Erfassung: BookAccess, 4040 Linz

Dieses Buch wurde erfasst von: Snezana Kostandinovic

Datum der Erfassung: 08. 2017

Autor: TINHOF, FISCHER, GERSTENDORF, GIRLINGER, PAUL

Titel: Mathematik, HAK III

TRAUNER VERLAG

BILDUNG

* Erklärungen
* Aufgaben
* Lösungen
* Formeln

inkl. Übungs-CD-ROM

Inhaltsverzeichnis

\*\*-Zeichenerklärung 8

\*\*-Vorwort 16

\*\*-Standardmatrix des Kompetenzmodells 19

\*\*-Die Übungs-CD-ROM 24

\*\*-5. SEMESTER 25

\*\*-1 Wachstums- und Abnahmeprozesse - Exponential- und Logarithmusfunktionen 25

\*\*-Meine Ziele 28

\*\*-Worum geht's hier? 29

\*\*-1.1 Exponential- und Logarithmusfunktion 34

\*\*-1.1.1 Darstellung und Eigenschaften der Exponentialfunktion 34

\*\*-Allgemeine Form der Exponentialfunktion y =c \*a^x +d 45

\*\*-1.1.2 Die eulersche Zahl 51

\*\*-1.1.3 Spezialfälle von Exponentialgleichungen 58

\*\*-1.1.4 Rechnen mit Logarithmen 61

\*\*-1.1.5 Exponentialgleichungen 78

\*\*-1.1.6 Logarithmusfunktion 83

\*\*-Übungsaufgaben 99

\*\*-1.2 Wachstum und Zerfall 131

\*\*-1.2.1 Lineares Wachstum 132

\*\*-1.2.2 Exponentielles Wachstum 133

\*\*-1.2.3 Beschränktes Wachstum 152

\*\*-1.2.4 Logistisches Wachstum 166

\*\*-Gemischte Beispiele 173

\*\*-Übungsaufgaben 184

\*\*-Aufgaben zu linearem Wachstum 186

\*\*-Aufgaben zu exponentiellem Wachstum 188

\*\*-Aufgaben zu beschränktem Wachstum 218

\*\*-Aufgaben zu logistischem Wachstum 223

\*\*-Gemischte Aufgaben 229

\*\*-Ziele erreicht? 238

\*\*-2 Zinsen und Zinseszinsen 248

\*\*-Meine Ziele 251

\*\*-Worum geht's hier? 252

\*\*-2.1 Grundbegriffe 254

\*\*-Berechnung der Zinstage bei Spareinlagen 261

\*\*-2.2 Einfache Zinsrechnung 263

\*\*-Skonto 268

\*\*-Übungsaufgaben 271

\*\*-2.3 Zinseszinsrechnung 280

\*\*-Durchschnittliche Verzinsung 295

\*\*-Theoretische Verzinsung 298

\*\*-Verzinsungsdauer 302

\*\*-Unterjährige Verzinsung 303

\*\*-Stetige Verzinsung 307

\*\*-Äquivalente Zinssätze 309

\*\*-Zinseszinsrechnung mit Technologieunterstützung 314

\*\*-Übungsaufgaben 321

\*\*-Unterjährige Verzinsung 337

\*\*-Ziele erreicht? 344

\*\*-6. SEMESTER 350

\*\*-3 Rentenrechnung 350

\*\*-Meine Ziele 351

\*\*-Worum geht's hier? 352

\*\*-3.1 Grundbegriffe 357

\*\*-3.2 Geometrische Reihe 359

\*\*-3.3 Ganzjährige Renten 364

\*\*-3.3.1 Endwert und Barwert ganzjähriger Renten 364

\*\*-3.3.2 Fünf Grundaufgaben der Rentenrechnung 373

\*\*-Berechnung von Bar- und Endwert 373

\*\*-Berechnung der Rate einer Rente 375

\*\*-Berechnung von Rentendauer und Rentenrest 377

\*\*-Berechnung des Zinssatzes einer Rente 380

\*\*-3.3.3 Jahresrente bei unterjährigem Zinssatz 385

\*\*-3.4 Unterjährige Renten 389

\*\*-3.5 Rentenkonvertierung 396

\*\*-3.6 Effektivverzinsung 401

\*\*-3.6.1 Kredit 405

\*\*-3.6.2 Ratengeschäft 408

\*\*-3.6.3 Leasing 411

\*\*-Übungsaufgaben 415

\*\*-Ratenberechnung 426

\*\*-Anzahl der Raten 429

\*\*-Zinssatz von Renten 432

\*\*-Unterjährige Renten 434

\*\*-Rentenkonvertierung 440

\*\*-Effektivverzinsung 456

\*\*-Ziele erreicht? 470

\*\*-4 Schuldtilgung 475

\*\*-Meine Ziele 476

\*\*-Worum geht's hier? 477

\*\*-4.1 Grundbegriffe 479

\*\*-4.2 Annuitätenschuld 490

\*\*-4.2.1 Tilgungsplan einer Annuitätenschuld ohne Rest 491

\*\*-4.2.2 Tilgungsplan einer Annuitätenschuld mit Rest 500

\*\*-4.2.3 Konversion einer Schuld 503

\*\*-Übungsaufgaben 506

\*\*-Ziele erreicht? 517

\*\*-5 Investitionsrechnung 519

\*\*-Meine Ziele 520

\*\*-Worum geht's hier? 520

\*\*-5.1 Kapitalwertmethode 525

\*\*-5.2 Annuitätenmethode 533

\*\*-5.3 Methode des internen Zinssatzes 534

\*\*-5.4 Methode des modifizierten internen Zinssatzes 540

\*\*-Investitionsrechnung mit Technologieunterstützung 542

\*\*-Zusammenfassung und Vergleich der vier Investitionsverfahren 554

\*\*-Übungsaufgaben 556

\*\*-Ziele erreicht? 571

\*\*-6 Kurs- und Rentabilitätsrechnung 573

\*\*-Meine Ziele 574

\*\*-Worum geht's hier? 575

\*\*-6.1 Grundbegriffe 579

\*\*-Übungsaufgaben 585

\*\*-6.2 Rendite und Kurs 592

\*\*-Sekundärmarktrendite 595

\*\*-Übungsaufgaben 608

\*\*-Ziele erreicht? 623

\*\*-Lösungen 625

\*\*-1 Wachstums- und Abnahmeprozesse 625

\*\*-2 Zinsen und Zinseszinsen 676

\*\*-3 Rentenrechnung 695

\*\*-4 Schuldtilgung 717

\*\*-5 Investitionsrechnung 729

\*\*-6 Kurs- und Rentabilitätsrechnung 735

\*\*-Quellennachweis 746

\*\*-Stichwortverzeichnis 753

j-i

##### \*\*-Zeichenerklärung

Zeichen; Sprechweise; Erläuterung, Beispiele

\ nicht; \P Negation der Aussage P

-----

=> impliziert aus ... folgt ...; P => Q

P impliziert Q aus P folgt Q

-----

<=> äquivalent genau dann; P <=> Q

P äquivalent Q P genau dann, wenn Q

-----

'u und; P 'u Q sowohl P als auch Q

-----

'o oder; P 'o Q entweder P oder Q oder beides

{...} Menge mit den Elementen; A ={a, b, c}

Menge A mit den Elementen a, b und c

-----

'el ist Element aus (von); a 'el A

-----

\'el ist nicht Element aus (von): d \'el A

-----

{x 'el M | P(x)}

Menge aller Elemente x aus M für die gilt:

P von x ist wahr

{x 'el M | x <3}

-----

{} leere Menge; enthält kein Element

-----

= ist gleich; bei Mengen: A =B, A \=C

\= ist nicht gleich, ist ungleich; bei Zahlen: 2 =2/4, 3 \=5

-----

'TM ist Teilmenge; A 'TM B

A ist Teilmenge von B

-----

'DM Durchschnitt(smenge); A 'dm B

Durchschnitt(smenge) von A und B

-----

'VM Vereinigung(smenge); A 'vm B

Vereinigung(smenge) von A und B

-----

\ ohne; A \ B

Differenzmenge A ohne B

-----

C\_G A Komplementärmenge zu A: C\_G A =G \ A

Komplementärmenge zu A in Bezug auf G

-----

'x kreuz; A 'x B

Produktmenge von A und B

-----

(a|b); (a, b) geordnetes Paar a, b; (3|-2)

-----

> ist größer; a >b

< ist kleiner; a <b

>= ist größer oder gleich; a >=b

<= ist kleiner oder gleich a <=b

-----

'N Menge der natürlichen Zahlen

'N ={0, 1, 2, 3, ...}

-----

'Z Menge der ganzen Zahlen

'Z ={..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}

-----

'Z^+Menge der positiven ganzen Zahlen

'Z^+={1, 2, 3, ...}

-----

'Z^- Menge der negativen ganzen Zahlen

'Z^- ={..., -3, -2, -1}

-----

'Z^+\_0 Menge der positiven ganzen Zahlen einschließlich 0

'Z^+\_0 ={0, 1, 2, 3, ...}

-----

'Q Menge der rationalen Zahlen

'Q^+, 'Q^-, 'Q^+\_0 wie bei 'Z

-----

'I Menge der irrationalen Zahlen; unendliche nichtperiodische Dezimalzahlen

-----

'R Menge der reellen Zahlen
'R^+, 'R^-, 'R^+\_0 wie bei 'Z

j-1

TRAUNER VERLAG

BILDUNG

Mathematik HAK, III

* Erklärungen
* Aufgaben
* Lösungen
* Formeln

1 inkl. Übungs-CD-ROM

FRIEDRICH TINHOF

WOLFGANG FISCHER

KATHRIN GERSTENDORF

HELMUT GIRLINGER

MARKUS PAUL

-----

Unter Mitarbeit von

THERESIA KLONNER

j-2

Impressum

Tinhof u. a., Mathematik III HAK

inkl. Übungs-CD-ROM

2. Auflage 2017

Schulbuch-Nr. 175.742

Schulbuch-Nr. Kombi E-Book 1 76.825

TRAUNER Verlag, Linz

-----

|Das Autorenteam|

OSTR. MAG. FRIEDRICH TINHOF,

Bundeshandelsakademie Eisenstadt, Bundes-ARGE-Leiter Mathematik HAK, ARGE-Leiter Mathematik Burgenland

-----

MAG. DIPL.-ING. WOLFGANG FISCHER,

Bundeshandelsakademie Rohrbach, Multiplikator im Bereich standardisierte Reife- und Diplomprüfung aus angewandter Mathematik an BHS

-----

MAG. KATHRIN GERSTENDORF,

Bundeshandelsakademie Landeck, Item-Writerin für die Kompensationsprüfung zur standardisierten kompetenzorientierten Reife- und Diplomprüfung, Verfasserin von Übungsaufgaben für die Handelsakademie am Bifie, Multiplikatorin im Bereich standardisierte Reife und Diplomprüfung aus angewandter Mathematik an BHS, ARGE-Leiter-Stv. Mathematik Tirol

-----

OSTR. MAG. HELMUT GIRLINGER,

Lehrer i. R. an der Bundeshandelsakademie Rohrbach, Trainer, Prüfer und Mehrfach-Vorsitzender bei Berufsreifeprüfungen, Testadministrator für das Bifie

-----

MAG. DR. MARKUS PAUL,

Bundeshandelsakademie Innsbruck, Item-Writer für die standardisierte, kompetenzorientierte Reife- und Diplomprüfung, Lektor am FH-Studiengang Tourismus- und Freizeitwirtschaft am Management-Center Innsbruck, ARGE-Leiter Mathematik Tirol

----------

Wir weisen darauf hin, dass das Kopieren zum Schul- gebrauch aus diesem Buch verboten ist - § 42 Absatz 6 Urheberrechtsgesetz (Stand: 1.8. 2015): "Die Befugnis zur Vervielfältigung zum eigenen Schulgebrauch gilt nicht für Werke, die ihrer Beschaffenheit und Bezeichnung nach zum Schul- und Unterrichtsgebrauch bestimmt sind."

----------

|Approbiert für den Unterrichtsgebrauch|

an Handelsakademien für den III. Jahrgang im Unterrichtsgegenstand Mathematik und angewandte Mathematik,

Bundesministerium für Bildung und Frauen, GZ 5.048/0045-B/8/2015 vom 3. September 2015.

Die Inhalte entsprechen dem vorgeschriebenen Kompetenzraster laut Bildungsstandards und sind laut Lehrplan zu vermitteln. Eine Auswahl bzw. Gewichtung ist nur innerhalb einzelner Kapitel (Beispiele bzw. Vertiefungsangebote) gewährleistet, nicht jedoch dürfen lt. Ministerium einzelne Kapitel oder Kompetenzbereiche ausgelassen werden.

-----

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie bekommen dieses Schulbuch von der Republik Österreich für Ihre Ausbildung.

Bücher helfen nicht nur beim Lernen, sondern sind auch Freunde fürs Leben.

----------

(c) 2015

TRAUNER Verlag +Buchservice GmbH,

Köglstraße 14, A 4020 Linz

Alle Rechte vorbehalten.

Nachdruck und sonstige Vervielfältigung, auch auszugsweise, nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Verlages.

Lektorat/Produktmanagement: MMag. Wolfgang Jungwirth

Titelgestaltung: Bettina Victor

Gestaltung und Grafik: Peter Mittermayr

(c) Bildrecht GmbH/Wien Gesamtherstellung: TRAUNER Druck GmbH & Co KG

ISBN 978-3-99062-103-5

Schulbuch-Nr. 175.742

-----

ISBN 978-3-99062-104-2

Schulbuch-Nr. Kombi E-Book 176.825

www.trauner.at

j-3

##### \*\*-Vorwort

Der vorliegende dritte Band wurde vom Autorenteam auf Basis des aktuellen Lehrplans 2014 der Handelsakademie unter Einbeziehung des aktuellen Kompetenzkataloges überarbeitet.

Wie im ersten Band dieser Buchreihe sind alle Kapitel in ähnlicher Weise aufgebaut:

* Kurzer |historischer Überblick| zum besprochenen Stoffinhalt
* Angabe der zu erreichenden |Lernziele|
* |Einfuhrendes Beispiel|, um Interesse zu wecken und einen Ein- und Ausblick zu geben
* Der "Stoffteil" beinhaltet theoretische Grundlagen sowie vollständig durchgerechnete Beispiele samt Handlungsanweisungen. Es wird dabei darauf geachtet, alle Ausprägungen der Handlungsdimension der Standardmatrix abzudecken. Auch auf die verschiedenen Lerntypen der Schülerinnen und Schüler wird geachtet.
* Der |Aufgabenteil| beinhaltet eine Vielzahl von überarbeiteten und neuen Aufgaben, die eine optimale Vorbereitung auf die bevorstehende sRDP ermöglichen.
* Am Ende eines Kapitels finden sich zusätzliche Aufgaben unter dem Titel "Ziele erreicht?", die eine kompakte Überprüfung der erreichten Kompetenzen erlauben.
* Zu allen Aufgaben finden sich die Ergebnisse am Ende des Buches. Zu vielen der Aufgaben gibt es auch die vollständig durchgerechneten |Lösungen|.
* Eine |Übungs-CD-ROM| mit zusätzlichen Arbeitsmaterialien ergänzt das vorliegende Buch.

Das Autorenteam

Linz, im April 2016

----------

Die perfekte Ergänzung

Unsere Formelsammlung ist zugelassen für die standardisierte Reife- und Diplomprüfung.

Formelsammlung

Mathematik

92 Seiten, 17 'x 24 cm

SBNr. 175.746

EUR 7,20

----------

Die Werke des Mathematikers müssen schön sein wie die des Malers oder Dichters; die Ideen müssen harmonieren wie die Farben oder Worte.

G. H. HARDY, 1877 BIS 1947,

BRITISCHER MATHEMATIKER

-> Modellbildung/Abstraktion

<- Interpretation/Konkretisierung

"Problem" Materielle Welt <-> Lösung Mathematik

-----

j-4

Auf die Seite 4 befindet sich das Inhaltsverzeichnis.

j-5 - Standardmatrix

##### \*\*-Standardmatrix des Kompetenzmodells

|Handlungsdimension|

Die charakteristischen mathematischen Tätigkeiten sind ...

1 Zahlen und Maße

A Modellieren und Transferieren:

für eine Problemstellung mit Zahlen und Maßen ein geeignetes Modell finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen.

-----

B Operieren und Technologieeinsatz:

mit Zahlen und Maßen operieren und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.

-----

C Interpretieren und Dokumentieren:

Zahlen und Maße in ihrem Kontext interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.

-----

D Argumentieren und Kommunizieren:

mithilfe von Zahlen und Maßen argumentieren und kommunizieren.

----------

Die charakteristischen mathematischen Tätigkeiten sind ...

2 Algebra und Geometrie

A Modellieren und Transferieren:

für eine Problemstellung mithilfe der Algebra und Geometrie ein geeignetes Modell finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen.

-----

B Operieren und Technologieeinsatz:

mit algebraischen und geometrischen Objekten operieren und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.

-----

C Interpretieren und Dokumentieren:

algebraische und geometrische Objekte in ihrem Kontext interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.

-----

D Argumentieren und Kommunizieren:

in der Fachsprache der Algebra und Geometrie argumentieren und kommunizieren.

----------

Die charakteristischen mathematischen Tätigkeiten sind ...

