie (B_196)

Konfiserie (1)

Aufgabennummer: B_196

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Konditorei möchte Pralinen aus Eigenproduktion anbieten. Um die Nachfrage abschätzen zu können, werden zunächst 4 verschiedene Bonbonnieren (B_1, B_2, B_3, B_4) aus 4 Sorten Pralinen (Marzipan, Nougat, Kokos, Krokant) angeboten. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel Stück einer jeden Pralinensorte in jeder Bonbonniere enthalten sind:

		Bonbonnieren			
		B_1	B_2	B_3	B_4
Pralinensorten	Marzipan	5	3	4	4
	Nougat	4	3	5	0
	Kokos	2	3	3	4
	Krokant	1	3	0	4

a) Aus 181 Marzipanpralinen, 142 Nougatpralinen, 144 Kokospralinen und 97 Krokantpralinen wurden Bonbonnieren zusammengestellt.

– Berechnen Sie, wie viele Bonbonnieren der Sorten B_1, B_2, B_3 und B_4 mit diesen Pralinen hergestellt werden können.

b) In der folgenden Tabelle sind die Herstellungskosten pro Praline jeweils als Variable angegeben:

	Marzipan	Nougat	Kokos	Krokant
Kosten (in €)	K_1	K_2	K_3	K_4

Für die Verpackung fallen Materialkosten in Höhe von € 2,50 pro Bonbonniere an. Pro Bonbonniere wird ein Gewinn von 10 % berechnet.

– Erstellen Sie eine Formel in Matrizenschreibweise, mit deren Hilfe die Verkaufspreise P_1, P_2, P_3 und P_4 der Bonbonnieren B_1, B_2, B_3 und B_4 berechnet werden können.
– Begründen Sie, wie viele Zeilen und Spalten die sich ergebende Matrix haben muss.

c) Die Glasur der Pralinen wird in 3 Typen aus unterschiedlichem Gehalt an Kakao, Zucker und Kakaobutter hergestellt. Jeweils 100 Gramm (g) einer Glasur enthalten die in der untenstehenden Tabelle angegebene Masse dieser Zutaten in g.

	Typ 1 (dunkel)	Typ 2 (mittel)	Typ 3 (hell)
Kakao	40	37	35
Zucker	30	40	45
Kakaobutter	30	23	20

Für die Glasur von jeweils 50 Stück der verschiedenen Pralinensorten werden folgende Mengen (in Einheiten zu 100 Gramm) benötigt:

	Marzipan	Nougat	Kokos	Krokant
Typ 1				5
Typ 2	5	2		3
Typ 3	2	3	6	

– Erstellen Sie einen Gozinto-Graphen, der die Verflechtung zwischen den Rohstoffen (Kakao, Zucker und Kakaobutter), den Glasurtypen und den Pralinensorten beschreibt.
– Interpretieren Sie diesen Graphen hinsichtlich der Zusammensetzung der Glasur von 50 Stück Marzipanpralinen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Konfiserie (B_196) aufbereitet

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Eine Konditorei möchte Pralinen aus Eigenproduktion anbieten. Um die Nachfrage abschätzen zu können, werden zunächst 4 verschiedene Bonbonnieren (B_1, B_2, B_3, B_4) aus 4 Sorten Pralinen (Marzipan, Nougat, Kokos, Krokant) angeboten. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel Stück einer jeden Pralinensorte in jeder Bonbonniere enthalten sind:

Legende:

Bonbonnieren ... B_1 B_2 B_3 B_4

Pralinensorten

Ma ... Marzipan

No ... Nougat

Ko ... Kokos

Kr ... Krokant

-	B_1	B_2	B_3	B_4
Ma	5	3	4	4
No	4	3	5	0
Ko	2	3	3	4
Kr	1	3	0	4

-----

a.)

Aus 181 Marzipanpralinen, 142 Nougatpralinen, 144 Kokospralinen und 97 Krokantpralinen wurden Bonbonnieren zusammengestellt.

–) Berechnen Sie, wie viele Bonbonnieren der Sorten B_1, B_2, B_3 und B_4 mit diesen Pralinen hergestellt werden können.

[]

-----

b.)

In der folgenden Tabelle sind die Herstellungskosten pro Praline jeweils als Variable angegeben:

Legende

K ... Kosten (in €): K_1, K_2, K_3, K_4

Ma ... Marzipan

No ... Nougat

Ko ... Kokos

Kr ... Krokant

- | K

Ma | K_1

No | K_2

Ko | K_3

Kr | K_4

Für die Verpackung fallen Materialkosten in Höhe von € 2,50 pro Bonbonniere an.

Pro Bonbonniere wird ein Gewinn von 10 % berechnet.

-) Erstellen Sie eine Formel in Matrizenschreibweise, mit deren Hilfe die Verkaufspreise P_1, P_2, P_3 und P_4 der Bonbonnieren B_1, B_2, B_3 und B_4 berechnet werden können.

[]

-) Begründen Sie, wie viele Zeilen und Spalten die sich ergebende Matrix haben muss.

[]

-----

c.)

Die Glasur der Pralinen wird in 3 Typen aus unterschiedlichem Gehalt an Kakao, Zucker und Kakaobutter hergestellt. Jeweils 100 Gramm (g) einer Glasur enthalten die in der untenstehenden Tabelle angegebene Masse dieser Zutaten in g.

Legende:

T ... Typ

T_1 :.. Typ 1 (dunkel)

T_2 ... Typ 2 (mittel)

T_3 ... Typ 3 (hell)

G ... Gehalt

K ... Kakao

Z ... Zucker

Kb ... Kakaobutter

T/G |T_1| T_2| T_3

K | 40 | 37 |35

Z | 30 | 40 | 45

Kb | 30 | 23 | 20

Für die Glasur von jeweils 50 Stück der verschiedenen Pralinensorten werden folgende Mengen (in Einheiten zu 100 Gramm) benötigt:

Legende:

T ... Typ

G ... Gehalt

Ma ... Marzipan

No ... Nougat

Ko ... Kokos

Kr ... Krokant

T_1 :.. Typ 1 (dunkel)

T_2 ... Typ 2 (mittel)

T_3 ... Typ 3 (hell)

G/T	Ma	No	Ko	Kr
T_1	-	-	-	5
T_2	5	2	-	3
T_3	2	3	6	-

-) Erstellen Sie einen Gozinto-Graphen, der die Verflechtung zwischen den Rohstoffen (Kakao, Zucker und Kakaobutter), den Glasurtypen und den Pralinensorten beschreibt.

Alternativ: Beschreiben Sie den Gonzinto-Graphen

{{Beschreibung des Gozinto-Graphen:

Legende:

Px ... Pfad x

R_1 ... Rohstoff 1 (Kakao)

R_2 ... Rohstoff 2 (Zucker)

R_3 ... Rohstoff 3 (Kakaobutter)

Z_1 ... Zwischenprodukt 1 (Typ 1)

Z_2 ... Zwischenprodukt 2 (Typ 2)

Z_3 ... Zwischenprodukt 3 (Typ 3)

E_1 ... Endprodukt 1 (Marzipan)

E_2 ... Endprodukt 2 (Nougat)

E_3 ... Endprodukt 3 (Kokos)

E_4 ... Endprodukt 4 (Krokant)

[]}}

-) Interpretieren Sie diesen Graphen hinsichtlich der Zusammensetzung der Glasur von 50 Stück Marzipanpralinen.

[]

5.1 Möglicher Lösungsweg (B_196)

Möglicher Lösungsweg

a) a, b, c und d bezeichnen die Anzahl der hergestellten Bonbonnieren B_1, B_2, B_3 und B_4.

Lösung mit Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 5a + 3b + 4c + 4d &= 181 \\ 4a + 3b + 5c \phantom{{}+4d} &= 142 \\ 2a + 3b + 3c + 4d &= 144 \\ a + 3b \phantom{{}+4c} + 4d &= 97 \end{aligned}$$

mittels Technologieeinsatz: $a = 8$, $b = 15$, $c = 13$, $d = 11$

Alternativer Lösungsweg (mit inverser Matrix):

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 181 \\ 142 \\ 144 \\ 97 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 181 \\ 142 \\ 144 \\ 97 \end{pmatrix}$$

Mittels Technologieeinsatz:

Mittels Technologieeinsatz:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0 & -0{,}5 & 0{,}125 \\ -0{,}292 & 0{,}333 & -0{,}167 & 0{,}458 \\ -0{,}125 & 0 & 0{,}5 & -0{,}375 \\ 0{,}125 & -0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 181 \\ 142 \\ 144 \\ 97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Es können 8 Bonbonnieren B_1, 15 Bonbonnieren B_2, 13 Bonbonnieren B_3 und 11 Bonbonnieren B_4 hergestellt werden.

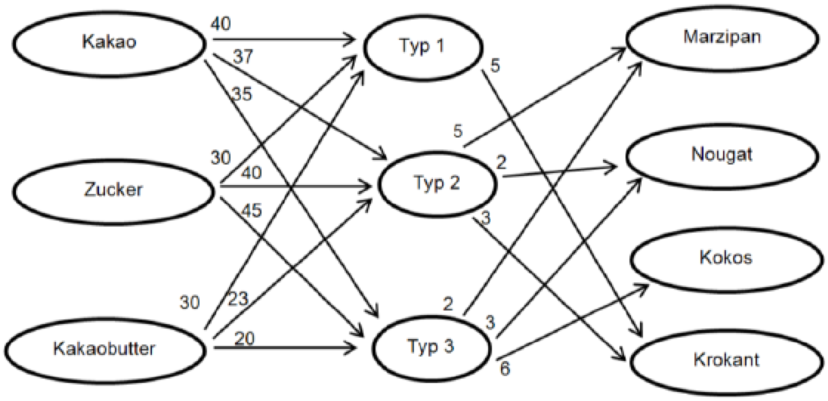
Hinweis: Werden die Einträge der inversen Matrix nicht gerundet, ergeben sich leicht abweichende Zahlenwerte im Ergebnisvektor.

b) Verkaufspreisvektor:

$$(P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4) = \left[(K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad K_4) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + (2{,}5 \quad 2{,}5 \quad 2{,}5 \quad 2{,}5) \right] \cdot 1{,}1$$

Das Ergebnis muss eine 1×4-Matrix sein (also 1 Zeile und 4 Spalten aufweisen), da bei der Multiplikation 1 × 4 mal 4 × 4 eine 1×4-Matrix entsteht und die weiteren Rechenschritte die Dimension der Matrix nicht mehr beeinflussen.

c)



Die Glasur von 50 Stück Marzipanpralinen besteht aus 5 Einheiten Typ 2 und 2 Einheiten Typ 3. In einer Einheit Typ 2 sind 37 g Kakao, 40 g Zucker und 23 g Kakaobutter, in einer Einheit Typ 3 sind 35 g Kakao, 45 g Zucker und 20 g Kakaobutter enthalten. Insgesamt besteht die Glasur also aus:

– Kakao: $5 \cdot 37\text{ g} + 2 \cdot 35\text{ g} = 255\text{ g}$
– Zucker: $5 \cdot 40\text{ g} + 2 \cdot 45\text{ g} = 290\text{ g}$
– Kakaobutter: $5 \cdot 23\text{ g} + 2 \cdot 20\text{ g} = 155\text{ g}$

Möglicher Lösungsweg (B_196) aufbereitet

a.)

a, b, c und d bezeichnen die Anzahl der hergestellten Bonbonnieren B_1, B_2, B_3 und B_4.