3 Funktionale Zusammenhänge

A Modellieren und Transferieren:

ein geeignetes Modell für einen funktionalen Zusammenhang finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen.

-----

B Operieren und Technologieeinsatz:

mit funktionalen Zusammenhängen operieren und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.

-----

C Interpretieren und Dokumentieren

funktionale Zusammenhänge interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.

-----

D Argumentieren und Kommunizieren:

funktionale Zusammenhänge argumentieren und kommunizieren.

----------

Die charakteristischen mathematischen Tätigkeiten sind ...

4 Analysis

A Modellieren und Transferieren:

für eine Problemstellung mithilfe der Analysis ein geeignetes Modell finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen.

-----

B Operieren und Technologieeinsatz:

Operationen in der Analysis durchführen und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.

-----

C Interpretieren und Dokumentieren

Zusammenhänge in der Analysis interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.

-----

D Argumentieren und Kommunizieren:

in der Fachsprache der Analysis argumentieren und kommunizieren.

----------

Die charakteristischen mathematischen Tätigkeiten sind ...

5 Stochastik

A Modellieren und Transferieren:

für eine Problemstellung mithilfe der Stochastik ein geeignetes Modell finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen.

-----

B Operieren und Technologieeinsatz:

Operationen in der Stochastik durchführen und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.

-----

C Interpretieren und Dokumentieren

Zusammenhänge in der Stochastik interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.

-----

D Argumentieren und Kommunizieren:

in der Fachsprache der Stochastik argumentieren und kommunizieren.

----------

Alle vollständig durchgerechneten Beispiele und Übungsaufgaben dieses Lehrbuches werden entsprechend der betroffenen Kompetenzbereiche gekennzeichnet:

A Modellieren und Transferieren

B Operieren und Technologieeinsatz

C Interpretieren und Dokumentieren

D Argumentieren und Kommunizieren

j-6

#### \*\*-Die Übungs-CD-ROM

Um das Erlernte gleich überprüfen zu können, finden Sie eine Auswahl von Schularbeiten samt Musterlösungen für diesen Jahrgang, die von den Autoren des Schulbuches im Unterricht eingesetzt wurden.

Mit einer Auswahl von Links auf Videos können Sie interessante Unterrichtseinstiege schaffen.

Mit interaktiven Übungen werden Sie auf die Beantwortung von geschlossenen Fragestellungen vorbereitet.

j-7 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

# \*\*-5. SEMESTER

## \*\*-1 Wachstums- und Abnahmeprozesse - Exponential- und Logarithmusfunktionen

|Wachstumsmodelle|

Eine wichtige Aufgabe der Naturwissenschaften ist, Vorgänge unserer Umwelt zu beobachten und mit den Mitteln der Mathematik nachzuvollziehen. Es wird ein Modell erstellt, das zur Erklärung bekannter Vorgänge, aber auch zur Prognose zukünftiger Ereignisse herangezogen werden kann.

Wachstum ist die Veränderung einer Größe, der Wachstumsgröße, mit der Zeit. Abnahme ist negatives Wachstum.

Wachstumsvorgänge können überall beobachtet werden, wie zum Beispiel in der

* Biologie: Längenwachstum, Wachstum von Populationen, wie z. B. der Weltbevölkerung oder dem Bakterienwachstum in einer Nährlösung
* Physik: radioaktiver Zerfall (das ist ein Abnahmeprozess)
* Wirtschaft: das Wachstum eines Sparguthabens durch Verzinsung, der Verbraucherpreisindex, das Bruttoinlandsprodukt

Eine genaue Voraussage für lange Zeiträume ist jedoch im Allgemeinen nicht seriös, da nur die derzeitigen Rahmenbedingungen berücksichtigt werden. Schon geringfügig geänderte Voraussetzungen können den prognostizierten Wachstumsvorgang entscheidend verändern.

Wachstum modellieren und simulieren heißt Funktionen suchen, die das Wachstum optimal darstellen und die mit der zu untersuchenden Wirklichkeit so gut wie möglich übereinstimmen.

Da der Rechenaufwand bei realitätsnahen Beispielen relativ hoch ist, empfiehlt sich die Verwendung von Hilfsmitteln.

-----

|Logarithmen|

Ein Mittel zur Vereinfachung des praktischen Rechnens waren und sind die Logarithmen. Den entscheidenden Anstoß für die Erfindung der Logarithmen gab der Rechenmeister Michael Stifel (1487 bis 1567) in seiner "Arithmetica integra" 1544. Er bemerkte durch Gegenüberstellung der Zahlenfolgen,

-3 | -2 | -1 | 0 | 1 +1 -> 2 | 3 | 4

1/8 | 1/4 | 1/2 | 1 | 2 \*3 -> 4 | 8 | 16

dass der |Addition| in der oberen Reihe die |Multiplikation| in der unteren entspricht, ebenso entspricht der Subtraktion die Division. Die Gegenüberstellung der beiden Folgen wurde zum Ausgangspunkt der Logarithmentafeln.

Die ersten brauchbaren Logarithmentafeln stammten 1620 von dem Schweizer Uhrmacher und Astronomen Jost Bürgi (1552 bis 1632) und 1614 von dem schottischen Mathematiker John Napier (1550 bis 1617). Bürgi hatte aber seine Werte schon vor Napier berechnet.

Von Napier stammt auch der Name |Logarithmus|. Napiers wissenschaftliches Erbe übernahm der Londoner Mathematiker Henry Briggs (1561 bis 1630). 1624 erschienen seine 14-stelligen Tafeln, in denen er die Potenzen 10" benützte.

Von fundamentaler Bedeutung für die Naturwissenschaften ist die nach Leonhard Euler (1707 bis 1783) benannte mathematische Konstante 'e ('e ~~2,718).

Die Verwendung von Logarithmen machte es in einer Zeit, in der es noch keinerlei elektronische Rechenhilfen gab, möglich, monatelange Berechnungen auf wenige Tage abzukürzen.

Heute wird selbstverständlich mit elektronischen Rechenhilfen gearbeitet. Sie lösen in Sekundenbruchteilen langwierige Rechenaufgaben mit großer Genauigkeit und ersetzen damit heute das Rechnen mit Logarithmen.

j-8 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##### \*\*-Meine Ziele

Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

* die Eigenschaften der Exponential- und Logarithmusfunktion beschreiben,
* mit Logarithmen rechnen und Exponentialgleichungen lösen,
* komplexere Exponentialgleichungen mit Technologie lösen,
* Exponentialfunktionen zur Modellbildung für Zu- und Abnahmeprozesse verwenden und damit Berechnungen durchführen,
* die stetigen Modelle für lineares, exponentielles, beschränktes und logistisches Wachstum beschreiben, mit diesen Modellen rechnen, diese grafisch darstellen, interpretieren und im Kontext deuten,
* die verschiedenen Wachstumsmodelle kontextbezogen anwenden, strukturell vergleichen und ihre Angemessenheit bewerten,
* die Begriffe Halbwertszeit und Verdoppelungszeit erklären und kontextbezogen berechnen.

----------

##### \*\*-Worum geht's hier?

|Verzinsung von Kapital|

Ein Anfangskapital von € 10.000,00 wird mit 10 % verzinst.

* Berechnen Sie, auf welchen Betrag das Kapital nach vier Jahren angewachsen ist. Das Anfangskapital K\_0 =10000 ist nach einem Jahr auf K\_1 angewachsen:

K\_1 =10000 +10000 \*0,1 =10000 \*(1 +0,1) =10000 \*1,1 =11000

Dieses Kapital verzinst sich wieder mit i =10 %:

K\_2 =11000 +11000 \*0,1 =11000 \*(1 +0,1) =10000 \*1,1 \*1,1 =10000 \*1,1^2

K\_2 =10000 \*(1 +0,1)^2 =10000 \*1,1^2 =12100

Beachten Sie, dass die Zinsen des Vorjahres wieder Zinsen getragen haben, sogenannte Zinseszinsen.

K\_3 =12100 +12100 \*0,1 =12100 \*(1 +0,1) =10000 \*1,12 \*1,1=10000 \*1,13^

K\_3 =10000 \*(1 +0,1)^3 =10000 \*1,1^3 =13310

K\_4 =13310 +13310 \*0,1 =13310 \*(1 +0,1) =10000 \*1,1^3 \*1,1 =10000 \*1,1^4

K\_4 =10000 \*(1 +0,1)^4 =10000 \*1,1^4 =14641

-----

* Erstellen Sie die Funktionsgleichung für den Betrag, auf den das Kapital K\_0 nach n Jahren angewachsen ist.

K\_n =K\_0 \*( +0,1)^n =K\_0 \*1,1^n für n 'el 'N

oder

K(n) =K\_0 \*(1 +0,1)^n =K\_0 \*1,1^n für n 'el 'R^+\_0

Der Faktor 1 +0,1 =1,1 ist der Zuwachsfaktor bei einer Zuwachsrate von 10 %.

-----

* Stellen Sie die Wachstumsfunktion grafisch dar.

Lösung siehe Randspalte.

* Ermitteln Sie, auf welchen Betrag das Kapital nach 10 Jahren angewachsen ist.

K\_(10) =10000 \*1,1^(10) =25 937,42

Nach 10 Jahren ist das Kapital von € 10.000,00 auf € 25.937,42 angewachsen.

----------

|Zuwachsfaktor|

a =1 +0,1 =1,1

Zuwachsfaktor =1 +Zuwachsrate

K\_0 plus 10 % von K\_0: K\_0 +0,1 \*K\_0 =

=K\_0 \*(1 +0,1) =K\_0 \*1,1

-----

|Zuwachsrate, Änderungsrate i|

i =(K\_n -K\_(n -1))/(K\_(n -1)) =(K\_(neu) -K\_(alt))/(K\_(alt))

-----

Schreibweise

K\_n für n 'el 'N

K(n) für n 'el 'R^+\_0

j-9 - Exponential- und Logarithmusfunktion

|Zerfall von radioaktivem Material|

Von einem radioaktiven Stoff mit einer Anfangsmenge N\_0 =100 g zerfallen 10 % pro Jahr.

* Berechnen Sie, wie viel von der Anfangsmenge N\_0 =100 g nach 3 Jahren noch übrig ist.

Von der Anfangsmenge N\_0 =100 g ist nach einem Jahr die Menge N\_1 übrig:

N\_1 =100 -100 \*0,1 =100 \*0,9 =90

Nach einem weiteren Jahr hat diese Menge wieder um 10 % abgenommen:

N\_2 =90 -90 \*0,1 =90 \*0,9 =100 \*0,9 \*0,9 =100 \*0,9^2 =81

N\_3 =81 -81 \*0,1 =81 \*0,9 =100 \*0,9^2 \*0,9 =100 \*0,9^3 =72,9

Nach 3 Jahren sind noch 72,9 g übrig.

-----

* Erstellen Sie die Funktionsgleichung für die Menge N(t) des radioaktiven Stoffes, auf die sich die Anfangsmenge N\_0 nach t Jahren verringert hat.

N\_t =N\_0 \*(1 -0,1) =N\_0 \*0,9^t für t 'el 'N

oder

N(t) =N\_0 \*(1 -0,1)^t =N\_0 \*0,9^t für t 'el 'R^+\_0

Der Faktor 1 -0,1 =0,9 ist der Abnahmefaktor bei 10 % Abnahmerate.

-----

* Stellen Sie die Zerfallsfunktion grafisch dar.

Lesen Sie aus der Grafik den Zeitraum ab, in dem sich die Anfangsmenge N\_0 =100 g auf (N\_0) =50 g halbiert.

Lösung siehe Randspalte.

Die Anfangsmenge hat sich in ca. 6,6 Jahren halbiert.

-----

Ermitteln Sie, wie viel von der Anfangsmenge von 100 g nach 15 Jahren noch übrig ist.

N(15) =100 \*0,9^(15) =20,6

Nach 15 Jahren sind von 100 g noch ca. 20,6 g übrig.

Der Rest hat sich in andere Stoffe umgewandelt.

----------

Beide zuvor besprochenen Wachstumsfunktionen haben die Gestalt f(x) =c \*a^x für a =1 +i mit i >0 für Wachstum und -1 <i <0 für Zerfall.

Der Wert c =f(0) ist der Anfangswert des Wachstums für x =0.

Im folgenden Kapitel werden die Eigenschaften von Funktionen dieser Form besprochen.

-----

|Abnahmefaktor|

a =1 -0,1 =0,9

Abnahmefaktor =1 -Abnahmerate

100 minus 10 % von 100:

100 -0,1 \*100 =100 \*(1 -0,1) =100 \*0,9 =90

-----

|Abnahmerate, Änderungsrate i|

i =(N\_t -N\_(t -1))/(N\_(t -1)) =(N\_(neu) -N\_(alt))/(N\_(alt))

-----

|Schreibweise:|

N\_t für t 'el 'N

N(t) für t 'el 'R^+\_0

----------

### \*\*-1.1 Exponential- und Logarithmusfunktion

#### \*\*-1.1.1 Darstellung und Eigenschaften der Exponentialfunktion

|Definition: Exponentialfunktion y =a^x|

Eine Funktion mit der Gleichung y =a^x (a 'el 'R^+ \ {1}) heißt |Exponentialfunktion| mit der Basis a.

----------

Die Basis a =1 +i kann als Zuwachsfaktor (i >0) oder als Abnahmefaktor (-1 <i <0) interpretiert werden.

Begründung für die Einschränkung a \=1:

y =1^x =1 ergibt eine Parallele zur x-Achse im Abstand 1.

Das ist eine lineare Funktion und keine Exponentialfunktion.

-----

Tipp: Die Potenz a^x besteht aus der Basis a und dem Exponenten x.

j-10 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-Beispiel 1.1: Exponentialfunktion mit der Gleichung f(x) =2^x

a) Lesen Sie den Zuwachsfaktor a der Funktion f mit y =2^x aus der Funktionsgleichung ab. Interpretieren Sie dessen Bedeutung für den Verlauf der Funktion.

b) Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Funktion f und zeichnen Sie den Graphen der Funktion für x 'el 'R.

c) Ermitteln Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f.

-----

Lösung:

a) 2 =a =1 +i =1 +1

Somit ist i =1 und der Zuwachs, pro Zunahme des x-Wertes um 1, beträgt 100 %. Die Zuwachsrate ist 100 %.

b)

x | y

-2 | 0,25

-1 | 0,5

-0,5 | 0,71

0 | 1

0,5 | 1,41

1 | 2

2 | 4

... | ...

Zu jedem x lässt sich eindeutig die Potenz 2^x berechnen.

c) Die Definitionsmenge der Exponentialfunktion ist
R, ihre Wertemenge ist 'R^+.

----------

Die Funktion mit f(x) =2^x heißt |Exponentialfunktion zur Basis 2|.

Die |unabhängige Variable| x steht im |Exponenten|.

----------

##-Beispiel 1.2: Absoluter und relativer Zuwachs

a) Erstellen Sie für die Funktion f mit y =1,5^x eine Wertetabelle für x =0, 1, 2 und 3. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f und berechnen Sie den absoluten sowie den relativen Zuwachs der Funktionswerte.

b) Erklären Sie anhand Ihrer Berechnungen die Bedeutung der Basis a =1,5 für den Verlauf der Funktion f.

-----

Lösung:

a)

x =0

y =1,5^x: 1

-----

x =1

y =1,5^x: 1,5

absoluter Zuwachs: 1,5 -1 =0,5

relativer Zuwachs, Zuwachsrate: (1,5 -1)/1 =0,5 =50 %

-----

x =2

y =1,5^x: 2,25

absoluter Zuwachs: 2,25 -1,5 =0,75

relativer Zuwachs, Zuwachsrate: (2,25 -1,5)/1 =0,5 =50 %

-----

x =3

y =1,5^x: 3,375

absoluter Zuwachs: 3,375 -2,25 =1,125

relativer Zuwachs, Zuwachsrate: (3,3725 -2,25)/(2,25) =0,5 =50 %

-----

b) Nimmt der x-Wert um 1 zu, steigt der y-Wert um 50 %.

Die Zuwachsrate ist 50 %.

Dies stimmt mit a =1,5 =1 +0,5 =1 +i und i =0,5 =50 % überein.

----------

|Änderungsrate i|

i =(y\_n -y\_(n -1))/(y\_(n -1)) =(y\_(neu) -y\_(alt))/(y\_(alt))

y =a^x mit a 'el #R^+ \ {1}

a >1 Wachstum

0 <a <1 Abnahme, Zerfall

----------

|Exponentielle Zunahme|

Gleiche |absolute Zunahmen| der x-Werte bewirken gleiche |prozentuelle Zunahmen| der y-Werte (Funktionswerte).

Eine exponentielle Zunahme ist daher ein konstantes relatives (prozentuelles) Wachstum.

----------

|Exponentielle Abnahme|

Gleiche |absolute Zunahmen| der x-Werte bewirken gleiche |prozentuelle Abnahmen| der y-Werte (Funktionswerte).

Eine exponentielle Abnahme ist daher eine konstante relative (prozentuelle) Abnahme.

j-11 - Exponential- und Logarithmusfunktion

##-Beispiel 1.3: Absoluter und relativer Zuwachs

Erstellen Sie die Wertetabellen der Exponentialfunktionen mit

f\_1(x) =2^x, f\_2(x) =(1/2)^x, f\_3(x) =3^x und

f\_4(x) =(1/3)^x für x 'el {-2, -1, 0, 1, 2}.