Lösung mit Gleichungssystem:

5a +3b +4c +4d =181

4a +3b +5c =142

2a +3b +3c +4d =144

a +3b +4d =97

---

mittels Technologieeinsatz: a =8, b =15, c =13, d =11

Alternativer Lösungsweg (mit inverser Matrix):

'mat[4|4]([5; 3; 4; 4][4; 3; 5; 0][2; 3; 3; 4][1; 3; 0; 4])

mal

'mat[4|1]([a][b][c][d])

=

'mat[4|1]([181][142][144][97])

Inverse Matrix

'mat[4|1]([a][b][c][d])

=

'mat[4|4]([5; 3; 4; 4][4; 3; 5; 0][2; 3; 3; 4][1; 3; 0; 4])^(-1)

mal

'mat[4|1]([181][142][144][97])

Mittels Technologieeinsatz:

'mat[4|1]([a][b][c][d])

=

'mat[4|1]([8][15][13][11])

Es können 8 Bonbonnieren B_1, 15 Bonbonnieren B_2, 13 Bonbonnieren B_3 und 11 Bonbonnieren B_4 hergestellt werden.

Hinweis: Werden die Einträge der inversen Matrix nicht gerundet, ergeben sich leicht abweichende Zahlenwerte im Ergebnisvektor.

-----

b.)

Verkaufspreisvektor:

Matrixgleichung:

'mat[1|4] =('mat [1; 4] *'mat[4; 4] -'mat [1; 4]) *1,1

([P1; P2; P3; P4])

=

([K1; K2; K3; K4])

mal

([5; 3; 4; 4][4; 3; 5; 0][2; 3; 3; 4][1; 3; 0; 4])

+

([2,5; 2,5; 2,5; 2,5])) *1,1

Das Ergebnis muss eine 1 mal 4-Matrix sein (also 1 Zeile und 4 Spalten aufweisen), da bei der Multiplikation einer 'mat[1|4] mit 'mat[4|4] eine 1 mal 4-Matrix entsteht und die weiteren Rechenschritte die Dimension der Matrix nicht mehr beeinflussen.

-----

c.)

Abbildungen_Original: Aufgabe B196c_L

{{Beschreibung des Gozinto-Graphen:

21 Pfade:

P1: R_1(40)-Z_1(5)-E_4

P2: R_1(37)-Z_1(5)-E_1

P3: R_1(37)-Z_2(2)-E_2

P4: R_1(37)-Z_3(3)-E_4

P5: R_1(35)-Z_3(2)-E_1

P6: R_1(35)-Z_3(3)-E_2

P7: R_1(35)-Z_3(6)-E_3

P8: R_2(30)-Z_1(5)-E_4

P9: R_2(40)-Z_2(5)-E_1

P10: R_2(40)-Z_2(2)-E_2

P11: R_2(40)-Z_3(3)-E_4

P12: R_2(45)-Z_3(2)-E_1

P13: R_2(45)-Z_3(3)-E_2

P14: R_2(45)-Z_3(6)-E_3

P15: R_3(30)-Z_1(5)-E_4

P16: R_3(23)-Z_2(5)-E_1

P17: R_3(23)-Z_2(2)-E_2

P18: R_3(23)-Z_2(3)-E_4

P19: R_3(20)-Z_3(2)-E_1

P20: R_3(20)-Z_3(3)-E_2

P21: R_3(20)-Z_3(6)-E_3}}

Die Glasur von 50 Stück Marzipanpralinen besteht aus 5 Einheiten Typ 2 und 2 Einheiten Typ 3.

In einer Einheit Typ 2 sind 37 g Kakao, 40 g Zucker und 23 g Kakaobutter, in einer Einheit Typ 3 sind 35 g Kakao, 45 g Zucker und 20 g Kakaobutter enthalten. Insgesamt besteht die Glasur also aus:

-) Kakao: 5 *37 g +2 *35 g =255 g

-) Zucker: 5 *40 g +2 *45 g =290 g

-) Kakaobutter: 5 *23 g +2 *20 g =155 g

-----

6 Teemischung (B_203)

Teemischungen

Aufgabennummer: B_203

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einer Apotheke werden nach eigenem Rezept Teemischungen hergestellt und verkauft. Die nachstehende Tabelle gibt an, wie viel Gramm (g) von einigen Zutaten jeweils in einer Packung Teemischung enthalten sind.

	Erkältungstee	Hustentee	Beruhigungstee	Blasentee	Gallentee
Süßholzwurzel	5	28	4	5	0
Fenchel	5	23	5	5	5
Ringelblumenblüten	0	0	4	5	5

a) – Erstellen Sie einen passenden Gozinto-Graphen, der die Verflechtung zwischen Zutaten und Teemischungen wiedergibt.

b) – Interpretieren Sie die Bedeutung der folgenden Berechnung:

$$\begin{pmatrix} 5 & 28 & 4 & 5 & 0 \\ 5 & 23 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 430 \\ 140 \end{pmatrix}$$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 430 in der Ergebnismatrix.

c) Ein Angestellter der Apotheke hat 390 g Süßholzwurzel, 360 g Fenchel und 110 g Ringelblumenblüten zu Hustentee, Beruhigungstee und Blasentee verarbeitet.
– Erstellen Sie ein geeignetes Modell zur Berechnung, wie viele Packungen der einzelnen Teesorten er jeweils hergestellt hat.
– Berechnen Sie die Anzahl der hergestellten Packungen.

d) Die Zutaten Süßholzwurzel, Fenchel und Ringelblumenblüten kann die Apotheke bei 3 verschiedenen Lieferanten beziehen. Die folgende Tabelle gibt die Preise in € pro 100 g an:

	Lieferant *A*	Lieferant *B*	Lieferant *C*
Süßholzwurzel	€ 3,35	€ 3,85	€ 3,30
Fenchel	€ 3,13	€ 3,00	€ 3,30
Ringelblumenblüten	€ 3,85	€ 3,90	€ 3,60

Die Apotheke möchte in jedem Fall alle 3 Produkte beim gleichen Lieferanten beziehen. Es werden 1 600 g Süßholzwurzel, 1 800 g Fenchel und 500 g Ringelblumenblüten benötigt.
– Berechnen Sie die für die Apotheke entstehenden Kosten bei allen 3 Lieferanten.
– Beurteilen Sie, welcher der Lieferanten für die Apotheke insgesamt am günstigsten ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Teemischung (B_203) aufbereitet

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

In einer Apotheke werden nach eigenem Rezept Teemischungen hergestellt und verkauft. Die nachstehende Tabelle gibt an, wie viel Gramm (g) von einigen Zutaten jeweils in einer Packung Teemischung enthalten sind.

Legende:

Sü ... Rohstoff R(Süßholwurzel)

Fe ... Rohstoff R(Fenchel)

Ri ... Rohstoff R(Ringelblumenblüten)

ErT ... Endprodukt E (Erkältungstee)

HuT ... Endprodukt E (Hustentee)

BeT ... Endprodukt E (Beruhigungstee)

BlT ... Endprodukt E (Blasentee)

GaT ... Endprodukt E (Gallentee)

Tabelle:

-	ErT	HuT	BeT	BlT	GaT
Sü	5	28	4	5	0
Fe	5	23	5	5	5
Ri	0	0	4	5	6

-----

a.)

Erstellen Sie einen passenden Gozinto-Graphen, der die Verflechtung zwischen Zutaten und Teemischungen wiedergibt.

Alternativ: Beschreiben Sie den Gozinto-Graphen:

{{Beschreibung des Gozinto-Graphen:

Legende:

Px ... Pfad

R_x()... Rohstoff

E_x()... Endprodukt

[]}}

-----

b.)

-) Interpretieren Sie die Bedeutung der folgenden Berechnung:

Matrixgleichung: 'mat[3|5] *'mat[5|1] ='mat [3|1]

([5; 28; 4; 5; 0][5; 23; 5; 5; 5][0; 0; 4; 5; 5])

mal

([10] [10] [10] [10] [10])

=

([420][430][140])

[]

-) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 430 in der Ergebnismatrix.

[]

-----

c.)

Ein Angestellter der Apotheke hat 390 g Süßholzwurzel (R_1), 360 g Fenchel (R_2) und 110 g Ringelblumenblüten (R_3) zu Hustentee (E_2), Beruhigungstee (E_3) und Blasentee (E_4) verarbeitet.

-) Erstellen Sie ein geeignetes Modell zur Berechnung, wie viele Packungen der einzelnen Teesorten er jeweils hergestellt hat.

[]

-) Berechnen Sie die Anzahl der hergestellten Packungen.

[]

-----

d.) Die Zutaten Süßholzwurzel (R_1), Fenchel (R_2) und Ringelblumenblüten (R_3) kann die Apotheke bei 3 verschiedenen Lieferanten beziehen. Die folgende Tabelle gibt die Preise in € pro 100 g an:

Legende:

Sü ... Rohstoff (Süßholwurzel)

Fe ... Rohstoff (Fenchel)

Ri ... Rohstoff (Ringelblumenblüten)

L_1 ... Lieferant 1; Preis in €

L_2 ... Lieferant 2; Preis in €

L_3 ... Lieferant 3; Preis in €

Tabelle:

L/R	L_1	L_2	L_3
Sü	3,35	3,85	3,30
Fe	3,13	3,00	3,30
Ri	3,85	3,90	3,60

Die Apotheke möchte in jedem Fall alle 3 Produkte beim gleichen Lieferanten beziehen. Es werden 1600 g Süßholzwurzel, 1800 g Fenchel und 500 g Ringelblumenblüten benötigt.

-) Berechnen Sie die für die Apotheke entstehenden Kosten bei allen 3 Lieferanten.

[]

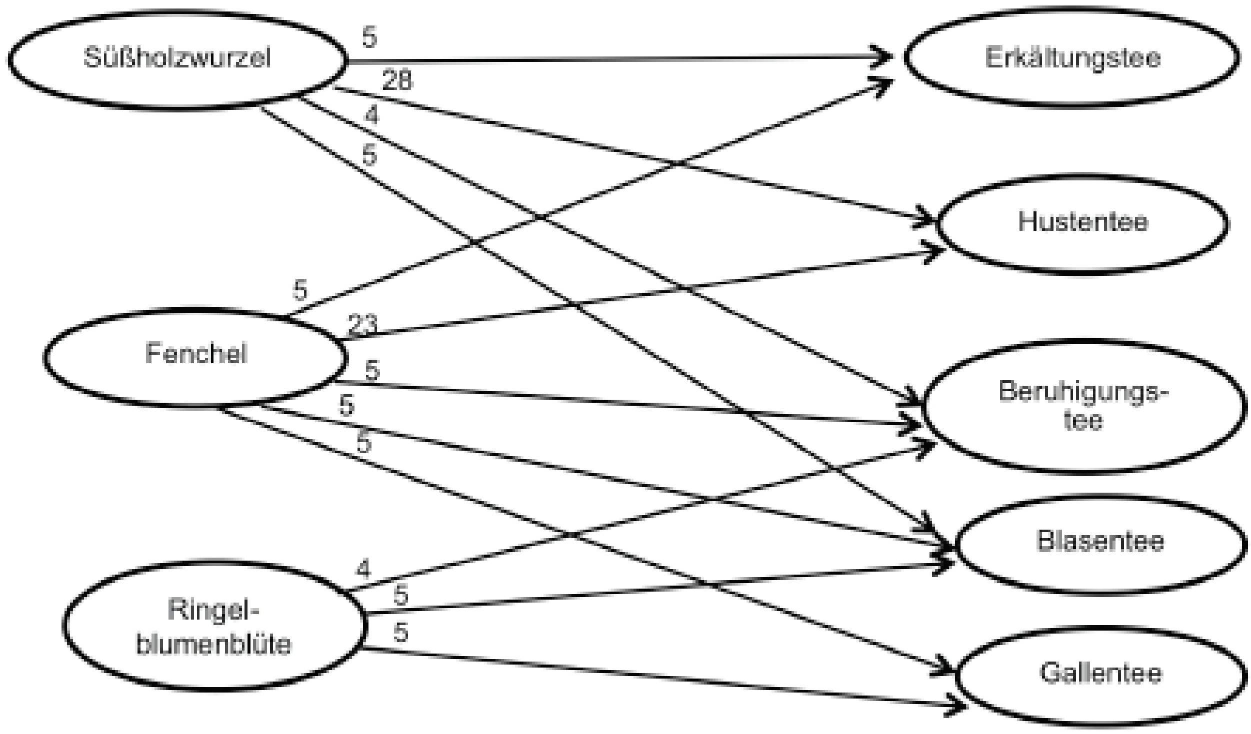
-) Beurteilen Sie, welcher der Lieferanten für die Apotheke insgesamt am günstigsten ist.

[]

6.1 Möglicher Lösungsweg (B_203)

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Die Formel beschreibt, wie viel Gramm Süßholzwurzel, Fenchel und Ringelblumenblüten man zur Herstellung von jeweils 10 Packungen der angeführten Teemischungen braucht.
Die Zahl 430 in der Ergebnismatrix ist die für 10 Packungen benötigte Menge Fenchel in Gramm.

c) a, b und c sind die Anzahl der Packungen der hergestellten Teemischungen Hustentee, Beruhigungstee und Blasentee.

$$28a + 4b + 5c = 390$$
$$23a + 5b + 5c = 360$$
$$0a + 5b + 5c = 110$$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz: $a = 10$; $b = 20$; $c = 6$

Der Angestellte hat 10 Packungen Hustentee, 20 Packungen Beruhigungstee und 6 Packungen Blasentee hergestellt.

Möglicher Lösungsweg aufbereitet (B_203)

a.)

Abbildungen_Original: Aufgabe B_203a_L

{{Beschreibung des Gozinto-Graphen:

12 Pfade:

P1: Sü(5)-E_1

P2: Sü(28)-E_2

P3: Sü(4)-E_3

P4: Sü(5)-E_4

P5: Fe(5)-E_1

P6: Fe(23)-E_2

P7: Fe(5)-E_3

P8: Fe(5)-E_4

P9: Fe(5)-E_5

P10: Ri(4)-E_3

P11: Ri(5)-E_4

P12: Ri(5)-E_5}}

-----

b.)

Die Formel beschreibt, wie viel Gramm Süßholzwurzel, Fenchel und Ringelblumenblüten man zur Herstellung von jeweils 10 Packungen der angeführten Teemischungen braucht.
Die Zahl 430 in der Ergebnismatrix ist die für 10 Packungen benötigte Menge Fenchel in Gramm.

-----

c.)

a, b und c sind die Anzahl der Packungen der hergestellten Teemischungen Hustentee, Beruhigungstee und Blasentee.

28a +4b +5c =390

23a +5b +5c =360

0a +5b +5c =110

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

a =10; b =20; c =6

Der Angestellte hat 10 Packungen Hustentee, 20 Packungen Beruhigungstee und 6 Packungen Blasentee hergestellt.

Alternativer Lösungsweg mit der inversen Matrix ist hier nicht übertragen.

-----

d.) Matrixgleichung:

'mat[1|3]([16][18][5])

*'mat[3|3]([3,35; 3,85; 3,3][3,13; 3; 3,3][3,85; 3,9; 3,6])

=='mat[1|3]([129,19; 135,10; 130,20]]

Der Lieferant A ist mit € 129,19 für die Apotheke am günstigsten.

Eine richtige Berechnung ohne Verwendung von Matrizen ist auch als richtig zu werten.

-----

7 Computergrafik (B_363)

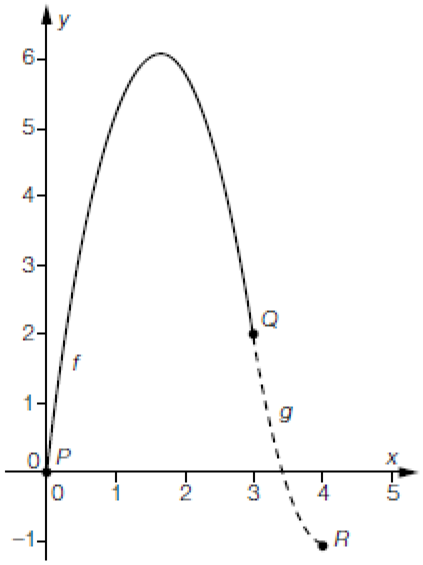
Computergrafik

Aufgabennummer: B_363

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In der Computergrafik werden mathematische Funktionen und Vektoren zur Modellierung eingesetzt.

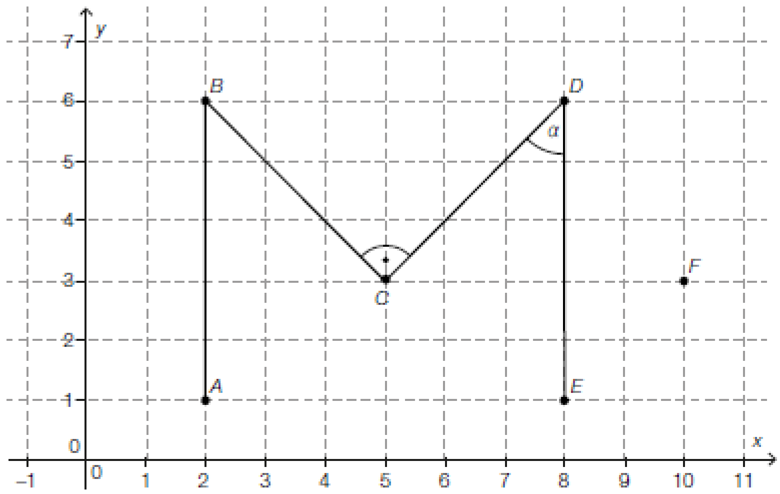
a) Im Programm *Paint* werden zur Darstellung gekrümmter Linien sogenannte Splines verwendet. Für einen quadratischen Spline werden durch je zwei der drei Messpunkte $P = (0|0)$, $Q = (3|2)$ und $R = (4|-1)$ zwei unterschiedliche quadratische Funktionen f und g gelegt.
Der Graph von f verläuft durch P und Q, der Graph von g durch Q und R. Im Punkt Q müssen die Graphen knickfrei ineinander übergehen. (Knickfrei bedeutet, dass die Funktion an dieser Stelle den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung hat.) Die Funktion g hat im Punkt R eine waagrechte Tangente.



$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$g(x) = p \cdot x^2 + q \cdot x + r$

– Stellen Sie dasjenige Gleichungssystem auf, das zur Ermittlung der Koeffizienten der beiden Funktionen f und g benötigt wird.
– Geben Sie das Gleichungssystem in Matrizenform an.
– Lösen Sie das Gleichungssystem.

b) Die nachstehende Grafik zeigt eine Darstellung des Buchstabens *M* in einem Koordinatensystem.



– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Winkels α mithilfe der Vektorrechnung auf.
– Stellen Sie die Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B in Parameterdarstellung auf.
– Berechnen Sie die y-Koordinate des Punktes $P = (2{,}7|y_P)$, sodass der Vektor $\overrightarrow{PF}$ auf den Vektor $\overrightarrow{CD}$ normal steht.

c) Zur Erkennung von Handschriften wird eine spezielle Software eingesetzt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wort von der Software richtig erkannt wird, ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert $\mu = 65$ %. Durch Änderungen in der Programmierung erwartet man eine Änderung des Erwartungswerts. Die Software wurde an 20 verschiedenen handgeschriebenen Texten ausprobiert. Dabei ergab sich ein Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 78$ % und eine Stichprobenstandardabweichung von $s = 12$ %.