Zeichnen Sie ihre Graphen in ein Koordinatensystem für [-2; 2].

Interpretieren Sie die Bedeutung der Werte der Basis a für das exponentielle Wachstum.

Lösung:

Beispiel für die Berechnung:

Für x =-2 erhalten Sie

für f\_1(x) =2^x: f\_1(-2) =2^(-2) =1/4;

für f\_2(x) =(1/2)^x: f\_2(-2) =(1/2)^(-2) =2^2 =4 usw.

-----

Zur Erinnerung:

a^(-n) =1/(a^n)

1/(a^(-n)) =(1/a)^(-n) =a^n

-----

x =-2

f\_1(x) =2^x: 1/4

f\_2(x) =(1/2)^x: 4

f\_3(x) =3^x: 1/9

f\_4(x) =(1/3)^x: 9

-----

x =-1

f\_1(x) =2^x: 1/2

f\_2(x) =(1/2)^x: 2

f\_3(x) =3^x: 1/3

f\_4(x) =(1/3)^x: 3

-----

x =0

f\_1(x) =2^x: 1

f\_2(x) =(1/2)^x: 1

f\_3(x) =3^x: 1

f\_4(x) =(1/3)^x: 1

-----

x =1

f\_1(x) =2^x: 2

f\_2(x) =(1/2)^x: 1/2

f\_3(x) =3^x: 3

f\_4(x) =(1/3)^x: 1/3

-----

x =2

f\_1(x) =2^x: 4

f\_2(x) =(1/2)^x: 1/4

f\_3(x) =3^x: 9

f\_4(x) =(1/3)^x: 1/9

-----

f\_1(x) =2^x:

a =2 -1 +1

i =1 -100 %

Zuwachsrate: 100 %

-----

f\_2(x) =(1/2)^x:

a =0,5 -1 -0,5

i =-0,5 =-50 %

Abnahmerate: 50 %

-----

f\_3(x) =3^x: 1/9

a =3 =1 +2

i =2 =200 %

Zuwachsrate: 200 %

-----

f\_4(x) =(1/3)^x: 9

a =1/3 =1 -2/3

i =-2/3 ~~-66,7 %

Abnahmerate ca. 66,7 %

----------

|Eigenschaften der Exponentialfunktion f mit f(x) =a^x|

Die Graphen der |Exponentialfunktionen| x -> f(x) =a^x mit a 'el 'R^+ \ {1}, D ='R, W ='R^+

* verlaufen oberhalb der x-Achse für alle x 'el 'R.
* nähern sich immer mehr der x-Achse, erreichen die x-Achse aber nicht:

Die x-Achse ist |Asymptote|.

* sind monoton steigend für a >1, mit a =1 +i.
* sind monoton fallend für 0 <a <1, mit a =1 -i.
* haben als einzigen den Punkt (0|1) gemeinsam, da a^0 =1.
* Die Graphen der Funktionen verlaufen durch den Punkt (1|a), da a^1 =a.

Die Graphen der Funktionen mit y =a^x und y =a^(-x) =(1/a)^x sind symmetrisch bezüglich der y-Achse.

-----

Der Begriff |Asymptote| (griechisch: asymptotos) bezeichnet eine Gerade, die sich einer vorgegebenen Kurve "im Unendlichen beliebig annähert".

j-12 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-Beispiel 1.4: Schach-Anekdote

Der Erfinder des Schachspiels bekam - laut Legende - von einem indischen Herrscher einen Wunsch freigestellt. Er wünschte sich für das erste Feld des Schachbretts ein Reiskorn und für jedes folgende die doppelte Anzahl des jeweils vorhergehenden Feldes.

a) Erstellen Sie eine Funktionsgleichung, mit der allgemein die Anzahl der Reiskörner auf dem n-ten Feld berechnet werden kann.

Feld 1: F\_1 =1 =20

Feld 2: F\_2 =2 =21

Feld 3: F\_3 =4 =2^2 =2^(3 -1)

...

Feld n: F\_n =2^(n -1)

b) Ermitteln Sie, wie viele Reiskörner sich für das letzte (64.) Feld ergeben.

Feld 64: F\_(64) =2^(63) =9223372036854775808 ~~9,22 \*10^(18)

Das ist ein Vielfaches der heutigen Weltjahresproduktion an Reis.

----------

Suchen Sie auf YouTube nach dem Video "Reiskorn-Parabel".

##### \*\*-Allgemeine Form der Exponentialfunktion y =c \*a^x +d

|Definition: Allgemeine Form der Exponentialfunktion|

Eine Funktion mit der Gleichung y =c \*a^x +d heißt allgemeine Form der Exponentialfunktion.

Für a, c und d gelten: a 'el 'R^+ \ {1}, c 'el 'R \ {0} und d 'el 'R

----------

##-Beispiel 1.5: Exponentialfunktion mit der Gleichung y =c \*2^x

Gegeben sind drei Funktionsgleichungen mit y =0,7 \*2^x, y =3 \*2^x und y =-3 \*2^x.

a) Stellen Sie die gegebenen Exponentialfunktionen vom Typ y =c \*2^x grafisch dar.

Wertetabelle:

x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2

y =0,7 \*2^x | 0,175 | 0,35 | 0,7 | 1,4 | 2,8

y =3 \*2^x | 0,75 | 1,5 | 3 | 6 | 12

y =-3 \*2^x | -0,75 | -1,5 | -3 | -6 | -12

-----

b) Vergleichen Sie die Graphen der drei Funktionen mit dem Graphen der Funktion y =2^x.

* Die Funktion mit y =0,7 \*2^x schneidet die y-Achse im Punkt (0|0,7).

Der Graph der Funktion verläuft flacher als der Graph der Funktion mit y =2^x.

* Die Funktion mit y =3 \*2^x schneidet die y-Achse im Punkt (0|3).

Der Graph der Funktion verläuft steiler als der Graph der Funktion mit y =2^x.

* Die Funktion mit y =-3 \*2^x schneidet die y-Achse im Punkt (0|-3).
* Die Funktion fällt. Der Graph der Funktion ergibt sich durch Spiegelung des Graphen der Funktion mit y =3 \*2^x an der x-Achse.

----------

|Eigenschaften der Exponentialfunktion f mit f(x) =c \*a^x|

* Jeder Funktionswert von y =c \*a^x ergibt sich durch Multiplikation des entsprechenden Funktionswertes von y =a^x mit dem Faktor c.
* Jeder Funktionswert der ursprünglichen Funktion mit y =a^x wird ver-c-facht.
* Der Graph der Funktion f schneidet die y-Achse im Punkt (0|c), da f(0) =c \*a^0 =c.
* Der Graph der Funktion f verläuft durch den Punkt (1|c \*a), da f(1) =c \*a^1 =c \*a.

j-13 - Exponential- und Logarithmusfunktion

##-Beispiel 1.6: Papier falten

Wenn Sie ein Blatt Papier mit einer Dicke von 0,1 mm 20-mal falten, wie dick ist dann der Stapel?

Erstellen Sie eine allgemeine Formel zur Berechnung der Dicke des Stapels nach n Faltungen.

Dicke nach Faltung 1: F\_1 =0,1 \*2 =0,2

Dicke nach Faltung 2: F\_2 =0,2 \*2 =0,1 \*2^2 =0,4

Dicke nach Faltung 3: F\_3 =0,4 \*2 =0,1 \*2^3 =0,8

...

Dicke nach Faltung n: F\_n =0,1 \*2^n

Dicke nach Faltung 20: F\_(20) =0,1 \*2^(20) ~~105000

Jede Faltung entspricht einer Verdoppelung der Dicke.

Es sind unglaubliche 105000 mm, also 105 Meter.

----------

Experimente aus der Praxis zeigen, dass ein Blatt Papier in der Realität höchstens 7-mal gefaltet werden kann. Der Stapel wird danach für weitere Faltungen einfach zu steif und zu dick.

----------

##-Beispiel 1.7: Exponentialfunktion plus Summand

Stellen Sie die Funktion f mit y =2^x +1 grafisch dar und vergleichen Sie mit y =2^x.

Jeder Funktionswert ist um 1 größer als der entsprechende von y =2^x. Der Graph von y =2^x +1 geht aus dem Graphen von y =2^x durch Parallelverschiebung um 1 in die positive y-Richtung hervor.

y =1 ist Asymptote der Funktion f.

----------

|Eigenschaften der Exponentialfunktion f mit f(x) =a^x +d|

* Der Summand d bewirkt eine Parallelverschiebung des Graphen der Exponentialfunktion y =a^x um d in der y-Richtung.
* Die Gerade mit der Gleichung y =d ist Asymptote von f.

Die Graphen der Funktionen

* sind monoton steigend für a >1, mit a =1 +i.
* sind monoton fallend für 0 <a <1, mit a =1 -i.

----------

##-Beispiel 1.8: Lineares Wachstum und exponentielles Wachstum im Vergleich

|Lineares Wachstum|

f\_1(x) =1 +0,1x

(absoluter Zuwachs von 0,1 pro x-Einheit)

-----

|Exponentielles Wachstum|

f\_2(x) =(1 +0,1)^x =1,1^x

(relativer Zuwachs von 10 % pro x-Einheit)

x | 0 | 1 | 2

f\_1(x) =1 +0,1x | 1 | 1,1 | 1,2

f\_2(x) =1,1^x | 1 | 1,1 | 1,21

-----

x | 3 | 4 | 5

f\_1(x) =1 +0,1x | 1,3 | 1,4 | 1,5

f\_2(x) =1,1^x | 1,33 | 1,46 | 1,61

-----

x | 10 | 20 | 50

f\_1(x) =1 +0,1x | 2 | 3 | 6

f\_2(x) =1,1^x | 2,59 | 6,73 | 117,4

-----

Zeichnen Sie die beiden Funktionen für die Intervalle [0; 5]; [0; 20]; [0; 50]

Beachten Sie:

Für kleine Argumente sind die Graphen der linearen und exponentiellen Funktionen fast identisch, für große Werte klaffen sie immer weiter auseinander.

j-14 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-Beispiel 1.9: Vergleich von Potenzfunktion und Exponentialfunktion

Potenzfunktion x -> y =x^a:

unabhängige Variable x in der Basis, Formvariable a im Exponenten

x -> y =x^2: quadratische Funktion

-----

Exponentialfunktion x -> y =a^x:

unabhängige Variable x im Exponenten, Formvariable a in der Basis

x -> y =2^x: Exponentialfunktion

----------

Hinweis: Bei der Potenzfunktion y =x^a steht die Variable x in der Basis.

Bei der Exponentialfunktion y =a^x steht die Variable x im Exponenten.

----------

#### \*\*-1.1.2 Die eulersche Zahl

Eine besondere Bedeutung hat die eulersche Zahl 'e als Basis für Exponentialfunktionen. Die Zahl e ist genauso wie n eine irrationale Zahl und ist in der höheren Mathematik und in den Naturwissenschaften besonders wichtig.

Das folgende Beispiel macht die Berechnung der eulerschen Zahl nicht nur anschaulicher, sondern es beschreibt auch die Geschichte der Entdeckung der eulerschen Zahl: Ihre ersten Stellen wurden vom Schweizer Mathematiker Jakob Bernoulli bei der Untersuchung der Zinseszinsrechnung (bis zur Tagesverzinsung) gefunden.

----------

##-Beispiel 1.10: Eulersche Zahl

Führen Sie ein Gedankenexperiment durch:

Ein Kapital K\_0 =1 GE (Geldeinheit) wird zu i =100 % verzinst

a) jährlich,

b) halbjährlich,

c) vierteljährlich,

d) monatlich,

e) täglich,

f) m-mal im Jahr.

Berechnet wird jeweils das Kapital nach einem Jahr:

a) Jährliche Verzinsung: i =100 %

K\_1 =1 +1 =2

-----

b) Halbjährliche Verzinsung: Zweimal im Jahr wird mit =50 % verzinst.

K\_1 =(1 +1/2) \*(1 +1/2) =(1 +1/2)^2 =2,25 2

-----

c) Vierteljährliche Verzinsung: Viermal im Jahr wird mit i/2 =25 % verzinst.

K\_1 =(1 +1/4)^4 ~~2,4414

-----

d) Monatliche Verzinsung: Zwölfmal im Jahr wird mit i/4 ~~8,33 % verzinst.

K\_1 =(1 +1/(12))^(12) ~~2,613

e) Tägliche Verzinsung: 360-mal im Jahr wird mit 1/(12) ~~0,2778 % verzinst.

K\_1 =(1 +1/(360))^(360) ~~2,714 516 .

f) m-malige Verzinsung: m-mal im Jahr wird mit i/m verzinst.

K\_1 =(1 +1/m)^m

----------

'e^(i 'pi) +1 =0

Die "Euler Identität" stellt einen einfachen Zusammenhang zwischen vier der bedeutendsten mathematischen Konstanten her: der eulerschen Zahl 'e, der imaginären Einheit i der komplexen Zahlen, der Kreiszahl n sowie den Zahlen 0 und 1.

Wir finden darin die Addition, die Multiplikation und eine Potenz vertreten.

Sie wurde von Mathematikern zur "schönsten Formel" der Mathematik gewählt.

j-15 - Exponential- und Logarithmusfunktion

Untersuchen Sie den Wert des Ausdrucks (1 +1/m)^m, wenn m immer größere Werte annimmt, wenn m gegen Unendlich geht.

Es ist erstaunlich: Der Wert des Ausdrucks (1 +1/m)^m nähert sich mit wachsendem m einer Zahl, die nach ihrem Entdecker, dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler, eulersche Zahl 'e genannt wird:

m | (1 +1/m)^m

2 | 2,25

4 | 2,441406250

12 | 2,613035290

360 | 2,714516025

1000 | 2,716923932

1000000 | 2,718280469

100000000 | 2,718281815

'e =2,718281828459045235360287471352662497757247093699 ...

----------

Tipp:

Sie erhalten 'e mit Excel und GeoGebra durch den Befehl EXP(1), da 'e^1 ='e

----------

##-Beispiel 1.11: Exponentialfunktionen

a) Erstellen Sie eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen der Funktion mit der Gleichung y ='e^x.

Vergleichen Sie den gezeichneten Graphen mit den Graphen von y =2^x und y =3^x.

x | -3 | -2 | -1 | 0

y =2^x | 0,125 | 0,25 | 0,5 | 1

y ='e^x | 0,05 | 0,14 | 0,37 | 1

y =3^x | 0,037 | 0,11 | 0,33 | 1

-----

x | 1 | 2 | 3

y =2^x | 2 | 4 | 8

y ='e^x | 2,72 | 7,39 | 20,1

y =3^x | 3 | 9 | 27

-----

Man erkennt: y ='e^x liegt zwischen y =2^x und y =3^x, da 2 <'e <3.

Alle drei gezeichneten Funktionen haben einen gemeinsamen Schnittpunkt in (0|1). Zur Unterscheidung der drei gezeichneten Funktionen lesen Sie jeweils den Funktionswert an der Stelle 1 ab.

-----

b) Beschreiben Sie, wie Sie aus dem Graphen einer Exponentialfunktion die Basis a ermitteln können.

Allgemein gibt der Funktionswert f(1) die Basis a einer gezeichneten Exponentialfunktion mit y =a^x an. Begründung: f(1) =a^1 =a

----------

##-Beispiel 1.12: Glockenkurve

Berechnen Sie die Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen der Funktion mit y ='e^(-(x^2)/2) (Glockenkurve).

x | y

-3 | 0,011

-2 | 0,135

-1 | 0,607

0 | 1,000

1 | 0,607

2 | 0,135

3 | 0,011

----------

In der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Glockenkurve von großer Bedeutung.

----------

##-Beispiel 1.13: Kettenlinie

Durch die Funktion K mit

K(x) =(-1) \*('e^(x/2) +'e^(-(x/2)) +10

ist eine so genannte Kettenlinie definiert.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion K mit Technologie.

j-16 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-Beispiel 1.14: Ermittlung des Funktionsterms

Gegeben ist der Graph der Exponentialfunktion von der Form y =c \*a^x.

Ermitteln Sie aus der Grafik die Werte von a und c und schreiben Sie den Funktionsterm an. Erklären Sie Ihre Vorgangsweise.

1. Schritt: Der y-Wert des Schnittpunktes des Graphen mit der y-Achse ist der Wert c =0,5.

2. Schritt: Aus dem y-Wert des Punktes mit x =1 erhalten Sie c \*a^1 =c \*a.

c \*a =1,5

3. Schritt: Aus 0,5 \*a =1,5 berechnen Sie a.

a =(1,5)/(0,5) =3

Die Gleichung der dargestellten Exponentialfunktion lautet somit y =0,5 \*3^x.

-----

b)

1. Schritt: c =5

2. Schritt: c \*a^1 =1,5

3. Schritt: 5 \*a^1 =1,5

a =(1,5)/5 =0,3

Die Gleichung der dargestellten Exponentialfunktion lautet somit y =5 \*0,3^x.

----------

Hinweis: Ungenaues Ablesen wird in gewissen Grenzen toleriert.

----------

#### \*\*-1.1.3 Spezialfälle von Exponentialgleichungen

In diesem Kapitel werden Spezialfälle von Exponentialgleichungen mit gleicher Basis oder Exponentialgleichungen mit gleichen Exponenten gelöst. Für den allgemeinen Fall wird ein Hilfsmittel benötigt, das Sie im nächsten Kapitel kennenlernen werden: den Logarithmus.