– Ermitteln Sie den Vertrauensbereich für μ mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1$ %.
– Interpretieren Sie, ob tatsächlich eine Änderung des Erwartungswerts vorliegt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

– – – – –

Computergrafik (B_363) aufbereitet

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

In der Computergrafik werden mathematische Funktionen und Vektoren zur Modellierung eingesetzt.

-----

a.)

Im Programm Paint werden zur Darstellung gekrümmter Linien sogenannte Splines verwendet. Für einen quadratischen Spline werden durch je zwei der drei Messpunkte P =(0|0), Q =(3|2) und R =(4|-1) zwei unterschiedliche quadratische Funktionen f und g gelegt.

Der Graph von f verläuft durch P und Q, der Graph von g durch Q und R. Im Punkt Q müssen die Graphen knickfrei ineinander übergehen. (Knickfrei bedeutet, dass die Funktion an dieser Stelle den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung hat.) Die Funktion g hat im Punkt R eine waagrechte Tangente.

(Abbildungen_Original: Aufgabe B_363a)

{{Beschreibung der Abbildung:

Koordinatensystem

waagrechte Achse: x; [1; 5]; Skalierung: 1;

senkrechte Achse: y; [-1; 6] Skalierung: 1;

---

f(x) =a *x^2 +b *x +c

g(x) =p *x^2 +q *x +r

Der Graph von f beginnt bei (0|0) steigend und rechtsgekrümmt. Der Hochpunkt ist bei ca. (1,7|6). Ab dem Hochpunkt verläuft der Graph streng monoton fallend bis Q =(3|2).

Der Graph von g beginnt bei (3|2) fallend und linksgekrümmt und endet im Punkt R (4|-1).}}

-) Stellen Sie dasjenige Gleichungssystem auf, das zur Ermittlung der Koeffizienten der beiden Funktionen f und g benötigt wird.

[]

-) Geben Sie das Gleichungssystem in Matrizenform an.

[]

-) Lösen Sie das Gleichungssystem.

[]

-----

b.)

Die nachstehende Abbildung zeigt eine Darstellung des Buchstabens M in einem Koordinatensystem.

(Abbildungen_Original: Aufgabe B_363b)

{{Beschreibung der Abbildung:

Koordinatensystem

waagrechte Achse: x; [-1; 11]; Skalierung: 1;

senkrechte Achse: y; [0; 7]; Skalierung: 1;

Der dargestellte Streckenzug verbindet die Punkte A =(2|1), B =(2|6), C =(5|3), D =(8|6) und E =(8|2). Der Winkel BCD ist 90°, der Winkel CDE ist 'al.

Außerdem ist der Punkt F =(10|3) eingezeichnet.}}

-) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Winkels 'al mithilfe der Vektorrechnung auf.

[]

-) Stellen Sie die Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B in Parameterdarstellung auf.

[]

-) Berechnen Sie die y-Koordinate des Punktes P =(2,7|y_P), sodass der Vektor 'vPF auf den Vektor 'vCD normal steht.

[]

-----

c.)

Zur Erkennung von Handschriften wird eine spezielle Software eingesetzt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wort von der Software richtig erkannt wird, ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert 'my =65 %. Durch Änderungen in der Programmierung erwartet man eine Änderung des Erwartungswerts. Die Software wurde an 20 verschiedenen handgeschriebenen Texten ausprobiert. Dabei ergab sich ein Stichprobenmittelwert x =78 % und eine Stichprobenstandardabweichung von s =12 %.

-) Ermitteln Sie den Vertrauensbereich für 'my mit der Irrtumswahrscheinlichkeit 'al =1 %.

[]

-) Interpretieren Sie, ob tatsächlich eine Änderung des Erwartungswerts vorliegt.

[]

7.1 Möglicher Lösungsweg (B_363)

Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad g(x) = p \cdot x^2 + q \cdot x + r \quad f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b \quad g'(x) = 2 \cdot p \cdot x + q$

I: $f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$
II: $f(3) = 2 \quad \Rightarrow \quad 9 \cdot a + 3 \cdot b + c = 2$
III: $f'(3) = g'(3) \quad \Rightarrow \quad 6 \cdot a + b = 6 \cdot p + q$
IV: $g(3) = 2 \quad \Rightarrow \quad 9 \cdot p + 3 \cdot q + r = 2$
V: $g(4) = -1 \quad \Rightarrow \quad 16 \cdot p + 4 \cdot q + r = -1$
VI: $g'(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 8 \cdot p + q = 0$

Angabe des Gleichungssystems in Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{20}{9}, \quad b = \frac{22}{3}, \quad c = 0, \quad p = 3, \quad q = -24, \quad r = 47$

b) $\cos(\alpha) = \left(\frac{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{DC}| \cdot |\overrightarrow{DE}|} \right)$

Parameterdarstellung der Geraden g:

$g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Berechnung der y-Koordinate von P:

$\overrightarrow{PF} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

$\begin{pmatrix} 10 - 2{,}7 \\ 3 - y_P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 7{,}3 \\ 3 - y_P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

$7{,}3 \cdot 3 + (3 - y_P) \cdot 3 = 0$

$y_P = 10{,}3$

c) Zweiseitigen 99-%-Vertrauensbereich mithilfe der t-Verteilung bestimmen:

$78 \pm t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{12}{\sqrt{20}}$

$n = 20 \Rightarrow f = 19$

$t_{19;0{,}995} = 2{,}860\ldots$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich für μ in %:
[70,32; 85,68] (Intervallgrenzen gerundet)

Man kann von einer Veränderung des Erwartungswerts ausgehen, da μ außerhalb des 99-%-Vertrauensbereichs liegt.

Möglicher Lösungsweg (B_363) aufbereitet

a.)

f(x) =a *x^2 +b *x +c

g(x) =p *x^2 +q *x +r

f'(x) =2 *a *x +b

g'(x) =2 *p *x +q

I: f(0) =0 --> c =0

II: f(3) =2 --> 9 *a +3 *b +c =2

III: f'(3) =g'(3) --> 6 *a +b =6 *p +q

IV: g(3) =2 --> 9 *p +3 *q +r =2

V: g(4) =-1 --> 16 *p +4 *q +r =-1

VI: g'(4) =0 --> 8 *p +q =0

Matrixgleichung: (mit Termevaluator nicht lösbar, da max. 4 Gleichungen in 4 Unbekannten gelöst werden können)

'mat[6|6] *'mat[6|1] ='mat[6|1]:

'mat[6|6] ([0; 0; 1; 0; 0; 0][9; 3; 1; 0; 0; 0][-1; -6; 0; 6; 1; 0][0; 0; 0; 9; 3; 1][0; 0; 0; 16; 4; 1][0; 0; 0; 8; 1; 0])

*'mat[6|1] ([a][b][c][p][q][r])

='mat[6|1] ([0][2][0][2][-1][0])

Lösung mittels Technologieeinsatz:

a =-20/9, b =22/3, c =0, p =3, q =-24, r =47

Lösung ohne Technologieeinsatz:

IV: 9 *p +3 *q +r =2

V: 16 *p +4 *q +r =-1

IV -V: -7 *p -q =3

VI: 8 *p +q =0

(IV -V) +VI: p =3

p in VI: 8 *3 +q =0

q =-24

---

p und q in IV:

9 *3 +3 *(-24) +r =2

r =47

---

c in II: 9 *a +3 *b +0 =2

b =(2 -9 *a) /3

---

b, p, q in III:

6 *a +(2 -9 *a) /3 =6 *3 -24

6 *a +2/3 - 3 *a =-6

3 *a =-6 -2/3 |/3

a =-20/9

---

b =(2 -9 *-20/9) /3

b =(22) /3

b =22/3

-----

b.)

cos('al) =('vDC *'vDE)/(|'vDC| *|'vDE|)

Parameterdarstellung der Geraden g:

g: X =(2|1) +s *(0|5)

Berechnung der y-Koordinate von P:

'vPF 'rw 'vCD <--> 'vPF *'vCD =0

(10 -2,7|3 -y_P) *(3|3) =0

(7,3|3 -y_P) *(3|3) =0

7,3 *3 +(3 -y_P) *3 =0

y_p =10,3

-----

c.)

Zweiseitigen 99-%-Vertrauensbereich mithilfe der t-Verteilung bestimmen:

78 +-t_(f|1 -'al/2) *12/'w(20)

n =20 --> f =19

t_(19|0,995) =2,860...

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich für 'my in %: [70,32; 85,68] (Intervallgrenzen gerundet) Man kann von einer Veränderung des Erwartungswerts ausgehen, da 'my außerhalb des 99-%-Vertrauensbereichs liegt.

-----

8 Elektronische Geraete (B_367)

Elektronische Geräte

Aufgabennummer: B_367

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für die Herstellung eines bestimmten elektronischen Geräts benötigt man die Ausgangsbausteine B_1, B_2 und B_3, angegeben in Stück. Daraus werden eine Platine Z als Zwischenprodukt und 2 Geräte E_1 und E_2 als Endprodukte hergestellt, die ebenfalls in Stück angegeben sind. Zusätzlich erfüllt das Unternehmen die Nachfrage nach reinen Bausteinen B_2 und B_3 sowie dem Zwischenprodukt Z.
Die Verflechtung der einzelnen Komponenten der Produktion ist durch die Matrix $\boldsymbol{A}$ gegeben.
Die Herstellungsmengen sind durch den Produktionsvektor $\vec{x}$ dargestellt.

$$\text{Verflechtungsmatrix } \boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ Z \\ E_1 \\ E_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & B_3 & Z & E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}; \quad \text{Produktionsvektor } \vec{x} = \begin{pmatrix} 32\,000 \\ 51\,000 \\ 23\,000 \\ 1\,600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

a) – Erklären Sie, was die Zahlen in der 2. Zeile der Matrix $\boldsymbol{A}$ im gegebenen Sachzusammenhang bedeuten.
– Veranschaulichen Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$ durch einen Gozinto-Graphen.

b) – Berechnen Sie den Nachfragevektor des Unternehmens bei obiger Produktion.

Die externe Nachfrage nach B_2 und jene nach Z ändern sich: Der Absatz von B_2 wird halbiert, jener nach Z vervierfacht, die Verflechtungsmatrix bleibt gleich.