----------

|Definition: Exponentialgleichung|

Eine Gleichung, bei der die Variable im Exponenten einer Potenz steht, heißt |Exponentialgleichung|.

-----

x^2 =9 Potenzgleichung

2^x =9 Exponentialgleichung

----------

|Umkehrbarkeit der Exponentialfunktion mit y =a^x|

* a^x =b^x <=> x =0 für a \=b
* b^u =b^v <=> u =v für b 'el 'R^+ \ {1}

-----

a^u =a^v <=> u =v

----------

##-Beispiel 1.15: Exponentialgleichung mit gleicher Basis a^u =a^v

Ermitteln Sie die Lösungsmenge über der Grundmenge 'R.

a) 7^(5x -1) =7^(3x +2)

wegen a^u =a^v <=> u =v

5x -1 =3x +2

2x =3

x =1,5; L ={1,5}

-----

b) 3^(2x -1) =27

3^(2x -1) =3^3

2x -1 =3

x =2; L ={2}

-----

c) 8 \*16^x =2^(2x)

2^3 \*2^(4x) =2^(2x)

2^(4x +3) =2^(2x)

4x +3 =2x

x =-1,5; L ={-1,5}

-----

d) 3^x =1

3^x =3^0

x =0; L ={0}

-----

e) 3^x =-3

Da die Wertemenge der Exponentialfunktion mit der Gleichung y =3^x nur positive Werte enthält (3^x >0), gilt: L ={}

j-17 - Exponential- und Logarithmusfunktion

##-Beispiel 1.16: Exponentialgleichung mit gleichen Exponenten a^u =b^u

Ermitteln Sie die Lösungsmenge über der Grundmenge 'R.

2^(3x -1) =5^(3x -1)

3x -1 =0

x =1/3; L ={1/3}

-----

Hinweis: a^u =b^u <=> u =0

----------

#### \*\*-1.1.4 Rechnen mit Logarithmen

Im vorigen Kapitel wurden Spezialfälle von Exponentialgleichungen gelöst. Eine einfache Exponentialgleichung wie zum Beispiel 2^x =10 ist mit Ihrem derzeitigen Wissensstand allerdings noch nicht lösbar.

Mit dem Lösen von Gleichungen dieser Art beschäftigt sich das folgende Kapitel.

-----

x^2 =9 Potenzgleichung

2^x =9 Exponentialgleichung

----------

##-Beispiel 1.17: Bevölkerungsentwicklung

Für die Bevölkerung einer Stadt mit 1 Million Einwohnern wird eine jährliche Wachstumsrate von 3 % angenommen.

Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis sich die Bevölkerung verdoppelt hat.

a) Lösung durch Intervallschachtelung:

Die Funktion mit der Gleichung y =1,03^x beschreibt das Bevölkerungswachstum. Ermitteln Sie jenen x-Wert, für den der Funktionswert 2 ergibt: Zu lösen ist somit die Exponentialgleichung 1,03^x =2.

In dieser Gleichung steht die Unbekannte x im Exponenten.

Die Gleichung 1,03^x =2 wird hier vorerst durch eine Intervallschachtelung gelöst. Dabei wird jeweils jenes Intervall, in dem der gesuchte x-Wert liegt, durch Probieren gesucht. Dieses Intervall wird dann von Schritt zu Schritt immer weiter verkleinert und damit die Genauigkeit der Lösung verbessert.

'De x =10

x | 20 | 30

y | 1,8 | 2,4

Der gesuchte x-Wert liegt im Intervall [20; 30].

-----

'De x =1

x | 23 | 24

y | 1,97 | 2,03

Der gesuchte x-Wert liegt im Intervall [23; 24].

-----

'De x =0,1

x | 23,4 | 23,5

y | 1,997 | 2,003

Der gesuchte x-Wert liegt im Intervall [23,4; 23,5].

-----

'De x =0,01

x | 23,44 | 23,45

y | 1,9994 | 2,00001

Der gesuchte x-Wert liegt im Intervall [23,44; 23,45], sehr nahe bei x =23,45.

Auf diese Weise erhalten Sie eine Folge von Intervallen, die alle den gesuchten Wert enthalten und die immer kleiner werden. Jedes neue Intervall ist im vorhergehenden enthalten:

x 'el [23,44; 23,45] 'TM [23,4; 23,5] 'TM [23; 24] 'TM [20; 30]

Durch solch eine Intervallschachtelung kann der gesuchte Wert mit beliebiger Genauigkeit ermittelt werden.

Die exakte Lösung der Gleichung 1,03^x =2 heißt Logarithmus von 2 zur Basis 1,03.

23,45 ist die Lösung der Exponentialgleichung 1,03^x =2, d. h., 1,03^(23,45) ~~2.

-----

b) Grafische Lösung mithilfe von Technologie:

Zeichnen Sie die Funktionen mit y\_1 =1,03^x und y\_2 =2 und berechnen Sie den Schnittpunkt dieser Funktionsgraphen.

Nach ca. 23,45 Jahren hat sich die Bevölkerung verdoppelt.

j-18 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

Potenzieren

a^c =b

-----

Wurzelziehen

a = ^(c)'w(b)

-----

Logarithmieren

c =log\_a(b)

-----

Allgemein bezeichnet man die Lösung x der Exponentialgleichung a^x =b mit x =log\_a(b) als Logarithmus von b zur Basis a.

Betrachtet man die Gleichung a^c =b, wird jede der drei vorkommenden Größen durch eine andere Rechenoperation ermittelt:

* b =? Potenzieren a^c =x

Beispiel: 2^3 =x <=> x =8

* a =? Wurzelziehen x^c =b <=> x = ^(c)'w(b)

Beispiel: x^3 =8 <=> x = ^(3)'w(8) =2

* c =? Logarithmieren a^x =b <=> x =log\_a(b)

Beispiel: 2^x =8 <=> x =log\_2(8) =3

Das Potenzieren hat also zwei umkehrende Rechenoperationen:

* das Wurzelziehen zur Berechnung der Basis und
* das Logarithmieren zur Berechnung des Exponenten.

----

Zusammenhang zwischen Exponentialgleichung und Logarithmus:

a^x =b <=> x =log\_a(b)

Basis^(Logarithmus) =Numerus

Hinweis: Der Logarithmus ist eine Hochzahl.

----------

|Definition: Logarithmus|

x =log\_a(b) <=> a^x =b

x ist der Logarithmus von b zur Basis a.

a 'el 'R^+ \ {1}, b 'el 'R^+ und x 'el 'R

b wird als Numerus bezeichnet.

Der Logarithmus von b zur Basis a (log\_a(b)) ist jener Exponent, mit dem man die Basis a potenzieren muss, um den Numerus b zu erhalten.

-----

logos: griechisch für Lehre

arithmos: griechisch für Zahl

numerus: lateinisch für Zahl, Anzahl, Menge

----------

|Eigenschaften des Logarithmus|

* Das |Berechnen eines Exponenten| zu einer gegebenen Basis heißt Logarithmieren.

a^x =b <=> x =log\_a(b)

Beispiel: 2^x =8 <=> x =log\_2(8) =3

* Das Berechnen eines Numerus zu einem gegebenen Logarithmus heißt Exponenzieren oder Entlogarithmieren.

log\_a(x) =c <=> x =a^c

Beispiel: log\_2(x) =3 <=> x =2^3 =8

* Berechnung des Exponenten bei gegebener Basis und Numerus:

log\_a(b) =x <=> a^x =b

Beispiel: log\_2(8) =x <=> 2^x =8 <=> x =3

* Es gibt keinen Logarithmus zur Basis 1.

Beispielsweise existiert zu a =1 kein Exponent, sodass z. B. 1^x =5 gilt, d. h., log\_1(5) existiert nicht.

* Der Numerus b muss eine positive Zahl sein.

Für 0 und negative Numeri sind Logarithmen nicht definiert.

----------

##-Beispiel 1.18: Einfache Berechnungen von Logarithmen

Berechnen Sie die Logarithmen durch Zurückführen auf die zugehörige Exponentialgleichung.

log\_3(9) =x <=> 3^x =9 <=> 3^x =3^2 <=> x =2 <=> log\_3(9) =2

Der Logarithmus von 9 zur Basis 3 ist gleich 2, weil 3^2 gleich 9 ist.

log\_2(16) =x <=> 2^x =16 <=> 2^x =2^4 <=> x =4 <=> log\_2(16) =4

log\_7(1/7) =x <=> 7^x =1/7 <=> 7^x =7^(-1) <=> x =-1 <=> log\_7(1/7) =-1

log\_5(0,2) =x <=> 5^x =0,2 =1/5 <=> 5^x =5^(-1) <=> x =-1 <=> log\_5(0,2) =-1

log\_2(10) =x <=> 2^x =10

Diese Exponentialgleichung können Sie vorläufig nur näherungsweise lösen.

2^3 =8 und 2^4 =16. Daher gilt 3 <x <4.

----------

Tipp: Der Logarithmus von b zur Basis a ist jener Exponent, mit dem man die Basis a potenzieren muss, um den Numerus b zu erhalten.

x =log\_a(b) <=> a^x =b

j-19 - Exponential- und Logarithmusfunktion

##-Beispiel 1.19: Logarithmen von Zehnerpotenzen

x =log\_(10)(10) <=> 10^x =10 <=> 10^x =10^1 <=> x =1 <=> log\_(10)(10) =1

x =log\_(10)(100) <=> 10^x =100 <=> 10^x =10^2 <=> x =2 <=> log\_(10)(100) =2

x =log\_(10)(1000) <=> 10^x =1000 <=> 10^x =10^3 <=> x =3 <=> log\_(10)(1000) =3

x =log\_(10)(1) <=> 10^x =1 <=> 10^x =10^0 <=> x =0 <=> log\_(10)(1) =0

x =log\_(10)(0,1) <=> 10^x =1/(10) <=> 10^x =10^(-1) <=> x =-1 <=> log\_(10)(0,1) =-1

x =log\_(10)('w(1000)) <=> 10^x ='w(1000) <=> 10^x =10^(3/2) <=> x =3/2 <=> log\_(10)('w(1000)) =3/2

----------

Für die praktische Durchführung von Rechnungen mit Logarithmen haben sich als Basen die Zahlen 10 und 'e durchgesetzt.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wurden folgende Abkürzungen eingeführt:

----------

|Definition: Dekadischer und natürlicher Logarithmus|

log\_(10)(x)

Abkürzung: lg(x)

Bezeichnung: dekadischer Logarithmus, Zehnerlogarithmus, logarithmus generalis

TR: LOG-Taste

EXCEL: LOG10(Zahl)

-----

Logarithmus: log\_('e)(x)

Abkürzung: ln(x)

Bezeichnung: natürlicher Logarithmus, logarithmus naturalis

TR: LN-Taste

EXCEL: LN(Zahl)

-----

log\_(10) =lg

log\_('e) =ln

-----

Durch wechselseitiges Einsetzen folgt aus der Definition des Logarithmus

x =log\_a(b) <=> a^x =b:

a^(log\_a(b)) =b oder x =log\_a(a^x).

----------

|Definition: Entlogarithmieren und Logarithmieren|

Entlogarithmieren und Logarithmieren zur gleichen Basis sind inverse Operationen, d. h., hintereinander ausgeführt, heben sie einander auf.

a^(log\_a(b)) =b

log\_a(a^b) =b

-----

10^(lg(b)) =b

lg(10^b) =b

-----

'e^(ln(b)) =b

ln('e^b) =b

----------

##-Beispiel 1.20: Berechnung von Logarithmen

lg(2) ~~0,30103, da 2^(lg(2)) ~~10^(0,30103) ~~2

lg(15) ~~1,17609, da 2^(lg(15)) ~~10^(1,17609) ~~15

-----

ln(2) ~~0,69315, da 'e^(ln(2)) ~~'e^(0,69315) ~~2

ln(15) ~~2,70805, da 'e^(ln(15)) ~~'e^(2,70805) ~~15

----------

|Spezielle Logarithmen|

* log\_a(1) =0 weil a^0 =1

Beispiel: ln(1) =lg(1) =log\_5(1) =0

* log\_a(a) =1 weil a^1 =a

Beispiel: ln('e) =lg(10) =log\_5(5) =1

* log\_a(a^n) =n weil a^n =a^n

Beispiel: ln('e^6) =lg(10^6) =log\_5(5^6) =6

* log\_a(1/a) =-1 weil a^(-1) =1/a

Beispiel: ln(1/('e)) =lg(1/(10)) =log\_5(1/5) =-1

j-20 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-Beispiel 1.21: Rechenregeln für Logarithmen

Stellen Sie eine Vermutung auf, wie die vorliegende Rechnung als allgemeine Rechenregel lauten könnte.

a) lg(10 \*100) =lg(1000) =3 =1 +2 =lg(10) +lg(100)

Vermutung: log\_a(u \*v) =log\_a(u) +log\_a(v)

-----

b) lg((1000)/(10)) =lg(100) =2 =3 -1 =lg(1000) -lg(10)

Vermutung: log\_a(u/v) =log\_a(u) -log\_a(v)

-----

c) lg(10^3) =lg(10 \*10 \*10) =lg(10) +lg(10) +lg(10) =3 \*lg(10)

Vermutung: log\_a(u^n) =n \*log\_a(u)

-----

d) lg( ^(3)'w(1000)) =lg((10^3)^(1/3)) =lg(10) =1 =1/3 \*3 =1/3 \*lg(1000)

Vermutung: log\_a( ^(n)'w(u)) =1/n \*log\_a(u)

----------

Kleine Logarithmentafel:

x | lg(x)

0,001 | -3

0,01 | -2

0,1 | -1

1 | 0

10 | 1

100 | 2

1000 | 3

----------

|Satz: Rechenregeln für Logarithmen|

log\_a(u \*v) =log\_a(u) +log\_a(v)

log\_a(u/v) =log\_a(u) -log\_a(v)

log\_a(u^v) =v \*log\_a(u)

Insbesondere gilt:

log\_a(1/v) =-log\_a(v) a 'el 'R^+ \ {1}

log\_a( ^(n)'w(u)) =1/n \*log\_a(u) n 'el 'N \ {0}

----------

Zur Erinnerung:

a^n \*a^m =a^(n +m)

(a^n)/(a^m) =a^(n -m)

(a^n)^m =a^(n \*m)

 ^(m)'w(a^n) =a^(n/m)

log\_a(a^n) =n

----------

Begründung der Rechenregeln:

Es sei a^x =u <=> x =log\_a(u) und a^y =v <=> y =log\_a(v)

Weiters gilt: log\_a(a^n) =n

log\_a(u \*v) =log\_a(a^x \*a^y) =log\_a(a^x +y)) =x +y =log\_a(u) +log\_a(v)

-----

log\_a(u/v) =log\_a((a^x)/(a^y)) =log\_a(a^(x -y)) =x -y =log\_a(u) -log\_a(v)

-----

log\_a(u^v) =log\_a((a^x)^v) =log\_a(a^(v \*x)) =v \*x =v \*log\_a(u)

Für |Summen und Differenzen| von Numeri log\_a(u +-v) gibt es für beliebige u und v keine allgemeine Logarithmenregel.

----------

|Durch die Anwendung des Logarithmus erniedrigt sich eine Rechenoperation Um eine Stufe.|

Numeri -> Logarithmieren -> Logarithmen

multiplizieren -> addieren

dividieren -> subtrahieren

potenzieren -> multiplizieren

Wurzel ziehen -> dividieren

----------

Um beispielsweise ^(3)'w(5) zu berechnen, wurde vor Einführung elektronischer Rechenhilfen, die Zahl zunächst logarithmiert. Der Wert des Logarithmus wurde aus einer Tabelle (Logarithmentafel) abgelesen. Dadurch wurde aus der Berechnung der dritten Wurzel von 5 eine Division durch 3. Die Division wurde händisch ausgeführt und das Ergebnis der Division wieder entlogarithmiert.

Durch Einsatz des Logarithmus wurde aus einer schwierigen Berechnung einer dritten Wurzel eine einfache Division.

Numerus -> Logarithmieren -> Logarithmus

 ^(3)'w() =? -> lg( ^(3)'w(5)) =1/3 \*lg(5) ~~

^(3)'w() =? -> Wurzelziehen -> 1,71

lg( ^(3)'w(5)) =1/3 \*lg(5) ~~ -> Dividieren -> ~~0,699 /3 =0,233 -> Entlogarithmieren 10^(0,233) -> 1,71

j-21 - Exponential- und Logarithmusfunktion

##-Beispiel 1.22: Rechnen mit Logarithmen

a) lg(3 \*x \*z) =lg(3) +lg(x) +lg(z)

b) lg(x/(2 \*y)) =lg(x) -lg(2 \*y) =lg(x) -lg(2) -lg(y)

c) lg((2 \*x^3)/(5 \*y)) =lg(2) +3 \*lg(x) -lg(5) -lg(y)

d) lg ^(3)'w(x^5) =lg(x^(5/3)) =5/3 \*lg(x)

e) lg((10 \*x)/(x -1)) =lg(10 \*x) -lg(x -1) =lg(10) +lg(x) -lg(x -1) =1 +lg(x) -lg(x -1)

-----

lg(10) =1

----------

##-Beispiel 1.23: Rechnen mit Logarithmen

a) lg(4 \*10^(3 \*x -4)) =lg(4) +lg(10^(3 \*x -4)) =lg(4 +3 \*x -4)

b) ln(y\_0 \*'e(-A \*t)) =ln(y\_0) +ln('e^(-A \*t)) =ln(y\_0) -A \*t

c) log\_5(5 \*5^(5 \*x -5)) =log\_5(5) +log\_5(5^(5 \*x -5)) =1 +5 \*x -5 =5 \*x -4

-----

Zur Erinnerung:

log\_a(a^n) =n

ln('e^n) =n

lg(10^n) =n

----------

##-Beispiel 1.24: Zusammenfassen zu einem Logarithmus

a) ln(a) +ln(b) -ln(1) -ln(c) =In((a \*b)/c)

-----

b) 3 \*ln(x -1/2) \*ln(2 +3) =ln(x^3) -ln^(1/2) +ln('e^3) =ln((x^3 \*'e^3)/('w(2))) =ln(('e \*x)^3)/('w(2)))

-----

c) -lg(5) -lg(x) =lg(1/(5 \*x))

-----

d) 3/4 \*lg(x) +1/4 \*lg(x -y) -2 \*lg(x +y) =lg((x^(3/4) \*(x -y)^(1/4))/((x +y)^2) =lg(( ^(4)'w(x^3 \*(x -y)))/(x +y)^2))

-----

e) 2 \*lg(x) -lg(3) +3 \*lg(y) -lg(10) =lg((x^2 \*y^3)/(30))

-----

log\_a(1) =0

ln('e) =1

----------

##-Beispiel 1.25: Einfache Berechnungen mit Logarithmen

Berechnen Sie ohne Technologie.

a) lg(0,0001) +4 \*ln('e) =-4 +4 =0

b) 3 \*ln('e^2) +lg(0,01) -log\_4(1) =3 \*2 -2 -0 =4

c) log\_3(1) +log\_3('w(3)) -log\_3(9) =0 +1/2 -2 =-3/2 =-1,5

----------

|Besonderheiten bei Logarithmen|

* log(u -v) lässt sich im Allgemeinen nicht vereinfachen.
* (log(u))/(log(v)) lässt sich im Allgemeinen ebenfalls nicht vereinfachen.

Aber: (log(8))/(log(8)) =(log(2^3))/(log(2)) =(3 \*log(2))/(log(2)) =3

* lg(-2) existiert nicht. Aber lg(x) =-2 <=> x =0,01.
* 2/3 =lg(10^(2/3)) =ln('e^(2/3)) =log\_a(a^(2/3)) =... Man kann mit beliebiger Basis fortsetzen.

0,714 =lg(10^(0,714)) =ln('e^(0,714)) =... Man kann mit beliebiger Basis fortsetzen.

j-22 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

#### \*\*-1.1.5 Exponentialgleichungen

In der Folge werden allgemeine Exponentialgleichungen vom Typ a^(k \*x) =b betrachtet und mithilfe des Logarithmus nach x aufgelöst.

Dazu wird die Umkehrbarkeit des Logarithmierens verwendet.

Es gilt: u =v <=> log\_a(u) =log\_a(v) für u, v 'el 'R^+

----------

|Satz: Logarithmieren ist eine Äquivalenzumformung|

Wird eine Gleichung auf beiden Seiten logarithmiert, dann ändert sich die Lösungsmenge nicht.

Das Logarithmieren ist eine |Äquivalenzumformung|.

----------

##-Beispiel 1.26: Einfache Berechnungen mit Logarithmen

Lösen Sie die Exponentialgleichung 2x =5.

2^x =5 | lg

lg(2^x) =lg(5)

x \*lg(2) =lg(5)

x =(lg(5))/(lg(2))

x ~~2,3219

L ={2,3219}

oder

2^x =5 | ln

ln(2^x) =ln(5)

x \*ln(2) =ln(5)

x =(ln(5))/(ln(2))

x ~~2,3219

L ={2,3219}

----------

##-Beispiel 1.27: Bevölkerungsentwicklung (Fortsetzung von 1.17)

Für die Bevölkerung einer Stadt mit einer Million Einwohnern wird eine jährliche Wachstumsrate von i =3 % angenommen.

Ermitteln Sie, wie lange es dauert, bis sich die Bevölkerung verdoppelt hat.

Die Funktion mit der Gleichung y =1,03^x beschreibt das Bevölkerungswachstum.

Gesucht ist der x-Wert, für den der Funktionswert 2 ergibt.

1,03^x =2 | ln

x \*ln(1,03) =ln(2)

x =(ln(2))/(ln(1,03)) ~~23,45

Die Bevölkerung einer Stadt verdoppelt sich bei einer jährlichen Wachstumsrate von 3 % nach ca. 23,5 Jahren.

----------

Hinweis: Es ist mathematisch gleich, welchen Logarithmus zu welcher Basis Sie zur Lösung der Gleichung verwenden.

Sinnvoll ist allerdings die Verwendung eines Logarithmus, der auch auf Ihrer elektronischen Rechenhilfe zur Verfügung steht.

Allgemein gilt für die Verdoppelungszeit T:

T =(ln(2))/(ln(1 +i)) =(ln(2))/(lg(1 +i))

----------

##-Beispiel 1.28: Exponentialgleichung mit verschiedenen Basen

Berechnen Sie die Lösungsmenge.

10^(5 \*x -2) =3 \*7^(2 \*x +3) | lg

5 \*x -2 =lg(3) +(2 \*x +3) \*lg(7)

5 \*x -2 =lg(3) +2 \*x \*lg(7) +3 \*lg(7) |-2 \*x \*lg(7) +2

5 \*x -2 \*x \*lg(7) =lg(3) +3 \*lg(7) +2

x \*(5 -2 \*lg(7)) =lg(3) +3 \*lg(7) +2

x =(lg(3) +3 \*lg(7) +2)/(5 -2 \*lg(7)) ~~1,5144

L ={1,5144}

----------

##-Beispiel 1.29: Nicht lösbare Exponentialgleichung

Berechnen Sie die Lösungsmenge.

2^x =-5 G =D ='R

L ={} da -5 \'el 'R^+.

2^x stellt nur Werte aus 'R^+ dar.

j-23 - Exponential- und Logarithmusfunktion

##-Beispiel 1.30: Näherungsweise lösbare Exponentialgleichung - grafische Lösung und Lösung mit Technologie

Mit dem GTR können der Links- und der Rechtsterm der Gleichung 2^(2x -1) +5^(3x -2) =3^(x +1) als Funktionen definiert und grafisch dargestellt werden. Mit Intersection lässt sich der Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen ermitteln.

x ~~1,088

L ={1,088}

S(1,088|9,916)

----------

##-Beispiel 1.31: Logarithmen mit dem GTR

log\_5(7) =?

log\_5(7) =x <=> 5^x =7 |lg

<=> x \*lg(5) =lg(7)

x =(lg(7))/(lg(5)) ~~1,20906

oder

5^x =7 |ln

<=> x \*ln(5) =ln(7)

x =(ln(7))/(ln(5)) ~~1,20906

x =log\_5(7) ~~1,20906

Es gilt: log\_5(7) =(lg(7))/(lg(5)) =(ln(7))/(ln(5))

----------

|Satz: Umrechnung zwischen Logarithmen (mit verschiedenen Basen)|

log\_a(b) =(lg(b))/(lg(a)) =(ln(b))/(ln(a))

a 'el 'R^+ \ {1}, b 'el 'R^+

-----

log\_a(b) =(lg(b))/(lg(a)) =(ln(b))/(ln(a))

----------

Mit dieser Umrechnungsformel können Sie Logarithmen mit beliebiger Basis auf dem GTR mithilfe des dekadischen und des natürlichen Logarithmus berechnen.

#### \*\*-1.1.6 Logarithmusfunktion

|Definition: Logarithmusfunktion|

Die Funktion mit y =log\_a(x) a 'el 'R^+ \ {1} heißt Logarithmusfunktion zur Basis a.

Die |Definitionsmenge| der Logarithmusfunktion ist 'R^+, da Logarithmenwerte nur für positive Numeri existieren.

Die |Wertemenge| der Logarithmusfunktion zur Basis a ist 'R, da sich alle reellen Zahlen als Potenzen zur Basis a darstellen lassen. Die Wertemenge besteht aus den Exponenten dieser Potenzen.

----------

Hinweis: Logarithmen gibt es nur für positive x-Werte.

Die Logarithmusfunktion ist somit nur für x >0 definiert.

----------

|Satz: Logarithmusfunktion als Umkehrung der Exponentialfunktion|

Die Logarithmusfunktion mit y =log\_a(x) ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion gleicher Basis mit y =a^x. a 'el 'R^+ \ {1}

----------

Begründung: y =a^x <=> x =log\_a(y)

Die Berechnung der Umkehrfunktion erfolgt durch Vertauschen der Variablen in der Zuordnungsvorschrift der Exponentialfunktion f mit y =a^x:

x =a^y <=> y =log\_a(x)

Für die direkte Berechnung von Funktionswerten verwendet man:

y =log\_a(x) =(lg(x))/(lg(a)) =(ln(x))/(ln(a))

-----

f(x) =a^x

f^(-1)(x) =log\_a(x)

j-24 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-Beispiel 1.32: Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

Zeichnen Sie den Graphen der Exponentialfunktion mit y =3^x und spiegeln Sie ihn an der Geraden mit der Gleichung y =x.

Somit erhalten Sie den Graphen der entsprechenden Logarithmusfunktion.

x | y =3^x

-2 | 1/9

-1 | 1/3

0| 1

1 | 3

2 | 9

-----

x | y =log\_3(x)

1/9 | -2

1/ 3 | -1

1 | 0

3 | 1

9 | 2

Die Funktion mit y =log\_3(x) ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion mit y =3^x.

----------

|Eigenschaften der Logarithmusfunktion mit y =log\_a(x)|

Die Graphen der Logarithmusfunktionen x -> y =log\_a(x) mit a 'el 'R^+ \ {1}

D ='R^+, W ='R

* verlaufen rechts von der y-Achse, weil Logarithmusfunktionen nur für x >0 definiert sind.
* haben die y-Achse als Asymptote.
* sind monoton steigend für a >1.
* sind monoton fallend für 0 <a <1.
* haben als einzigen Punkt (1|0) gemeinsam, da log\_a(1) =0.
* verlaufen durch den Punkt (a|1), da log\_a(a) =1.

----------

##-Beispiel 1.33: Ermittlung des Funktionsterms

Gegeben ist der Graph der Logarithmusfunktion von der Form f(x) =log\_a(x).

Ermitteln Sie aus der Grafik die Werte von a und schreiben Sie den Funktionsterm an. Erklären Sie Ihre Vorgangsweise.

a) Aus dem x-Wert des Punktes mit y =1 erhalten Sie den Wert für die Basis: a =3

Die Gleichung der dargestellten Logarithmusfunktion lautet somit:

f(x) =log\_3(x)

-----

b) Aus dem x-Wert des Punktes mit y =1 erhalten Sie den Wert für die Basis: a =0,5

Die Gleichung der dargestellten Logarithmusfunktion lautet somit:

f(x) =log\_(0,5)(x)

-----

Die Logarithmusfunktion ist nur für x >0 definiert.

Der Graph der Logarithmusfunktion mit y =log\_a(x) erläuft durch den Punkt (a|1).

f(x) =a^x

f^(-1)(x) =log\_a(x)

j-25 - Exponential- und Logarithmusfunktion

##-Beispiel 1.34: Dämpfung

Für die Übertragung von Signalen werden häufig Lichtwellenleiter (Glasfaserkabel) verwendet. Dabei werden die Signale in Lichtwellen umgesetzt und durch ca. 0,05 mm dicke Glasfasern geschickt. Allerdings treten auch in den Glasfaserkabeln Verluste auf, die in der Technik als Dämpfung bezeichnet werden.

Die |Dämpfung D| wird in dB (Dezibel) angegeben und ist durch folgende Formel definiert:

D =10 \*lg((P\_(ein))/(P\_(aus)))

Dabei ist P\_(ein) die Lichtleistung am Eingang des Lichtwellenleiters und P\_(aus) die Lichtleistung am Ausgang des Lichtwellenleiters in Mikrowatt ('myW).

Die Dämpfung steigt mit der Länge des Lichtwellenleiters. Daher wird in der Praxis zum Vergleich verschiedener Lichtwellenleiter meist ein |Dämpfungswert pro Kilometer| D/L (in dB/km) angegeben.

-----

Unter Dämpfung versteht man den Verlust von Lichtenergie in einem Lichtwellenleiter. Die am Ausgang des Lichtwellenleiters ankommende Lichtenergie ist geringer als die am Eingang eingespeiste.

Das Dezibel (dB) ist ein logarithmisches Maß für die Dämpfung der transportierten Leistung.

-----

* Dämpfung in dB

D =10 \*lg((P\_(ein))/(P\_(aus)))

* Dämpfungswert in dB/km Dämpfungswert =D/L

Der Dämpfungswert gibt die Dämpfung für 1 km Leiterlänge an.

Für einen L km langen Leiter gilt:

Dämpfung =L \*Dämpfungswert

-----

a) Die Lichtleistung in einem Glasfaserkabel nimmt um 5 % pro km ab. P\_(ein) =1 'myW Berechnen Sie die Dämpfung für ein Kabel mit einer Länge von 1 km.

b) In einem Glasfaserkabel beträgt die Dämpfung 10 dB.

Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Lichtleistung abnimmt.

c) Ermitteln Sie, bei welcher Dämpfung sich die Lichtleistung eines 1 km langen Lichtleiters halbiert.

Ermitteln Sie bei welcher Dämpfung sich die Lichtleistung dieses Leiters viertelt.

d) Die Lichtleistung in einem Glasfaserkabel nimmt um 6 % pro km ab.

* Ergänzen Sie die fehlenden Werte der Tabelle für P\_(ein) =100 'myW.
* Stellen Sie die Dämpfung D in dB als Funktion der Leiterlänge L von 0 km bis 100 km grafisch dar.

Länge L des Lichtwellenleiters: 0 km

Ausgangsleistung P\_(aus) in 'myW: 100

Abnahmerate in % für die gesamte Leiterlänge L: 0

Dämpfung in dB

D =10 \*lg((100)/(P\_(aus))): 0

-----

Länge L des Lichtwellenleiters: 1 km

Ausgangsleistung P\_(aus) in 'myW: 100 \*(1 -0,06)^1 =94

Abnahmerate in % für die gesamte Leiterlänge L: (100 -94)/(100) =6 %

Dämpfung in dB

D =10 \*lg((100)/(P\_(aus))): 10 \*lg((100)/(94)) ~~0,269

-----

Länge L des Lichtwellenleiters: 2 km

Ausgangsleistung P\_(aus) in 'myW: 100 \*(1 -0,06)^2 ~~88,36

Abnahmerate in % für die gesamte Leiterlänge L: **[]**

Dämpfung in dB

D =10 \*lg((100)/(P\_(aus))): **[]**

-----

Länge L des Lichtwellenleiters: 3 km

Ausgangsleistung P\_(aus) in 'myW: **[]**

Abnahmerate in % für die gesamte Leiterlänge L: 16,94 %

Dämpfung in dB

D =10 \*lg((100)/(P\_(aus))): **[]**

-----

Länge L des Lichtwellenleiters: 10 km

Ausgangsleistung P\_(aus) in 'myW: **[]**

Abnahmerate in % für die gesamte Leiterlänge L: **[]**

Dämpfung in dB

D =10 \*lg((100)/(P\_(aus))): 2,69

-----

Länge L des Lichtwellenleiters: 100 km

Ausgangsleistung P\_(aus) in 'myW: **[]**

Abnahmerate in % für die gesamte Leiterlänge L: **[]**

Dämpfung in dB

D =10 \*lg((100)/(P\_(aus))): **[]**

-----

e) Zeigen Sie, dass der Zusammenhang zwischen Leiterlänge L in km und Dämpfung D in dB durch folgende Gleichung gegeben ist:

D(L) =L \*10 \*lg(1/(1 -i))

i ist die Abnahmerate pro km.

Kreuzen Sie an, welcher Zusammenhang zwischen Leiterlänge L und Dämpfung D des Glasfaserkabels besteht.

**[]** logarithmisch

**[]** exponentiell

**[]** linear

**[]** reziprok

f) Ermitteln Sie die Länge eines Glasfaserkabels mit einem Dämpfungswert von 1 dB/km, das die einfallende Lichtleistung um 90 % abschwächt.

g) Berechnen Sie die Lichtleistung am Ende eines 10 km langen Lichtwellenleiters mit einem Dämpfungswert von 2 dB/km, wenn eine Lichtleistung von 1 'myW eingespeist wird.

----------

Dämpfungswert =10 \*lg(1/(1 -i))

D(L) =L \*Dämpfungswert

Medium | Dämpfungswert in dB/km

Fensterglas | ca. 50000

optisches Glas| ca. 3000

Luft im Stadtgebiet| 10

Lichtwellenleiter| <3

-----

Lösung:

a) P\_(aus) =95 'myW

D =10 \*lg((P\_(ein))/(P\_(aus))) =10 \*lg((100)/(95)) ~~0,2228

Die Dämpfung beträgt ca. 0,2228 dB.