– Berechnen Sie den neuen Produktionsvektor $\vec{x}_2$.
– Beschreiben Sie die Veränderung der Produktionsmengen, die sich durch die geänderte Nachfrage ergibt.

c) B_1 kostet € 0,90/Stück, B_2 € 0,70/Stück und B_3 € 0,80/Stück.

– Erstellen Sie den Vektor $\vec{r}$, der den Bedarf an den Ausgangsbausteinen B_1, B_2 und B_3 für die Herstellung einer Platine Z beschreibt.
– Berechnen Sie die gesamten Kosten für die Ausgangsbausteine, die bei der Herstellung einer Platine anfallen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Elektronische Geraete aufbereitet (B_367)

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Für die Herstellung eines bestimmten elektronischen Geräts benötigt man die Ausgangsbausteine B_1 , B_2 und B_3 , angegeben in Stück. Daraus werden eine Platine Z als Zwischenprodukt und 2 Geräte E_1 und E_2 als Endprodukte hergestellt, die ebenfalls in Stück angegeben sind. Zusätzlich erfüllt das Unternehmen die Nachfrage nach reinen Bausteinen B_2 und B_3 sowie dem Zwischenprodukt Z. Die Verflechtung der einzelnen Komponenten der Produktion ist durch die Matrix A gegeben. Die Herstellungsmengen sind durch den Produktionsvektor 'vx dargestellt.

Verflechtungsmatrix A =

Spaltenüberschriften: B_1; B_2; B_3; Z; E_1; E_2;

Zeilenüberschriften: B_1; B_2; B_3; Z; E_1; E_2;

A='mat[6|6]([0; 0; 0; 20; 0; 0][0; 0; 0; 30; 10; 0][0; 0; 0; 10; 0; 15][0; 0; 0; 0; 3; 2][0; 0; 0; 0; 0; 0][0; 0; 0; 0; 0; 0])

Produktionsvektor 'vx =(32000|51000|23000|1600|200|300)

-----

a.)

-) Erklären Sie, was die Zahlen in der 2. Zeile der Matrix A im gegebenen Sachzusammenhang bedeuten.

[]

-) Veranschaulichen Sie die Matrix A durch einen Gozinto-Graphen.

[]

-----

b.)

-) Berechnen Sie den Nachfragevektor des Unternehmens bei obiger Produktion.

Die externe Nachfrage nach B_2 und jene nach Z ändern sich:

Der Absatz von B_2 wird halbiert, jener nach Z vervierfacht, die Verflechtungsmatrix bleibt gleich.

[]

-) Berechnen Sie den neuen Produktionsvektor 'vx_2.

[]

-) Beschreiben Sie die Veränderung der Produktionsmengen, die sich durch die geänderte Nachfrage ergibt.

[]

-----

c.)

B_1 kostet € 0,90/Stück, B_2 € 0,70/Stück und B_3 € 0,80/Stück.

-) Erstellen Sie den Vektor 'vr , der den Bedarf an den Ausgangsbausteinen B_1 , B_2 und B_3 für die Herstellung einer Platine Z beschreibt.

[]

-) Berechnen Sie die gesamten Kosten für die Ausgangsbausteine, die bei der Herstellung einer Platine anfallen.

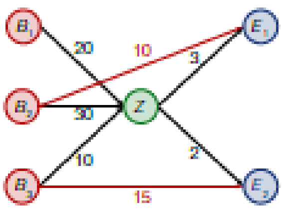
[]

8.1 Möglicher Lösungsweg (B_367)

Möglicher Lösungsweg

a) Die Nullen in den ersten 3 Spalten der 2. Zeile der Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreiben, dass der Ausgangsbaustein B_2 mit sich selbst und mit den anderen Ausgangsbausteinen nicht in Beziehung steht.
In der 4. Spalte der 2. Zeile findet man die Menge der Bausteine B_2, die für die Herstellung einer Platine Z benötigt werden. In der 5. Spalte findet man die Anzahl der Bausteine B_2, die für die Herstellung eines Geräts E_1 benötigt wird. Die 6. Spalte sagt aus, dass B_2 nicht im Gerät E_2 eingesetzt wird.

Gozinto-Graph:



b) Es gilt die Matrixgleichung $\vec{n} = \vec{x} - \boldsymbol{A} \cdot \vec{x}$.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 32\,000 \\ 51\,000 \\ 23\,000 \\ 1\,600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32\,000 \\ 51\,000 \\ 23\,000 \\ 1\,600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\,000 \\ 2\,500 \\ 400 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Es werden 1 000 Stück der Bausteine B_2, 2 500 Stück von B_3, 400 Stück Platinen Z und 200 Geräte E_1 sowie 300 Geräte E_2 von dieser Produktion nachgefragt.

Die Änderung des Nachfragevektors ergibt mit $\vec{x} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} - \vec{n}$ das folgende Gleichungssystem:

$x_1 = 20 \cdot x_4$
$x_2 = 30 \cdot x_4 + 10 \cdot x_5 + 500$
$x_3 = 10 \cdot x_4 + 15 \cdot x_6 + 2\,500$
$x_4 = 3 \cdot x_5 + 2 \cdot x_6 + 1\,600$
$x_5 = 200$
$x_6 = 300$

Die Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz ergibt die Zahlen des neuen Produktionsvektors:

$x_1 = 56\,000$; $x_2 = 86\,500$; $x_3 = 35\,000$; $x_4 = 2\,800$; $x_5 = 200$; $x_6 = 300$

Nur die Anzahl der beiden Geräte E_1 und E_2 ändert sich nicht, alle übrigen Produktionsmengen müssen erhöht werden: B_1 um 24 000 Stück, B_2 um 35 500 Stück, B_3 um 12 000 Stück und Z um 1 200 Stück.

Alternativer Lösungsweg mit der inversen Matrix:

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ 2\,500 \\ 1\,600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ 2\,500 \\ 1\,600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56\,000 \\ 86\,500 \\ 35\,000 \\ 2\,800 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

c) Den Vektor $\vec{r}$ kann man in der Matrix $\boldsymbol{A}$ aus den ersten 3 Zeilen der 4. Spalte ablesen.

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$; gesamte Kosten: $(0{,}9 \quad 0{,}7 \quad 0{,}8) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} = 47$

Die Ausgangsbausteine für die Herstellung einer Platine kosten insgesamt € 47.

Möglicher Lösungsweg (B_367) aufbereitet

a.)

Die Nullen in den ersten 3 Spalten der 2. Zeile der Matrix A beschreiben, dass der Ausgangsbaustein B_2 mit sich selbst und mit den anderen Ausgangsbausteinen nicht in Beziehung steht.

In der 4. Spalte der 2. Zeile findet man die Menge der Bausteine B_2 , die für die Herstellung einer Platine Z benötigt werden. In der 5. Spalte findet man die Anzahl der Bausteine B_2 , die für die Herstellung eines Geräts E_1 benötigt wird. Die 6. Spalte sagt aus, dass B_2 nicht im Gerät E_2 eingesetzt wird.

Abbildungen_Original: Aufgabe 367_1a_L

Legende:

Px ... Pfad x

B_x()... Ausgangsbaustein x

Z()... Zwischenprodukt

E_x... Endprodukt x

{{Beschreibung des Gozinto-Graphen:

8 Pfade:

P1: B_1(20)-Z(3)-E_1

P2: B_1(20)-Z(2)-E_2

P3: B_2(10)-E_1

P4: B_2(30)-Z(3)-E_1

P5: B_2(30)-Z(2)-E_2

P6: B_3(10)-Z(3)-E_1

P7: B_3(10)-Z(2)-E_2

P8: B_3(15)-E_2}}

-----

b.)

Es gilt die Matrixgleichung 'vx -A *'vx ='vn.

(32000|51000|23000|1600|200|300)

'mat[6|6]([0; 0; 0; 20; 0; 0][0; 0; 0; 30; 10; 0][0; 0; 0; 10; 0; 15][0; 0; 0; 0; 3; 2][0; 0; 0; 0; 0; 0][0; 0; 0; 0; 0; 0]

mal

(32000|51000|23000|1600|200|300)

=

(0|1000|2500|400|200|300) ='vn

Es werden 1000 Stück der Bausteine B_2, 2500 Stück von B_3, 400 Stück Platinen Z und 200 Geräte E_1 sowie 300 Geräte E_2 von dieser Produktion nachgefragt. Die Änderung des Nachfragevektors ergibt mit

'vx =A *'vx -'vn das folgende Gleichungssystem:

x_1 =20 *x_4

x_2 =30 *x4 +10 *x5 +500

x_3 =10 *x_4 +15 *x_6 +2500

x_4 =3 *x_5 +2 *x_6 +1600

x_5 =200

x_6 =300

Die Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz ergibt die Zahlen des neuen Produktionsvektors:

x_1 =56000; x_2 =86500; x_3 =35000; x_4 =2800; x_5 =200; x_6 =300

Nur die Anzahl der beiden Geräte E_1 und E_2 ändert sich nicht, alle übrigen Produktionsmengen müssen erhöht werden: B_1 um 24000 Stück, B_2 um 35500 Stück, B_3 um 12000 Stück und Z um 1200 Stück.

Der alternative Lösungsweg mit der inversen Matrix ist nicht übertragen.

-----

c.)

Den Vektor 'vr kann man in der Matrix A aus den ersten 3 Zeilen der 4. Spalte ablesen.

'vr =(20|30|10) |gesamte Kosten: (0,9|0,7|0,8) *(20|30|10) =47

Die Ausgangsbausteine für die Herstellung einer Platine kosten insgesamt € 47.

9 Medikamentenherstellung (B_368)

Medikamentenherstellung

Aufgabennummer: B_368

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Pharmaunternehmen stellt ein Medikament E aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 her, die bei der Produktion zu Zwischenprodukten Z_1 und Z_2 verarbeitet werden.
Die Mengenbeziehungen zwischen Rohstoffen, Zwischen- und Endprodukten der Produktion sind im nebenstehenden Gozinto-Graphen dargestellt.
Die Angaben für jeweils 1 Mengeneinheit (ME) des Zwischenprodukts bzw. für 1 ME des Endprodukts sind in ME zu verstehen.