-----

(P\_(ein))/(P\_(aus)) | Dämpfung D

10^0 | 0 dB

10^1 | 10 dB

10^2 | 20 dB

10^3 | 30 dB

10^n | 10 \*n dB

j-26 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-Beispiel 1.34: Dämpfung (Fortsetzung)

b) 10 =10 \*lg((P\_(ein))/(P\_(aus))) |/10

1 =lg((P\_(ein))/(P\_(aus))) | Entlogarithmieren zur Basis 10

10 =(P\_(ein))/(P\_(aus))

P\_(aus) =0,1 \*P\_(ein)

Die Lichtleistung nimmt um 90 % ab.

-----

Zur Erinnerung:

a^(log\_a(b)) =b

10^(lg(b)) =b

-----

Faustregel: Bei einer Dämpfung von 3 dB ist die Ausgangsleistung halb so groß wie die Eingangsleisung.

-----

c) D =10 \*lg((P\_(ein))/(P\_(aus))) =10 \*lg =10 \*lg((P\_(ein))/(0,5 \*P\_(aus))) =10 \*lg(2) ~~3,01

Bei einer Dämpfung von D ~~3 dB halbiert sich die Lichtleistung pro km Lichtwellenleiter.

Der Dämpfungswert beträgt ca. 3 dB/km.

Bei 6 dB/km viertelt sich die Lichtleistung.

-----

d)

Länge: 0 km

Ausgangsleistung P\_(aus) in 'myW: 100

Abnahmerate in % für die gesamte Leiterlänge L: 0

Dämpfung in dB

D =10 \*lg((100)/(P\_(aus))): 0

-----

Länge: 1 km

Ausgangsleistung P\_(aus) in 'myW: 100 \*(1 -0,06)^1 =94

Abnahmerate in % für die gesamte Leiterlänge L: (100 -94)/(100) =6 %

Dämpfung in dB

D =10 \*lg((100)/(P\_(aus))): 10 \*lg((100)/(94)) ~~0,269

-----

Länge: 2 km

Ausgangsleistung P\_(aus) in 'myW: 100 \*(1 -0,06)^2 ~~88,36

Abnahmerate in % für die gesamte Leiterlänge L: (100 -88,36)/(100) =11,64 %

Dämpfung in dB

D =10 \*lg((100)/(P\_(aus))): 10 \*lg((100)/(88,36)) ~~0,537

-----

Länge: 3 km

Ausgangsleistung P\_(aus) in 'myW: 83,06

Abnahmerate in % für die gesamte Leiterlänge L: 16,94 %

Dämpfung in dB

D =10 \*lg((100)/(P\_(aus))): 0,806

-----

Länge: 10 km

Ausgangsleistung P\_(aus) in 'myW: 53,86

Abnahmerate in % für die gesamte Leiterlänge L: 46,14 %

Dämpfung in dB

D =10 \*lg((100)/(P\_(aus))): 2,69

-----

Länge: 100 km

Ausgangsleistung P\_(aus) in 'myW: 100 \*(1 -0,06)^(100) ~~0,206

Abnahmerate in % für die gesamte Leiterlänge L: (100 0,206)/(100) ~~99,79 %

Dämpfung in dB

D =10 \*lg((100)/(P\_(aus))): 10 \*lg((100)/(0,206) ~~26,87

-----

e) D(L) =10 \*lg((P\_(ein))/(P\_(aus))) =10 \*lg((P\_(ein))/(P\_(ein) \*(1 -i)^L)) =

=10 \*lg(1/((1 -i)^L)) =10 \*lg((1/(1 -i))^L)

D(L) =L \*10 \*lg(1/(1 -i))

Der Zusammenhang zwischen Leiterlänge L und Dämpfung D des Glasfaserkabels ist |linear|.

Dämpfung =Dämpfungswert \*L

Das heißt, doppelte Leiterlänge ergibt die doppelte Dämpfung.

L-fache Leiterlänge ergibt die L-fache Dämpfung.

-----

f) P\_(aus) =0,1 \*P\_(ein).

Dämpfung =Dämpfungswert \*L

10 \*lg((P\_(ein))/(0,1 \*P\_(ein))) =2 \*L

10 \*lg(10) =2 \*L

10 =2 \*L

L =5

Der Lichtwellenleiter ist 5 km lang.

-----

g) Dämpfungswert =2 dB/km

Dämpfung =Dämpfungswert \*L =2 \*10 =20

Dämpfung D =20 dB

20 =10 \*lg(1/(P\_(aus))) <=> 2 =lg(1/(P\_(aus))) <=> 10^2 =1/(P\_(aus))

P\_(aus) =1/(100)

Die Ausgangsleistung beträgt 0,01 'myW, d. h., 1/(100) der Eingangsleistung.

----------

Tipp: Der Dämpfungswert gibt die Dämpfung pro km Lichtwellenleiter an.

Dämpfungswert =10 \*lg (1/(1 -i))

Dämpfung =Dämpfungswert \*L

j-27 - Übungsaufgaben

##### \*\*-Übungsaufgaben

##-1.001 In der Randspalte ist der Graph der Exponentialfunktion mit y =2^x dargestellt.

Lesen Sie aus dem Graphen die Werte 2^(0,5), 2^(0,7), 2^(1,8) und 2^(-2) ab.

{{Grafik: Nicht darstellbar.}}

----------

##-1.002 Zeichnen Sie den Graphen der Exponentialfunktion f mit f(x) =a^x.

a) für a =10

b) für a =3

c) für a ='e

Wählen Sie für die Grafik geeignete Einheiten.

----------

##-1.003 Stellen Sie grafisch dar:

a) y =-2^x

b) y =-(1/2)^x

c) y =-2^(-x)

d) y =(1/3)^(-x)

e) y ='e^(-x^2)

f) y =2 \*'e^(-x)

----------

##-1.004 Ordnen Sie die gegebenen Funktionsgleichungen den entsprechenden Graphen zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

{{Grafik: Nicht darstellbar.}}

f\_1(x) =3^x

f\_2(x) =-2 \*3^x

f\_3(x) =-2 \*3^x +2

f\_4(x) =0,5 \*3^x

----------

##-1.005 Gegeben sind Funktionen f mit f(x) =a^x und Funktionen g mit g(x) =c \*a^x +d.

Schreiben Sie die Werte von c und d an.

Zeichnen Sie die Graphen von f und g in ein Koordinatensystem.

Ermitteln Sie jeweils die Funktionswerte f(0), f(1), g(0) und g(1). Vergleichen Sie die Auswirkungen von c und d auf den Verlauf der Funktion g im Vergleich zu f.

a) f(x) =10^x; g(x) =3 \*10^x

**[]**

b) f(x) =3^x; g(x) =3^x +1

**[]**

c) f(x) =3^x; g(x) =1/(10) \*3^x +2

**[]**

-----

Hinweis: a^(-x) =(1/a)^x

----------

##-1.006 Zeichnen Sie die Graphen von f und g in ein Koordinatensystem.

f(x) =2^x; g(x) =2^(x -1)

Vergleichen Sie die beiden Funktionsgraphen hinsichtlich Ihrer Lage und beschreiben Sie die Änderungen für den Graphen von g in Bezug auf f.

----------

##-1.007 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f\_1, f\_2 und f\_3 mit

f\_1(x) =2^x, f\_2(x) =x^2 und f\_3(x) =x^3 in ein Koordinatensystem.

Wählen Sie für den Definitionsbereich jeweils das Intervall:

a) D =[-3; 3]

**[]**

b) D =[-1; 10]

**[]**

c) D =[-5; 25]

**[]**

Welche Funktion steigt schließlich am stärksten?

j-28 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-1.008 In der Randspalte ist der Graph der Exponentialfunktion mit y =2^x dargestellt.

{{Grafik: Nicht darstellbar.}}

Lesen Sie die Lösungen der nachstehenden Gleichungen aus dem Graphen ab.

a) 2^x =3

b) 2^x =4,5

c) 2^x =8,4

d) 2^x =11,3

----------

##-1.009 Zeichnen Sie die Graphen der Exponentialfunktion mit y =a^x. Lesen Sie die Lösung der nachstehenden Gleichungen aus dem zugehörigen Graphen ab.

a^x =3; a^x =4,5; a^x =8,4; a^x =11,3; a^x =10

a) für a =10

b) für a =3

c) für a ='e

Wählen Sie für die Grafik geeignete Einheiten.

----------

##-1.010 Der Punkt P(1,5|8) liegt auf dem Graphen der Exponentialfunktion mit f(x) =a^x.

a) Ermitteln Sie die Basis a.

**[]**

b) Berechnen Sie die fehlenden Koordinaten der Punkte Q(2|y\_1) und R(x\_2|2) dieses Graphen.

**[]**

c) Stellen Sie die Funktion grafisch dar und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse.

**[]**

----------

##-1.011 Ergänzen Sie die beiden Funktionsterme für f\_1 und f\_3 aus den letzten beiden Zeilen und die fehlenden Werte der Exponentialfunktionen mit y =a^x.

x | f\_1(x) =**[]** | f\_2(x) =2^x| f\_3(x) =**[]** | f\_4(x) =10^x

-3 | **[]** | **[]** | **[]** | **[]**

**[]** | **[]** | 0,25 | **[]** | **[]**

**[]** | **[]** | **[]** | **[]** | 0,1

0 | **[]** | **[]** | **[]** | **[]**

2 | 2,25 | **[]** | **[]** | **[]**

3 | **[]** | **[]** | 27 | **[]**

-----

##-1.012 Ermitteln Sie die Lösungsmenge ohne Logarithmus:

a) 2^x =16

**[]**

b) 2^x =0,25

**[]**

c) 2^x =1

**[]**

d) 2^x = ^(3)'w(4)

**[]**

e) 6^x =216

**[]**

f) 32^x =4

**[]**

g) 25^x =1/(125)

**[]**

h) 125^x =25

**[]**

i) 625^x =1/5

**[]**

j) (1/(25))^x =1/5

**[]**

k) (1/(36))^x =6^3

**[]**

l) (1/3)^x ='w(3)

**[]**

m) (1/3)^x = ^(4)'w(27)

**[]**

n) 10^x = ^(7)'w(100^3)

**[]**

Begründen Sie, warum diese Exponentialgleichungen ohne Logarithmus gelöst werden können.

----------

Zur Erinnerung:

1/(a^n) =a^(-n) =

 ^(n)'w(a^m) =a^(m/n)

a^u =a^v <=> u =v

----------

##-1.013 Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit Intervallschachtelung:

a) Ein Kapital von € 10.000,00 verzinst sich zu i =10 %.

Ermitteln Sie, nach wie vielen Jahren es sich verdoppelt hat.

**[]**

b) Eine Bakterienkultur wächst täglich um 25 %.

Berechnen Sie, nach welcher Zeit sie sich vervierfacht hat.

**[]**

c) Nach einer Operation bekommt ein Patient 2,5 mg eines Schmerzmittels verabreicht. Vom Körper werden stündlich jeweils 15 % dieses Schmerzmittels abgebaut.

Berechnen Sie, nach wie vielen Stunden die Restmenge 1 mg beträgt.

**[]**

----------

##-1.014 Vervollständigen Sie folgende Tabelle:

... | a) | b) | c)

Potenz | 2^4 =16 | **[]** | **[]**

Wurzel | **[]** | 'w(9) =3 | **[]**

Logarithmus | **[]** | **[]** | log\_5(125) =3

-----

... | d) | e) | f)

Potenz | 10^3 =1000 | **[]** | **[]**

Wurzel | **[]** | ^(4)'w(27) =3 | **[]**

Logarithmus | **[]** | **[]** | log\_7(49) =2

-----

Tipp:

3^4 =81 | a^n =b

3 = ^(4)'w(81) | a = ^(n)'w(b)

4 =log\_3(81) | n =log\_a(b)

j-29 - Übungsaufgaben

##-1.015 Lesen Sie an den Graphen jeweils die Basis der dargestellten Logarithmusfunktionen ab.

{{Grafik: Nicht darstellbar.}}

----------

##-1.016 Berechnen und begründen Sie aufgrund der Definition des Logarithmus ohne Rechnerbenützung.

a) log\_2(16)

**[]**

b) log\_6(1)

**[]**

c) log\_(10)(0,1)

**[]**

d) log\_3(1/9)

**[]**

-----

Berechnung und Begründung:

log\_3(81) =4, weil 3^4 =81

----------

##-1.017 Berechnen und begründen Sie ohne Rechnerbenützung.

a) lg(100)

**[]**

b) lg(10000)

**[]**

c) lg(10)

**[]**

d) lg(1)

**[]**

e) lg(0,001)

**[]**

f) lg(0,00001)

**[]**

g) lg( ^(7)'w(100^3))

**[]**

h) lg( ^(4)'w(0,1))

**[]**

-----

lg(x) =log\_(10)(x)

----------

##-1.018 Schreiben Sie als Zehnerpotenz:

a) 0,75 **[]**

b) 2,34 **[]**

c) 17,22 **[]**

d) 200 **[]**

Interpretieren Sie bei Ihren Lösungen jeweils den Exponenten in Bezug auf sein Vorzeichen.

-----

Anleitung zu 1.018:

10^x =0,9

x =lg(0,9) ~~-0,04576

10^(-0,04576) ~~0,9

negativ, da 0,9 <1

----------

##-1.019 Zerlegen Sie in Terme mit einfachsten Numeri:

a) lg(100 \*a)

**[]**

b) lg(a/(10))

**[]**

c) lg(10^a)

**[]**

d) lg(a^(10))

**[]**

e) lg('w(a))

**[]**

f) lg( ^(10)'w(10))

**[]**

g) lg( ^(10)'w(a))

**[]**

h) lg( ^(a)'w(10))

**[]**

i) lg(1/a)

**[]**

j) lg(1/(10))

**[]**

k) lg(a^2 \*b)

**[]**

l) lg(a \*b^n)

**[]**

m) lg(a \*b)^n

**[]**

n) lg((a^n)/b)

**[]**

o) lg(a/(b^n))

**[]**

p) lg(a/b)^n

**[]**

q) lg[a \*(b -10)]

**[]**

r) lg[10a \*(b -1)]

**[]**

s) lg((a^2 \*b^3)/(1000 \*c))

**[]**

t) lg((1000 \*a^(-3))/(b^2))

**[]**

-----

lg(u \*v) =lg(u) +lg(v)

lg(u/v) =lg(u) -lg(v)

lg(u^v) =v \*lg(u)

----------

##-1.020 Stellen Sie mit einfachsten Numeri dar:

a) lg(2 \*x^2 -8)

**[]**

b) lg((4 \*x^2 -16)/(y^2))

**[]**

c) lg((a +b)/(a -b))

**[]**

d) lg(0,1 \*a^(n -1))

**[]**

e) lg((0,1 \*a)^(n -1))

**[]**

f) lg(0,1^(n -1) \*a)

**[]**

g) lg(a \*'w(b))

**[]**

h) lg(b \*'w(a))

**[]**

i) lg('w(a \*b))

**[]**

j) lg( ^(5)'w(a \*b^2))

**[]**

k) lg( ^(n)'w(0,01 \*a))

**[]**

l) lg(((a^3)/(b -1))^2)

**[]**

----------

##-1.021 Ermitteln Sie unter Verwendung der Rechenregeln für Logarithmen.

a) log\_5(5^(2 \*x))

**[]**

b) log\_2(2^3 \*t)

**[]**

c) lg\_(10^(0,2 \*x))

**[]**

d) ln('e^(-0,3 \*t))

**[]**

e) ln('e^(-k \*t))

**[]**

f) ln('e^(-(ln(2))/(9,7) \*t))

**[]**

g) ln[2 \*('e^(-0,3 \*t))]

**[]**

h) ln[y\_0 \*('e^(-k \*t))]

**[]**

----------

##-1.022 Drücken Sie durch einen Logarithmus aus:

a) lg(x) +lg(y) =**[]**

b) lg(x) -lg(y) =**[]**

c) lg(x) -2 \*lg(y) -lg(4) =**[]**

d) lg(x) +1 =**[]**

e) lg(x) -2 =**[]**

f) lg(x) +1 -lg(y) =**[]**

g) 2 \*lg(x) -3 \*lg(y) -lg(z) -1 =**[]**

h) 1/2 \*lg(x) -2 \*lg(y) -1/2 \*lg(z) =**[]**

i) 1/3 \*lg(x -y)+1/3 \*lg(x +y) -1/3 \*lg(x -1) =**[]**

j) 1/4 \*[lg(a -2) \*lg(b +3) \*lg(c) -lg(a -b)] =**[]**

j-30 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-1.023 Ermitteln Sie die Definitionsmenge des Terms und argumentieren Sie Ihre Entscheidung.

a) lg(2 -x)

**[]**

b) lg(1/(1 -x))

**[]**

c) lg(x -3)

**[]**

d) lg(x^2 -4)

**[]**

-----

Hinweis: Der Logarithmus lg(b) ist nur für b >0 definiert.

----------

##-1.024 Lösen Sie in 'R^+\_0:

a) log\_x(16) =2

**[]**

b) log\_x(100000) =5

**[]**

c) log\_x(81) =2

**[]**

d) log\_4(x) =3

**[]**

----------

##-1.025 Ermitteln Sie die Lösungsmenge in 'R:

a) lg(x) =0,2148

**[]**

b) lg(237,2) =x

**[]**

c) lg(0,025) =x

**[]**

d) lg(z) =2,2345

**[]**

e) lg(x) =-0,726

**[]**

-----

x =log\_a(b) <=> a^x =b

x =lg(b) <=> 10^x =b

----------

##-1.026 Ermitteln Sie die Lösungsmenge.

Schreiben Sie die Lösung jeweils als Zehnerpotenz:

a) lg(x) =0,5

**[]**

b) lg(z) =4,27

**[]**

c) lg(x) =-4,23

**[]**

d) log\_3(x) =0,5

**[]**

----------

##-1.027 Ordnen Sie die Buchstaben der Lösungen den jeweiligen Aufgaben zu. Welches Lösungswort ergibt sich von oben nach unten gelesen?

Lösung:

2 -1/2 \*lg(a) -3/2 \*lg(b) | A

1/2 +3/2 \*lg(a) -5/2 \*lg(b) | C

-5/2 \*lg(a) -5/2 \*lg(b) | E

3 +3/4 \*lg(a) +1/4 \*lg(b) | G

-1/2 +3/2 \*lg(a) +1/2 \*lg(b) | G

3 -1/4 \*lg(a) -3/4 \*lg(b) | H

1/2 +1/2 \*lg(a) +1/2 \*lg(b) | M

-(11)/2 \*lg(a) -5/2 \*lg(b) | T

-1/2 +1/2 \*lg(a) -1/2 \*lg(b) | T

2 -5/2 \*lg(a) -3 \*lg(b) | U

Aufgabe:

a) lg =((a^2 \*b)/('w(10 \*a \*b)) =**[]**

b) lg((100 \*'w(a))/((a \*b)^3) =**[]**

c) lg(a/b \*'w(b/(10 \*a))) =**[]**

d) lg(1000 \* ^(4)'w(a^3 \*b)) =**[]**

e) lg(1/(a^2 \*'w(a \*b^5)) =**[]**

f) lg('w(10 \*a \*b)) =**[]**

g) lg((100)/('w(a \*b^3))) =**[]**

h) lg('w((10 \*a^3)/(b^5))) =**[]**

i) lg((1000)/( ^(4)'w(a \*b^3))) =**[]**

j) lg('w(a \*b)/((a^2 \*b)^3)) =**[]**

Lsg.: **[]**

----------

##-1.028 Berechnen Sie ohne Rechner:

a) 5 \*log\_3(3) -lg(10^6)

**[]**

b) 3 \*log\_2(1) +log\_7(7^3)

**[]**

c) 3 \*log\_5(5) -lg(1000)

**[]**

d) log\_2(1) +log\_2(2^6)

-----

log\_a(a) =1, weil a^1 =a

log\_a(1) =0, weil a^0 =1

----------

##-1.029 Lösen Sie in 'R und führen Sie die Probe aus:

a) 3^x =14

**[]**

b) 3 \*2^x =10

**[]**

c) 2^(x -7) =3^(2x -4)

**[]**

d) 5^(2x -1) =3^(x +3)

**[]**

e) 4^(3 -4x) =5^(2x +1)

**[]**

f) 3^(2x) =5^(3x -1)

**[]**

g) 5 \*3^(5 -x) =10^(x/2)

**[]**

h) 2 \*3^(2 -x) =3 \*2^x

**[]**

----------

##-1.030 Lösen Sie in 'R^+\_0:

a) x^3 =729

**[]**

b) 3^x =729

**[]**

c) x^6 =216

**[]**

d) 6^x =216

**[]**

e) x^2 =256

**[]**

f) 2^x =256

**[]**

g) log\_2(x) =3

**[]**

h) log\_x(81) =4

**[]**

----------

##-1.031 Lösen Sie grafisch:

a) 2^x =5 -x^2

**[]**

b) 1,5^x =-1 +2x

**[]**

c) 1,1^x =x^2

**[]**

d) 1,1^x =x^3

**[]**

Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg durch eine Skizze.

j-31 - Übungsaufgaben

##-1.032 Ordnen Sie die Buchstaben der Lösungen den jeweiligen Aufgaben zu.

Welches Lösungswort ergibt sich von oben nach unten gelesen?

Lösung:

1,0584 | A

1,8340 | B

2,7856 | I

2,0293 | I

-0,3535 | M

0,3317 | O

-1,1962 | R

0,9369 | S

1,0466 | S

2,0474 | V

Aufgabe:

a) 5/2 =3^(x -1) **[]**

b) 6 \*2^x =5^(-x/2) **[]**

c) 1/3 \*2^(-x) =7^(x -2) **[]**

d) 13 \*2^x =7^x **[]**

e) 3 \*5^(x -2) =7^(4 -x) **[]**

f) 5 \*2^(-x) =3^(2x -1) **[]**

g) 3 \*2^(1 -x) =1 \*5^(2x -1) **[]**

h) 1/3 \*7^(x/2 -2) =1/5 \*2^(-x) **[]**

i) 2^(x/2) =3/5 \*3^(-x) **[]**

j) 5^(3x -2) =2/7 \*3^(-x) **[]**

Lsg.: **[]**

----------

##-1.033 "Er (Hektor) musste wieder daran denken, was man über Lehrer und ihre Schüler sagt: Die Schüler hören die Hälfte von dem, was der Lehrer sagt, sie begreifen die Hälfte von dem, was sie gehört haben, und sie nutzen die Hälfte von dem, was sie behalten haben - also letzten Endes herzlich wenig. (...)" Gehen Sie dem "also letzten Endes herzlich wenig" genauer nach, indem Sie

a) den Text geeignet grafisch darstellen und mit Prozentangaben versehen und

**[]**

b) ausformulieren, wie viel Prozent des vom Lehrer gesagten - nach obiger Aussage - dessen Schüler nützen.

**[]**

c) Ermitteln Sie, wie viel Prozent es nur noch wären, wenn dieser Prozess zwei weitere Zwischenstufen (vor dem Nutzen) hätte.

**[]**

----------

##-1.034 Töne sind Verdichtungen der Luft. Diese Verdichtungen breiten sich als Schallwellen in der Umgebung aus. Der Schalldruck in einer Schallwelle ist die maximale Abweichung vom Normaldruck.

Der Schalldruckpegel L\_p ist ein Maß für die Lautstärke, mit der Töne und Geräusche empfunden werden.

Die Berechnungsformel für den Schalldruckpegel ist gegeben durch L\_p =20 \*lg(p/(2 \*10^(-5))

p Schalldruck einer Schallquelle in Pa (Pascal)

L\_p Schalldruckpegel in Dezibel (dB)

a) In einer Diskothek wird ein Schalldruck von 2 Pa gemessen.

Berechnen Sie den Schalldruckpegel.

**[]**

b) Ein TV-Gerät erzeugt bei Zimmerlautstärke in 1 m Entfernung einen Schalldruckpegel von ca. 60 dB.

Ermitteln Sie den Schalldruck p des TV-Gerätes.

**[]**

----------

2 \*10^(-5) Pascal (Pa) ist ein angenommener Referenzwert und entspricht dem Schalldruck für die Hörschwelle des Menschen bei einem Ton mit 1000 Hz.

Schallquelle | Entfernung | L\_p

Düsenflugzeug | 30 m | 150 dB

Drucklufthammer, Diskothek | 1 m | 100 dB

Pkw | 10 m | 60 - 80 dB

sprechender Mensch | 1 m | 40 - 60 dB

ruhiger Raum | 0 m | 20 - 30 dB

Blätter rauschen | 0 m | 10 dB

Hörschwelle | 0 m | 0 dB

j-32 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-1.035 Wirken mehrere Schallquellen mit unterschiedlichen Schalldruckpegeln L\_(p1), L\_(p2), L\_(p3), ..., L\_(pn) gleichzeitig zusammen, so addieren sich die Schalldruckpegel nach der Formel

L\_(ges) =10 \*lg(10^((L\_(p1))/(10)) +10^((L\_(p2))/(10)) +10^((L\_(p3))/(10)) +... +10^((L\_(pn))/(10)))

mit L\_(ges), L\_(p1), ..., L\_(pn) in Dezibel (dB)

a) Drei verschiedene Rasenmäher, die nebeneinander mit laufenden Motoren stehen, erzeugen Schalldruckpegel (gemessen in 10 m Entfernung) von L\_(p1) =70 dB, L\_(p2) =65 dB und L\_(p3) =80 dB.

Berechnen Sie den Gesamtschalldruckpegel L\_(ges) der drei Mäher.

**[]**

-----

b) Drei gleichartige Rasenmäher stehen nebeneinander mit laufenden Motoren. Jeder der Rasenmäher erzeugt für sich einen Schalldruckpegel (gemessen in 10 m Entfernung) von jeweils L\_p =75 dB.

Berechnen Sie den Gesamtschalldruckpegel L\_(ges) der drei Rasenmäher. Ermitteln Sie auch die Zunahme des Schalldruckpegels 'De L, wenn man zuerst einen und danach alle drei Rasenmäher laufen lässt.

**[]**

-----

c) Zeigen Sie mithilfe der Formel für L\_(ges), dass bei n gleichartigen Schallquellen mit jeweils einem Schalldruckpegel L\_p gilt:

L\_(ges) =L\_p +10 \*lg(n).

**[]**

-----

d) Ermitteln Sie die Anzahl der Rasenmäher, die Sie benötigen, um den Schalldruckpegel um 20 dB zu erhöhen.

**[]**

----------

Anzahl der Mäher: 1

Gesamtschalldruckpegel: L\_1 =75 dB

-----

Anzahl der Mäher: 2

Gesamtschalldruckpegel: L\_(ges) ~~78 dB =L\_1 +3 dB

'De L ~~3 dB

-----

Anzahl der Mäher: 4

Gesamtschalldruckpegel: L\_(ges) ~~81 dB =L\_1 +6 dB

'De L ~~6 dB =2 \*3 dB

-----

Anzahl der Mäher: 8

Gesamtschalldruckpegel: L\_(ges) ~~84 dB =L\_1 +9 dB

'De L ~~9 dB =3 \*3 dB

-----

Anzahl der Mäher: 10

Gesamtschalldruckpegel: L\_(ges) " 85 dB =L\_1 +10 dB

'De L ~~10 dB

-----

Faustregeln aus der Akustik: Eine Verdopplung gleichartiger Schallquellen erhöht den Schalldruckpegel um ca. 3 dB.

Für L\_p >40 gilt:

'De L =1 dB ist kaum wahrnehmbar

'De L =3 dB ist deutlich wahrnehmbar

'De L =10 dB bewirkt einen doppelten Lautheitseindruck

Der Schalldruckpegel wird im Endergebnis auf ganzzahlige Werte gerundet.

----------

##-1.036 Für n gleichartige Schallquellen mit dem Schalldruckpegel L\_p in dB ergibt sich ein Gesamtschalldruckpegel L\_(ges)(n) =L\_p +10 \*lg(n).

a) Eine Faustregel aus der Akustik besagt: Die Verdopplung gleichartiger Schallquellen erhöht den Schalldruckpegel um ca. 3 dB.

Zeigen Sie die Richtigkeit dieser Faustregel.

**[]**

-----

b) Stellen Sie die Zunahme des Schalldruckpegels 'De L =10 \*lg(n) in Abhängigkeit von n grafisch für n <=20 dar.

Zeichnen Sie die Werte der Pegelzunahme für n =2, 4, 8 und 16 Schallquellen in der Grafik ein.

Welche Folgerung ziehen Sie aus den ermittelten Funktionswerten?

**[]**

----------

##-1.037 Laufen Signale durch Medien, verlieren diese Signale an Leistung, sie werden gedämpft.

Für die Dämpfung gilt: D =10 \*lg((P\_(ein))/(P\_(aus)))

D Dämpfung in dB (Dezibel)

P\_(ein) Leistung am Eingang des Mediums in mW (Milliwatt)

P\_(aus) Leistung am Ausgang des Mediums in mW (Milliwatt)

a) In einem Leiter nimmt die Leistung eines Signals von 10 mW auf 1 mW ab.

Berechnen Sie die Dämpfung D.

**[]**

b) In einem Kabel nimmt die Signalleistung pro Kilometer (km) um 3 dB ab. Ermitteln Sie die prozentuelle Abnahme der Signalleistung in einem 10 km langen Kabel.

**[]**

c) Zeigen Sie, dass sich in einem Kabel mit einer Dämpfung von 6 dB die Signalleistung etwa viertelt.

**[]**

----------

* Dämpfung in dB

D =10 \*lg((P\_(ein))/(P\_(aus)))

* Dämpfungswert in dB/km

Dämpfungswert =D/L

Der Dämpfungswert gibt die Dämpfung für 1 km Leiterlänge an.

Für einen L km langen Leiter gilt:

Dämpfung =Dämpfungswert \*L

j-33 - Wachstum und Zerfall

### \*\*-1.2 Wachstum und Zerfall

Wie Sie in den einführenden Beispielen am Beginn dieses Kapitels gesehen haben, treten Wachstums- und Zerfallsvorgänge in den verschiedensten Bereichen des täglichen Lebens auf.

----------

|Grundbegriffe|

|Bestand| y(t), N(t), A(t), h(t), T(t), Bestand zum Zeitpunkt t,

Populationsgröße, Bevölkerungszahl,

Anzahl von Elementen ...

-----

|Anfangsmenge| y\_0, y(0), N\_0, N(0), Anfangsgröße, Anfangsbestand, Startwert, Anzahl der Objekte zu Beobachtungsbeginn

-----

|Absolute Änderung| 'De y =y(t) -y(t -1)

absoluter Zuwachs, absolute Abnahme, absolute Änderung im Intervall [t -1; t]

-----

|Änderungsrate|

(y(t) -y(t -1))/(y(t -1))

Zuwachsrate, Abnahmerate, relativer Zuwachs, relative Änderung im Intervall [t -1; t]

----------

#### \*\*-1.2.1 Lineares Wachstum

##-Beispiel 1.35: Linearer Kapitalzuwachs

Clara hat in ihrem Sparstrumpf einen Betrag von € 100,00. Am Ende eines jeden Monats kommen € 20,00 dazu. Der Zeitschritt beträgt einen Monat.

Erstellen Sie eine Funktion y, die den Zusammenhang zwischen dem Geldbetrag im Sparstrumpf in Euro und der Zeit t in Monaten beschreibt.

y(0) =y\_0 =100

y(1) =y\_0 +1 \*20 =120

y(2) =y\_0 +2 \*20 =140

y(3) =y\_0 +3 \*20 =160

...

y(t) =y\_0 +t \*20

Berechnungsformel für das gesparte Geld nach t Monaten

----------

Vergleichen Sie die direkte Berechnungsformel mit der linearen Funktion y =k \*x +d.

----------

|Gleichung der linearen Wachstumsfunktion|

y(t) =y\_0 +t \*k mit t 'el 'R^+\_0

Erhöht sich in jedem Zeitschritt der Bestand um den konstanten Wert k (k >0), liegt eine lineare Zunahme vor.

Für k <0 liegt eine lineare Abnahme vor.

----------

#### \*\*-1.2.2 Exponentielles Wachstum

##-Beispiel 1.36: Exponentieller Kapitalzuwachs

Maria träumt von einem Sparbuch mit besonders hohen Zinsen. Zu einem Betrag von € 100,00 kommen am Ende eines jeden Jahres noch 20 % Zinsen dazu.

Erstellen Sie eine Funktion y, die den Zusammenhang zwischen dem angesparten Geldbetrag in Euro und der Zeit t in Jahren beschreibt (ohne Berücksichtigung der KESt). Überprüfen Sie, in welchem Verhältnis der jährliche absolute Zuwachs und der am Beginn des jeweiligen Jahres vorhandene Geldbetrag stehen.

j-34 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-Beispiel 1.36: Exponentieller Kapitalzuwachs (Fortsetzung)

i =20 % =0,2

y(0) =y\_0 =100

y(1) =y(0) +y(0) \*i =y\_0 \*(1 +i) =100 \*1,2 =120

y(2) =y(1) +y(1) \*i =y(1) \*(1 +i) =y\_0 \*(1 +i)^2 =100 \*1,2^2 =144

y(3) =y(2) +y(2) \*i =y(2) \*(1 +i) =y\_0 \*(1 +i)^3 =100 \*1,2^3 =1 72,8

y(t) =y(t -1) +y(t -1) \*i =y(t -1) \*(1 +i) =y\_0 \*(1 +i)t

...

y(t) =y\_0 \*(1 +i)t

Berechnungsformel für das gesparte Geld mit Zinsen und Zinseszinsen

'De y =y(t) -y \*(t -1) =y \*(t -1) \*(1 +i) -y \*(t -1) =i \*y(t -1)

Der jährliche absolute Zuwachs Ay und der am Beginn des jeweiligen Jahres vorhandene Geldbetrag y \*(t -1) sind proportional zueinander.

Der Proportionalitätsfaktor ist i.

----------

|Gleichung der exponentiellen Wachstumsfunktion|

y(t) =y\_0 \*(1 +i)^t mit t 'el 'R^+\_0

i (prozentuelle) Änderungsrate

i >0 exponentielle Zunahme

-1 <i <0 exponentielle Abnahme, Zerfall

1 +i Zuwachs- bzw. Abnahmefaktor

-----

Zunahme für 1 +i >1

Abnahme für 0 <1 +i <1

----------

Nehmen die Funktionswerte in gleichen Zeitschritten um den gleichen Prozentsatz i zu, liegt eine |exponentielle Zunahme| vor.