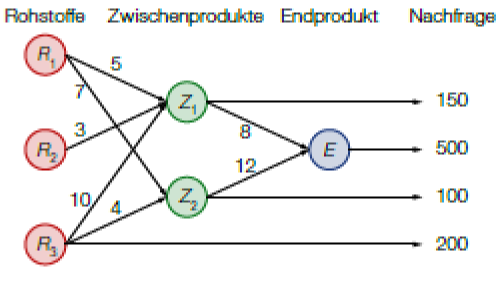


Abbildung 1

a) – Lesen Sie aus dem Gozinto-Graphen ab, aus welchen Rohstoffmengen 1 ME des Zwischenprodukts Z_2 hergestellt wird.
– Beschreiben Sie, welche Rohstoffe und Zwischenprodukte direkt nachgefragt werden.
– Erklären Sie, wie man mithilfe des Gozinto-Graphen die benötigten ME der Rohstoffe für die Herstellung von 1 ME des Endprodukts berechnen kann.
– Berechnen Sie den Rohstoffbedarf für 1 ME des Endprodukts E.

b) – Erstellen Sie eine quadratische Verflechtungsmatrix $\boldsymbol{A}$, die die im Gozinto-Graphen dargestellte Produktionsverflechtung zwischen Rohstoff, Zwischenprodukt und Endprodukt darstellt.
– Erstellen Sie aus der in Abbildung 1 dargestellten Nachfrage den zugehörigen Nachfragevektor $\vec{n}$ für R_1, R_2, R_3, Z_1, Z_2 und E.

Die für die gegebene Nachfrage benötigten ME von R_1, R_2, R_3, Z_1, Z_2 und E können in einem Produktionsvektor $\vec{x}$ zusammengefasst werden.

– Berechnen Sie unter Verwendung der Gleichung $\vec{x} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} + \vec{n}$ den Produktionsvektor $\vec{x}$ zu dieser Nachfrage.

c) Der Materialbestand im Lager beträgt 80000 ME von R_1, 20000 ME von R_2 und 76800 ME von R_3.
Aus diesem Materialbestand sollen 600 ME des Endprodukts E hergestellt und keine Rohstoffe oder Zwischenprodukte an den Markt direkt abgegeben werden.
Die Matrix $\boldsymbol{RZ}$ beschreibt diejenigen Rohstoffmengen, die für die Zwischenprodukte benötigt werden. Die Matrix $\boldsymbol{ZE}$ beschreibt diejenigen Mengen von Zwischenprodukten, die für die Herstellung des Endprodukts gebraucht werden.

– Erstellen Sie die Matrix $\boldsymbol{RZ}$.
– Erstellen Sie die Matrix $\boldsymbol{ZE}$.
– Erklären Sie, was mit dem Ausdruck $(\boldsymbol{RZ} \cdot \boldsymbol{ZE}) \cdot 600$ berechnet wird.
– Berechnen Sie, wie viel von den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 im Lager übrig bleiben.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Medikamentenherstellung (B_368) aufbereitet

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Ein Pharmaunternehmen stellt ein Medikament E aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 her, die bei der Produktion zu Zwischenprodukten Z_1 und Z_2 verarbeitet werden.
Die Mengenbeziehungen zwischen Rohstoffen, Zwischen-und Endprodukten der Produktion sind im nebenstehenden Gozinto-Graphen (Abbildungen_Original: Aufgabe B_368) dargestellt.
Die Angaben für jeweils 1 Mengeneinheit (ME) des Zwischenprodukts bzw. für 1 ME des Endprodukts sind in ME zu verstehen.

{{Beschreibung des Gozinto-Graphen:

Legende:

Px ... Pfad x

R_x()... Rohstoff x

Z_x()... Zwischenprodukt x

E()... Endprodukt

---

5 Pfade:

P1: R_1(5)-Z_1(8)-E

P2: R_1(7)-Z_2(12)-E

P3: R_2(3)-Z_1(8)-E

P4: R_3(10)-Z_2(8)-E

P5: R_3(4)-Z_2(12)-E}}

Nachfrage nach R_3: 200

Nachfrage nach Z_1: 150

Nachfrage nach Z_2: 100

Nachfrage nach E: 500

-----

a.)

-)Lesen Sie aus dem Gozinto-Graphen ab, aus welchen Rohstoffmengen 1 ME des Zwischenprodukts Z_2 hergestellt wird.

[]

-) Beschreiben Sie, welche Rohstoffe und Zwischenprodukte direkt nachgefragt werden.

[]

-) Erklären Sie, wie man mithilfe des Gozinto-Graphen die benötigten ME der Rohstoffe für die Herstellung von 1 ME des Endprodukts berechnen kann.

[]

-) Berechnen Sie den Rohstoffbedarf für 1 ME des Endprodukts E.

[]

-----

b.)

-) Erstellen Sie eine quadratische Verflechtungsmatrix A, die die im Gozinto-Graphen dargestellte Produktionsverflechtung zwischen Rohstoff, Zwischenprodukt und Endprodukt darstellt.

[]

-) Erstellen Sie aus der in der Abbildung (alternativ: in der Beschreibung der Abbildung) dargestellten Nachfrage den zugehörigen Nachfragevektor 'vn für R_1, R_2, R_3, Z_1, Z_2 und E.

Die für die gegebene Nachfrage benötigten ME von R_1, R_2, R_3, Z_1, Z_2 und E können in einem Produktionsvektor 'vx zusammengefasst werden.

[]

-) Berechnen Sie unter Verwendung der Gleichung 'vx =A *'vx +'vn den Produktionsvektor 'vx zu dieser Nachfrage.

[]

-----

c.)

Der Materialbestand im Lager beträgt 80000 ME von R_1, 20000 ME von R_2 und 76800 ME von R_3.

Aus diesem Materialbestand sollen 600 ME des Endprodukts E hergestellt und keine Rohstoffe oder Zwischenprodukte an den Markt direkt abgegeben werden.

Die Matrix RZ beschreibt diejenigen Rohstoffmengen, die für die Zwischenprodukte benötigt werden. Die Matrix ZE beschreibt diejenigen Mengen von Zwischenprodukten, die für die Herstellung des Endprodukts gebraucht werden.

-) Erstellen Sie die Matrix RZ.

[]

-) Erstellen Sie die Matrix ZE.

[]

-) Erklären Sie, was mit dem Ausdruck (RZ *ZE) *600 berechnet wird.

[]

-) Berechnen Sie, wie viel von den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 im Lager übrig bleiben.

[]

9.1 Möglicher Lösungsweg (B_368)

Möglicher Lösungsweg

a) 1 ME von Z_2 wird aus 7 ME R_1 und aus 4 ME R_3 hergestellt.

Der Rohstoff R_3 und die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 werden direkt nachgefragt.

Für die benötigte Menge von R_1 werden zunächst alle Pfade ausgewählt, die von R_1 zu E führen. Die Zahlen längs eines Pfades werden miteinander multipliziert. Die Produkte aller relevanten Pfade werden abschließend summiert. Für die anderen Rohstoffe wird dieser Vorgang wiederholt.

R_1: $5 \cdot 8 + 7 \cdot 12 = 124$
R_2: $3 \cdot 8 = 24$
R_3: $10 \cdot 8 + 4 \cdot 12 = 128$

Für 1 ME von E werden 124 ME von R_1, 24 ME von R_2 und 128 ME von R_3 benötigt.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; Nachfrage $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 150 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix}$

Der Rechenweg für $\vec{x}$ ohne Matrizen kann mithilfe der angegebenen Gleichung über das folgende lineare Gleichungssystem erfolgen:

$x_1 = 5 \cdot x_4 + 7 \cdot x_5$
$x_2 = 3 \cdot x_4$
$x_3 = 10 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 + 200$
$x_4 = 8 \cdot x_6 + 150$
$x_5 = 12 \cdot x_6 + 100$
$x_6 = 500$

Dabei gilt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$

Die Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz liefert den Produktionsvektor $\vec{x}$:
$x_1 = 63\,450$; $x_2 = 12\,450$; $x_3 = 66\,100$; $x_4 = 4\,150$; $x_5 = 6\,100$; $x_6 = 500$

Alternativer Rechenweg mit der inversen Matrix:

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&-5&-7&0\\0&1&0&-3&0&0\\0&0&1&-10&-4&0\\0&0&0&1&0&-8\\0&0&0&0&1&-12\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix};\quad (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&5&7&124\\0&1&0&3&0&24\\0&0&1&10&4&128\\0&0&0&1&0&8\\0&0&0&0&1&12\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Produktionsvektor $\vec{x}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}63\,450\\12\,450\\66\,100\\4\,150\\6\,100\\500\end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{RZ}=\begin{pmatrix}5&7\\3&0\\10&4\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{ZE}=\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}$

Mit dem Ausdruck $(\boldsymbol{RZ}\cdot\boldsymbol{ZE})\cdot 600$ berechnet man den Bedarf an Rohstoffen für die Nachfrage nach 600 ME von E.

Rohstoffmengen für die Nachfrage: $\left[\begin{pmatrix}5&7\\3&0\\10&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}\right]\cdot 600=\begin{pmatrix}74\,400\\14\,400\\76\,800\end{pmatrix}$

Von R_1 und R_2 bleiben jeweils 5 600 ME Restbestände übrig, R_3 wird zur Gänze aufgebraucht.

Möglicher Lösungsweg (B_368) aufbereitet

a.)

1 ME von Z_2 wird aus 7 ME R_1 und aus 4 ME R_3 hergestellt.

Der Rohstoff R_3 und die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 werden direkt nachgefragt.

Für die benötigte Menge von R_1 werden zunächst alle Pfade ausgewählt, die von R_1 zu E führen. Die Zahlen längs eines Pfades werden miteinander multipliziert. Die Produkte aller relevanten Pfade werden abschließend summiert. Für die anderen Rohstoffe wird dieser Vorgang wiederholt.

R_1: 5 *8 +7 *12 =124

R2: 3 *8 =24

R3: 10 *8 +4 *12 =128

Für 1 ME von E werden 124 ME von R_1, 24 ME von R_2 und 128 ME von R_3 benötigt.

-----

b.)

A ='mat[6|6] =([0; 0; 0; 5; 7; 0][0; 0; 0; 3; 0; 0][0; 0; 0; 10; 4; 0][0; 0; 0; 0; 0; 8][0; 0; 0; 0; 0; 12][0; 0; 0; 0; 0; 0])

Nachfrage 'vn =(0|0|200|150|100|500)

Der Rechenweg für 'vx ohne Matrizen kann mithilfe der angegebenen Gleichung über das folgende lineare Gleichungssystem erfolgen:

x_1 =5 *x_4 +7 *x_5

x_2 =3 *x_4

x_3 =10 *x_4 +4 *x_5 +200

x_4 =8 *x_6 +150

x_5 =12 *x_6 +100

x_6 =500

Dabei gilt:

'vx =(x_1|x_2|x_3|x_4|x_5|x_6)

Die Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz liefert den Produktionsvektor

'vx:

x_1 =63 450; x_2 =12 450; x_3 =66 100; x_4 =4 150; x_5 =6 100; x_6 =500

Der alternative Rechenweg mit der inversen Matrix ist nicht übertragen.

-----

c.)

RZ ='mat[3|2]([5; 7][3; 0][10; 4]

ZE ='mat[2|1]([8][12])

Mit dem Ausdruck (RZ *ZE) *600 berechnet man den Bedarf an Rohstoffen für die Nachfrage nach 600 ME von E.

Rohstoffmengen für die Nachfrage:

Matrixgleichung:

'mat[3|2] *'mat[2|1]) *600 ='mat[3|1]

'mat[3|2]([5 7][3 0][10 4])

*'mat[2|1]([8][1])

*600

='mat[3|1]=([74400][14400][76800])

Von R_1 und R_2 bleiben jeweils 5600 ME Restbestände übrig, R_3 wird zur Gänze aufgebraucht.

-----

10 Waschmittel (1) (B_376)

Waschmittel (1)*

Aufgabennummer: B_376

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Firma Blitzweiß produziert ein neues Waschmittel.

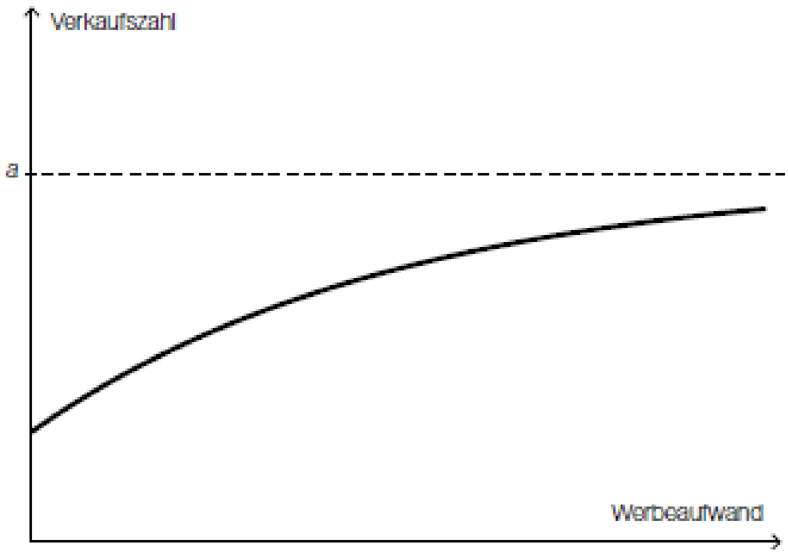
a) Die Abhängigkeit der Verkaufszahlen vom Werbeaufwand x kann für einen Monat modellhaft durch die Funktion V beschrieben werden:

$V(x) = a - b \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

a, b, λ sind positive Parameter der Funktion mit $a > b$.

– Ermitteln Sie unter Verwendung der Parameter von V die Verkaufszahl, wenn kein Werbeaufwand betrieben wird.
– Begründen Sie mathematisch, warum für $x \to \infty$ die Funktion V asymptotisch gegen a strebt.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion V für einen bestimmten Wert λ_1:



– Zeichnen Sie den Funktionsverlauf für einen Wert λ_2 mit $\lambda_2 > \lambda_1$ in die obige Abbildung ein. (Die Parameter a und b bleiben unverändert.)

b) Die Kostenfunktion K für die Produktion eines Tages kann folgendermaßen beschrieben werden:

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

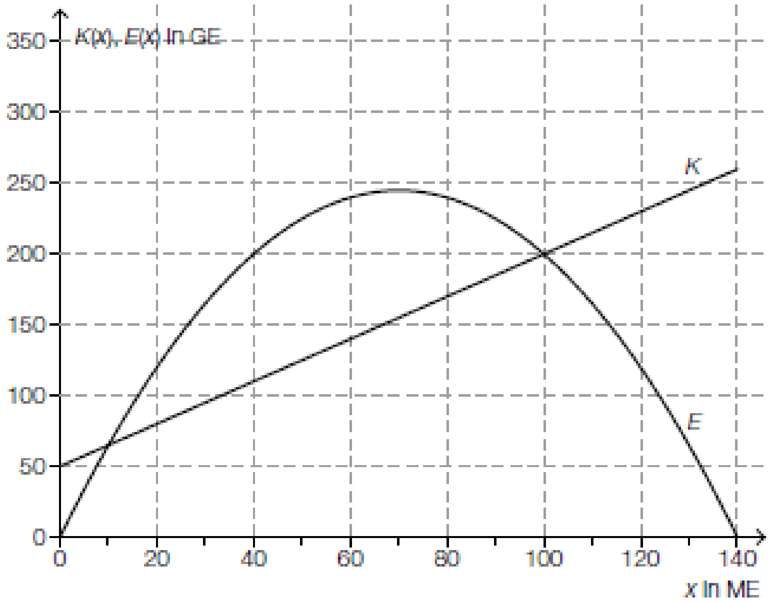
x ... Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Produktionskosten für x ME in Geldeinheiten (GE)

Folgende Informationen sind verfügbar:
Die Fixkosten betragen € 500.

x in ME	20	30	50
$K(x)$ in GE	604	672	920

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b, c und d auf.
– Berechnen Sie die Parameter a, b, c und d.

c) In der nachstehenden Abbildung sind die Funktionsgraphen der linearen Kostenfunktion K und der quadratischen Erlösfunktion E eines Produkts dargestellt:



– Stellen Sie eine Funktionsgleichung dieser Kostenfunktion K auf.
– Kennzeichnen Sie den Gewinnbereich in der obigen Abbildung.
– Erklären Sie mathematisch, warum die zugehörige Gewinnfunktion eine quadratische Funktion sein muss.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Waschmittel (1) (B_376) aufbereitet

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Die Firma Blitzweiß produziert ein neues Waschmittel.

-----

a.)

Die Abhängigkeit der Verkaufszahlen vom Werbeaufwand x kann für einen Monat modellhaft durch die Funktion V beschrieben werden:

V(x) =a -b *'e^(-'la *x)

a, b, 'la sind positive Parameter der Funktion mit a >b.

-) Ermitteln Sie unter Verwendung der Parameter von V die Verkaufszahl, wenn kein Werbeaufwand betrieben wird.

[]

-) Begründen Sie mathematisch, warum für x -> 'ue die Funktion V asymptotisch gegen a strebt.

[]

Die folgende Abbildung (Abbildungen_Original: Aufgabe B_376a) zeigt den Graphen der Funktion V für einen bestimmten Wert 'la_1:

{{Beschreibung der Abbildung:

Koordinatensystem

waagrechte Achse: Werbeaufwand; [>=0];

senkrechte Achse: Verkaufszahl; [>=0]

Der Graph 'la_1 beginnt an der senkrechten Achse streng monoton steigend und rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt). Er nähert sich einer Geraden, die im Abstand a parallel zur x-Achse verläuft.}}

-) Zeichnen Sie den Funktionsverlauf für einen Wert 'la_2 mit 'la_2 >'la_1 in die obige Abbildung ein. (Die Parameter a und b bleiben unverändert.)

Alternativ: Beschreiben Sie den Verlauf.

[]

-----

b.)

Die Kostenfunktion K für die Produktion eines Tages kann folgendermaßen beschrieben werden:

K(x) =a *x^3 +b *x^2 +c *x +d

x ... Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)

K(x) ... Produktionskosten für x ME in Geldeinheiten (GE)

Folgende Informationen sind verfügbar:

Die Fixkosten betragen € 500.

Tabelle:

x in ME | 20 | 30 | 50

K(x) in GE | 604 | 672 | 920

-) Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b, c und d auf.

[]

-) Berechnen Sie die Parameter a, b, c und d.

[]

-----

c.)

In der nachstehenden Abbildung (Abbildungen_Original: Aufgabe B_376c) sind die Funktionsgraphen der linearen Kostenfunktion K und der quadratischen Erlösfunktion E eines Produkts dargestellt:

{{Beschreibung der Abbildung:

Koordinatensystem

waagrechte Achse: x in ME; [0; 140]; Skalierung: 20;

senkrechte Achse: K(x), E(x) in GE; [0; 350]; Skalierung: 50;

Der dargestellte Graph K ist eine Gerade durch die Punkte (0|50), ca. (10|60) und (100|200).

Der dargestellte Graph E ist eine nach unten offene Parabel mit dem Hochpunkt ca. (70|245). Er beginnt in (0|0) und enthält die Punkte ca. (10|60), (100|200) und (140|0)}}

-) Stellen Sie eine Funktionsgleichung dieser Kostenfunktion K auf.

[]

-) Kennzeichnen Sie den Gewinnbereich in der obigen Abbildung.

[]

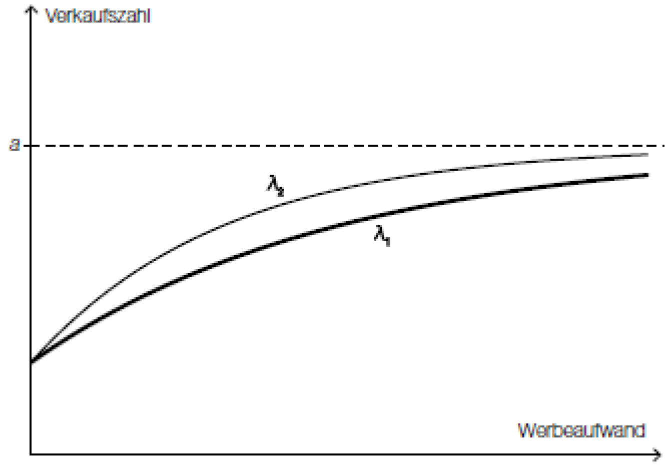
-) Erklären Sie mathematisch, warum die zugehörige Gewinnfunktion eine quadratische Funktion sein muss.

[]

10.1 Möglicher Lösungsweg (B_376)

Möglicher Lösungsweg

a) Verkaufszahl ohne Werbeaufwand: $V(0) = a - b$
Wenn x gegen unendlich geht, strebt $e^{-\lambda \cdot x}$ und daher auch das Produkt $b \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ gegen 0 und V somit gegen a.

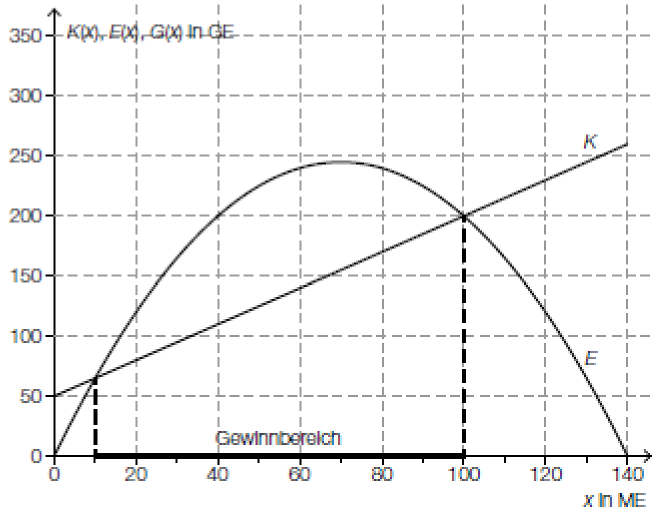


b) $K(0) = 500$: $500 = d$
$K(20) = 604$: $604 = 20^3 \cdot a + 20^2 \cdot b + 20 \cdot c + d$
$K(30) = 672$: $672 = 30^3 \cdot a + 30^2 \cdot b + 30 \cdot c + d$
$K(50) = 920$: $920 = 50^3 \cdot a + 50^2 \cdot b + 50 \cdot c + d$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{1}{375}$, $b = -\frac{2}{25}$, $c = \frac{86}{15}$ und $d = 500$

c) Ablesen aus dem Funktionsgraphen: $K(0) = 50$ und $K(100) = 200$
$\Rightarrow K(x) = 1{,}5 \cdot x + 50$



Für die Gewinnfunktion G gilt: $G(x) = E(x) - K(x)$.
Wird von einem quadratischen Term ein linearer Term abgezogen, so ist das Ergebnis wieder ein quadratischer Term.

Möglicher Lösungsweg (B_376) aufbereitet

a.)

Verkaufszahl ohne Werbeaufwand: V(0) =a -b

Wenn x gegen unendlich geht, strebt 'e^(-'la *x) und daher auch das Produkt b *'e^(-'la *x) gegen 0 und V somit gegen a.

Abbildungen_Original: Aufgabe B_376a_L

{{Beschreibung der Abbildung:

Koordinatensystem

waagrechte Achse: Werbeaufwand; [>=0];

senkrechte Achse: Verkaufszahl; [>=0]

Der Graph 'la_2 beginnt an derselben Stelle wie der Graph 'la_1, ist aber steiler und verläuft oberhalb des Graphen von 'la_1. Auch er nähert sich der Geraden, die im Abstand a parallel zur x-Achse verläuft.}}

-----

b.)

K(0) =500:

500 =d

K(20) =604:

604 =20^3 *a +20^2 *b +20 *c +d

K(30) =672:

672 =30^3 *a +30^2 *b +30 *c +d

K(50) =920:

920 =50^3 *a +50^2 *b +50 *c +d

Lösung mittels Technologieeinsatz:

a =1/375, b =-2/25, c =86/15 und d =500

-----

c.)

Abbildungen_Original: B_376c

Ablesen aus dem Funktionsgraphen: K(0) =50 und K(100) =200 -->

K(x) =1,5 *x +50

{{Beschreibung der Abbildung:

Koordinatensystem

waagrechte Achse: x in ME; [0; 140]; Skalierung: 20;

senkrechte Achse: K(x), E(x) in GE; [0; 350]; Skalierung: 50;

Die Schnittpunkte der Graphen liegen bei ca. (10|60) und (100|200).

Der Gewinnbereich liegt zwischen 10 und 100.}}

Für die Gewinnfunktion G gilt: G(x) =E(x) -K(x).

Wird von einem quadratischen Term ein linearer Term abgezogen, so ist das Ergebnis wieder ein quadratischer Term.

-----

11 KP1_16_C2_06 (KP_016)

a) Auf einem Schuldach müssen Wartungsarbeiten durchgeführt werden.
Das Mobiltelefon eines Arbeiters fällt vom Schuldach in den Schulhof. Die jeweilige Höhe des Mobiltelefons über dem Schulhof zur Zeit t kann näherungsweise durch die Funktion h beschrieben werden:

$h(t) = 25 - 5 \cdot t^2$ mit $t \geq 0$

t ... Fallzeit in Sekunden (s)
$h(t)$ ... Höhe des Mobiltelefons über dem Schulhof zur Zeit t in Metern (m)

– Berechnen Sie die Zeit bis zum Aufprall des Mobiltelefons im Schulhof. (A, B)
– Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion in einem sinnvollen Definitionsbereich. (B)

b) Durch Anwendung der Kirchhoff'schen Gesetze in einem Gleichstromnetzwerk erhält eine Schülerin folgendes Gleichungssystem für die Ströme I_1, I_2 und I_3:

$I_1 = I_2 + I_3$
$45 \cdot I_1 + 30 \cdot I_2 = 0$
$20 + 15 \cdot I_3 - 40 - 30 \cdot I_2 = 0$

– Übertragen Sie dieses Gleichungssystem in Matrizenschreibweise. (A)
– Lösen Sie dieses Gleichungssystem. (B)

Ein Gleichungssystem mit den beiden Variablen x und y ist gegeben mit:
I: $4 \cdot x + 6 \cdot y = 24$
II: $a \cdot x + 12 \cdot y = b$

– Ermitteln Sie a und b so, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat. (B)

KP1_16_C2_06 (KP_016) aufbereitet

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

-----

a.)

Auf einem Schuldach müssen Wartungsarbeiten durchgeführt werden.

Das Mobiltelefon eines Arbeiters fällt vom Schuldach in den Schulhof. Die jeweilige Höhe des Mobiltelefons über dem Schulhof zur Zeit t kann näherungsweise durch die Funktion h beschrieben werden:

h(t) =25 -5 *t^2 mit t >=0

t ... Fallzeit in Sekunden (s)

h(t) ... Höhe des Mobiltelefons über dem Schulhof zur Zeit t in Metern (m)

-) Berechnen Sie die Zeit bis zum Aufprall des Mobiltelefons im Schulhof. (A, B)

[]

-) Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion in einem sinnvollen Definitionsbereich. (B)

[]

-----

b.)

Durch Anwendung der Kirchhoff'schen Gesetze in einem Gleichstromnetzwerk erhält eine Schülerin folgendes Gleichungssystem für die Ströme I_1, I_2 und I_3:

I_1 =I_2 +I_3

45 *I_1 +30 *I_2 =0

20 +15 *I_3 -40 -30 *I_2 =0

-) Übertragen Sie dieses Gleichungssystem in Matrizenschreibweise. (A)

[]

-) Lösen Sie dieses Gleichungssystem. (B)

[]

Ein Gleichungssystem mit den beiden Variablen x und y ist gegeben mit:

I: 4 *x +6 *y =24

II: a *x +12 *y =b

-) Ermitteln Sie a und b so, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat. (B)

[]

11.1 Möglicher Lösungsweg (KP_016)

a.)

Möglicher Lösungsweg:

(A): $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 45 & 30 & 0 \\ 0 & -30 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

(B): $I_1 = \frac{8}{33} \approx 0{,}24$

$I_2 = -\frac{4}{11} \approx -0{,}36$

$I_3 = \frac{20}{33} \approx 0{,}61$

(B): $\text{I: } 4 \cdot x + 6 \cdot y = 24 \quad | \cdot 2$

$\text{II: } a \cdot x + 12 \cdot y = b$

$\text{I: } 8 \cdot x + 12 \cdot y = 48$

$\text{II: } a \cdot x + 12 \cdot y = b$

Für $a = 8$ und $b = 48$ hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

-----

b.)

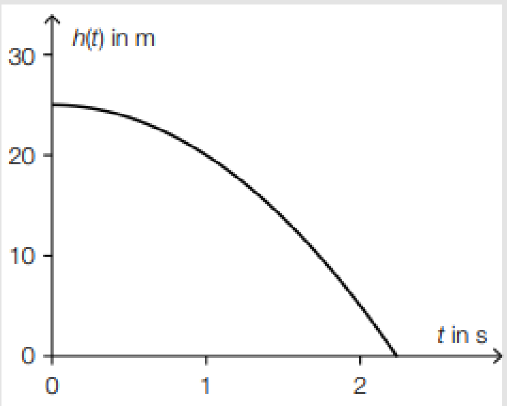
Möglicher Lösungsweg:

(A, B): $0 = 25 - 5 \cdot t^2$

$t = 2{,}236... \approx 2{,}24$

Nach rund 2,24 Sekunden trifft das Mobiltelefon im Schulhof auf.

(B):



Möglicher Lösungsweg (KP_016) aufbereitet

(A, B): 0 =25 -5 *t^2

t =2,236... ~~2,24

Nach rund 2,24 Sekunden trifft das Mobiltelefon im Schulhof auf.

(B): Abbildungen_Original: Aufgabe KP_016_L

{{Beschreibung der Abbildung:

Koordinatensystem

waagrechte Achse: t in s; [0; 3]; Skalierung: 1;

senkrechte Achse: h(t) in m; [0; 30]; Skalierung: 10;

Der Graph ist rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt) und streng monoton fallend. Er beginnt bei (0|ca. 25) und endet bei (ca. 2,2|0).}}

-----

b.)

(A):

Matrixgleichung:

'mat[3|3] *'mat[3|1] ='mat[3|1]

'mat[3|3]([1; -1; -1][45; 30; 0][0; -30; 15])

*'mat[3|1]([I_1][I_2][I_3])

='mat[3|1]([0][0][20])

(B):

I_1 =8/33 ~~0,24

I_2 =-4/11 ~~-0,36

I_3 =20/33 ~~0,61

```
(B):
I: 4 *x +6 *y =24 ; *2
II: a *x +12 *y =b
------------------
I: 8 *x +12 *y =48
II: a *x +12 *y =b
```

Für a =8 und b =48 hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