Nehmen die Funktionswerte in gleichen Zeitschritten um den gleichen Prozentsatz i ab, liegt eine |exponentielle Abnahme| vor.

-----

In wissenschaftlichen Arbeiten wird das exponentielle Wachstum meist in der Form y(t) =y\_0 \*'e^(k \*t) oder y(t) =y\_0 \*'e^('la \*t) dargestellt, die zu y(t) =y\_0 \*(1 +i)^t äquivalent ist.

'la: griechischer Buchstabe (sprich "lamda"), der dem deutschen "L" entspricht.

Durch einen Vergleich der Faktoren erkennt man folgenden Zusammenhang:

y(t) =y\_0 \*'e^('la \*t)

y(t) =y\_0 \*(1 +i)^t

Es gilt somit:

'e^('la) =1 +i

'e^('la) =1 +i

i ='e^('la) -1

'la =ln(1 +i)

-----

Zur Erinnerung: ln('e^('la)) ='la

----------

##-Beispiel 1.37: Bakterienwachstum

Eine bestimmte Bakterienart vermehrt sich bei 20 °C bei ausreichenden Raumverhältnissen um 30 % pro Stunde.

Am Beginn der Untersuchung werden 1000 Bakterien pro cm^3 gezählt.

a) Ermitteln Sie die Anzahl der Bakterien pro cm^3 nach einer, zwei, drei und t Stunden und stellen Sie die Wachstumsfunktion grafisch dar.

Anfangswert: y\_0 =1000

Zuwachsrate: i =30 % =0,3

Zuwachsfaktor: 1 +i =1 +0,3 =1,3

Wachstumsfunktion: y(t) =y\_0 \*(1 +i)^t =1000 \*1,3^t

j-35 - Wachstum und Zerfall

t | y(t)

0 | 1000

1 | 1300

2 | 1690

3 | 2197

4 | 2856

5 | 3713

6 | 4827

7 | 6275

b) Übertragen Sie die Wachstumsfunktion in die Form y(t) =y\_0 \*'e^('la \*t).

Vergleichen Sie die Werte von i und 'la.

Es gilt: 'e^('la) =1 +i und somit 'la =ln(1 +i) =ln(1,3) ~~0,2624.

Der Wert von X liegt in derselben Größenordnung wie i, ist aber nicht gleich i.

y(t) =y\_0 \*'e^(0,2624 \*t) Wachstumsfunktion

-----

c) Ermitteln Sie, wie lange es dauert, bis sich die Anzahl der Bakterien pro cm^3 verdoppelt.

y(t) =y\_0 \*(1 +i)^t

2000 =1000 \*1,3^t |/1000

2 =1,3^T

ln(2) =T \*ln(1,3)

T =(ln(2))/(ln(1,3)) ~~2,64

-----

y(t) =y\_0 \*'e^('la \*t)

2000 =1000 \*'e^(0,2624 \*T) |/1000

2 ='e^(0,2624 \*T) |ln

ln(2) =0,2624 \*T

T =(ln(2))/(0,2624) ~~2,64

Die Anzahl der Bakterien pro cm^3 verdoppelt sich nach ca. 2,6 Stunden.

----------

Hinweis:

0,2624 ~~0,3 aber 0,2624 \=0,3

'la ~~i, aber 'la \=i

-----

Tipp: Die Zeit, in der sich die Bakterienzahl verdoppelt, wird |Verdoppelungszeit T| genannt. Für die Verdopplungszeit T gilt:

y(T) =2 \*y\_0

----------

|Definition: Verdoppelungszeit|

Die Verdoppelungszeit T gibt bei Zunahmevorgängen an, in welcher Zeit sich ein Bestand verdoppelt. Somit gilt: y(T) =2 \*y\_0

----------

2 \*y\_0 =y\_0 \*(1 +i)^T

2 =(1 +i)^T |ln

ln(2) =T \*ln(1 +i)

T =(ln(2))/(ln(1 +i))

-----

2 \*y\_0 =y\_0 \*'e^('la \*T)

2 ='e^('la \*T) |ln

ln(2) ='la \*T

T =(ln(2))/( 'la)

'la =(ln(2))/T

Bei Zunahmevorgängen sind i und 'la positiv.

----------

|Definition: Halbwertszeit|

Die Halbwertszeit T\_(1/2) gibt bei Abnahmevorgängen an, in welcher Zeit sich ein Bestand halbiert. Somit gilt: y(T\_(1/2)) =1/2 \*y\_0

----------

1/2 \*y\_0 =y\_0 \*(1 +i)^(T\_(1/2))

T\_(1/2) =(ln(1/2))/(ln(1 +i)) =-(ln(2))/(ln(1 +i))

-----

1/2 \*y\_0 =y\_0 \*'e^('la \*T\_(1/2))

T\_(1/2) =(ln(1/2))/( 'la) =-(ln(2))/('la)

'la =(ln(2))/(T\_(1/2))

Bei |Abnahmevorgängen| sind i und 'la negativ.

Bei Abnahmevorgängen wird 'la auch als |Zerfallskonstante| bezeichnet.

j-36 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-Beispiel 1.38: Bakterienwachstum in einer Nährlösung

Die Zahl der Bakterien in einer Nährlösung verdoppelt sich alle fünf Stunden.

Am Beginn der Untersuchung werden y\_0 =2000 Bakterien gezählt.

a) Berechnen Sie den prozentuellen Zuwachs pro Stunde und erstellen Sie die zugehörige Wachstumsfunktion in der Form y(t) =y\_0 \*(1 +i)^t und y(t) =y\_0 \*'e^('la \*t).

Wachstumsgleichung: y(t) =2000 \*(1 +i)^t

Verdoppelungszeit: T =5 Stunden

Verdoppelung bedeutet, dass sich in 5 Stunden die Zahl der Bakterien von y\_0 =2000 auf 2 \*y\_0 =4000 Bakterien verdoppelt.

y(T) =y(5) =2 \*y\_0 =2 \*2000 =4000

2 \*y\_0 =y\_0 \*(1 +i)^5 |/y\_0

2 =(i +i)^5

 ^(5)'w(2) =1 +i

i = ^(5)'w(2) -1 ~~0,148698 entspricht einem Wachstum von ca. 14,87 % pro Stunde. Die Gleichung der Wachstumsfunktion lautet y(t) =2000 \*1,148698^t.

Die Wachstumsfunktion in der Form y(t) =y\_0 \*'e^('la \*t) lautet y(t) =2000 \*'e^(0,138629 \*t).

'la =(ln(2))/5 ~~0,138629 =ln(1 +i)

-----

b) Berechnen Sie, wann 1000000 Bakterien in der Nährlösung sind.

y\_0 =2000

y(t) =1000000

y(t) =y\_0 \*(1 +i)^t

i =0,148698

1000000 =2000 \*1,148698^t

1,148698^t =500

t =(ln(500)/(ln(1,148698))

t ~~44,83 Stunden

-----

y(t) =y\_0 \*'e^('la \*t)

'la =0,138629

1000000 =2000 \*'e^(0,138629 \*t)

t =(ln(500))/0,138629)

t ~~44,83 Stunden

Nach ca. 44 Stunden und 50 Minuten erreicht die Bakterienzahl die Millionengrenze.

----------

Für die Verdoppelungszeit T gilt:

y(T) =2 \*y\_0

Lösung mit dem Solver des GTR:

A steht in der Solver-Gleichung für den Anfangswert y\_0.

----------

##-Beispiel 1.39: Halbwertszeit von Cäsium 131

Cäsium 131 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 9,7 Tagen.

a) Ermitteln Sie die Zerfallskonstante 'la.

Interpretieren Sie das negative Vorzeichen im Ergebnis der Berechnung.

'la =-(ln(2))/(T\_(1/2)) =-(ln(2))/(9,7) ~~-0,071458

Das |negative| Vorzeichen tritt bei |Zerfallsvorgängen| auf.

-----

b) Berechnen Sie die Zerfallsrate i pro Tag.

i ='e^('la) -1 ='e^(-0,071458) -1 =-0,068965

Das |negative Vorzeichen| der Zerfallsrate i zeigt, dass ein |Zerfall| vorliegt.

Cäsium 131 zerfällt mit einer Zerfallsrate von ca. 6,9 % pro Tag.

-----

c) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Anfangsmenge nach einer Woche (7 Tage) noch vorhanden sind.

y(t) =y\_0 \*'e^('la \*t)

y(7) =y\_0 \*'e^(-0,071458 \*7)

y(7) =y\_0 \*0,606404

Nach einer Woche sind noch ca. 60,64 % der Anfangsmenge vorhanden.

j-37 - Wachstum und Zerfall

d) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Anfangsmenge nach einem Monat (30 Tage) noch vorhanden sind.

y(t) =y\_0 \*'e^('la \*t)

y(30) =y\_0 \*'e^(-0,071458 \*30)

y(30) =y\_0 \*0,117214

11,72 % der Anfangsmenge sind nach 30 Tagen noch vorhanden.

-----

e) Ermitteln Sie, nach wie vielen Tagen nur noch 1 % der Anfangsmenge vorhanden sind.

y(t) =y\_0 \*'e^('la \*t)

(y\_0)/(100) \*'e^('la \*t) |/y\_0 |ln

t =(ln(0,01))/('la)

t ~~64,5 Tage

Nach 64,5 Tagen ist nur mehr 1 % der Anfangsmenge vorhanden.

-----

t in Tagen | y(t)

0 | y\_0

9,7 | 0,5 \*y\_0

7 | ?

30 | ?

? | 0,01 \*y\_0

----------

##-Beispiel 1.40: Abbau von Medikamenten

Der Abbau von Medikamenten im menschlichen Körper kann mithilfe des exponentiellen Zerfallsgesetzes beschrieben werden.

Die Zeit T\_(1/2) wird als biologische Halbwertszeit bezeichnet. Sie gibt an, wie lange der Körper braucht, bis er die Hälfte einer ursprünglich aufgenommenen Menge y\_0 abgebaut (umgewandelt, ausgeschieden usw.) hat.

Durch Messung der Konzentration des Wirkstoffs im Blut einer Patientin erhält man folgende Abnahmekurve.

a) Lesen Sie aus der vorliegenden Kurve die Anfangskonzentration, die Halbwertszeit und die Prozente der Anfangskonzentration des Wirkstoffes nach 10 Stunden ab. Lösung:

y\_0 =100 Anfangskonzentration in %

T\_(1/2) ~~200 Minuten Halbwertszeit

y(600) ~~13 Konzentration nach 10 Stunden in %

j-38 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-Beispiel 1.40: Abbau von Medikamenten (Fortsetzung)

b) Der Hersteller eines Medikamentes gibt an, dass in 15 Minuten 5 % des jeweils im Blut vorhandenen Wirkstoffes abgebaut werden.

Überprüfen Sie die vom Hersteller angegebenen Daten mit den vorliegenden Messwerten der Patientin mithilfe der Halbwertszeit.

-----

Lösung:

y(t) ist die Menge des Wirkstoffes im Blut t Minuten nach Injektion des Medikamentes.

y\_0 ist die ursprünglich injizierte Menge des Medikamentes.

Die Angabe des Herstellers bedeutet, dass 15 Minuten nach Verabreichung des Wirkstoffes noch 95 % der injizierten Menge im Körper sind.

y(t) =y\_0 \*'e^(k \*t)

y(15) \*y\_0 =(95)/(100) \*y\_0

95 =100 \*'e^(-(ln(2))/(T\_(1/2)) \*1,5) mit k =-(ln(2))/(T\_(1/2))

0,95 ='e^(-(ln(2))/(T\_(1/2))) |ln

ln(0,95) =-(ln(2))/(T\_(1/2)) \*15

T\_(1/2) =-(ln(2))/(ln(0,952)) \*15

T\_(1/2) ~~202,7 Minuten

Die abgelesene Halbwertszeit stimmt mit der berechneten Halbwertszeit nach Herstellerangaben recht gut überein.

Die Herstellerangaben scheinen zu stimmen.

-----

c) Erstellen Sie eine Funktion, die den Abbau des Wirkstoffs des Medikaments beschreibt. Verwenden Sie y\_0 =100 und die Halbwertszeit T\_(1/2) ~~202,7 Minuten.

Lösung:

y(t) =y\_0 \*'e^(k \*t) mit k =-(ln(2))/(202,7)

k ~~-0,00342

y(t) =100 \*'e^(-0,00342 \*t) Abnahmefunktion

-----

d) Ein Arzt injiziert 10 ml des Medikamentes. Ermitteln Sie, wann die nächste Injektion fällig ist, wenn die Menge des Medikamentes im Körper 3 ml nicht unterschreiten soll.

Lösung:

y(t) =y\_0 \*'e^(k \*t)

y(t) =y\_0 \*'e^(-0,00342 \*t)

3 =10 \*'e^(-0,00342 \*t) |ln

t =(ln(0,3))/(-0,00342)

t ~~352 Minuten

Die nächste Injektion wäre nach ca. 350 Minuten fällig.

----------

Tipp:

Wenn nicht anders angegeben, nehmen Sie als Anfangswert y\_0 =100 an.

Die Funktionswerte können in diesem Fall als Prozentwerte interpretiert werden.

j-39 - Wachstum und Zerfall

##-Beispiel 1.41: Weltenergieverbrauch

Der Weltenergieverbrauch für Wasserkraft stieg unter Berücksichtigung aller Schwankungen in den Jahren von 1900 bis 1980 durchschnittlich um ca. 2,8 % pro Jahr. 1900 lag der Weltenergieverbrauch für Wasserkraft bei etwa 0,9 Mrd. t SKE/Jahr (0,9 Milliarden Tonnen Steinkohleeinheiten pro Jahr).

Kriege, Wirtschaftskrisen und andere äußere Einflussfaktoren verursachten natürlich Schwankungen des Wachstums.

Nach der Ölkrise 1975 kam es zu einer Verringerung des Wachstums. 1980 zeigt die Grafik einen Energieverbrauch bei Wasserkraft von ca. 8,5 Mrd. tSKE/Jahr.

Trotzdem erkennt man aus der Grafik eine eindeutige Wachstumstendenz.

Die Grafik lässt vermuten, dass es eine Exponentialfunktion gibt, die die; Entwicklung des Weltenergieverbrauchs hinreichend genau beschreibt.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion mit y(t) =0,9 \*1,028^t (den Weltenergieverbrauch für Wasserkraft hinreichend genau beschreibt.

Dabei entspricht t =0 dem Jahr 1900.

Lösung:

Verwenden Sie zur Berechnung die Werte mit dem größten zeitlichen Abstand.

Jahr 1900 t =0

y(0) =y\_0 =0,9

-----

Jahr 1980 t =80

y(80) =8,5

Ansatz einer Exponentialfunktion: y(t) =y\_0 \*(1 +i)^t

für t =80 gilt: 8,5 =0,9 \*(1 +i)^(80) |/0,9

(8,5)/(0,9) =(1 +i)^(80) | ^(80)'w()

 ^(80)'w((8,5)/(0,9)) =(1 +i)

 ^(80)'w((8,5)/(0,9)) -1 =i

i =0,02847 ~~0,028 =2,8 %

Der jährliche Zuwachsfaktor beträgt somit ca. 2,8 %.

Die Wachstumsfunktion stimmt mit der Angabe überein: y(t) =0,9 \*1,028^t

-----

b) Ein Politiker behauptet nach Einsicht der vorliegenden Daten, dass bei einer jährlichen Zunahme des Energieverbrauchs um 2,8 %, in 100 Jahren 280 % mehr Energie verbraucht wird.

Argumentieren Sie, ob der Politiker recht hat.

Stellen Sie die Aussage gegebenenfalls richtig.

Lösung:

Der Politiker hat nicht recht. Er geht von einem linearen Wachstum aus. Tatsächlich ist das Wachstum hier aber exponentiell.

Der tatsächliche prozentuelle Zuwachs in 100 Jahren wäre nach dem vorliegenden Modell ca. 1482 %.

Begründung:

(1 +i)^(100) =1,028^(100) =15,82 =1 +14,82 =1 +i\_(ges)

i\_(ges) =14,82 =1482 %

----------

Jahr | Zeit t in Jahren | Abgelesene Werte

1900 | 0 | 0,9

1910 | 10 | 1,2

1920 | 20 | 1,6

1940 | 40 | 2,2

1960 | 60 | 4,5

1970 | 70 | 6,4

1980 | 80 | 8,5

----------

In den bisherigen Überlegungen wurde Wachstum ohne jede natürliche Begrenzung modelliert.

In der Realität ist es allerdings so, dass alle Wachstumsvorgänge durch Rahmenbedingungen und endliche Ressourcen eingeschränkt werden.

Die beiden folgenden Wachstumsmodelle tragen dieser |Beschränkung der Ressourcen| Rechnung.

j-40 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

#### \*\*-1.2.3 Beschränktes Wachstum

Führt man ein neues Produkt auf dem Markt ein, nimmt die Anzahl der Personen, die dieses Produkt gekauft haben, so lange zu, bis eine Sättigung des Marktes erreicht ist und alle potentiellen Kunden den Artikel besitzen.

Für das vorliegende Wachstum ist eine Begrenzung S vorgegeben. Daher bezeichnet man dieses Wachstum als beschränktes Wachstum.

-----

Hinweis:

Modellannahme: Die Anzahl der Produkte in ME, die zum Zeitpunkt t noch verkauft werden können, ist S -y(t).

Diese Anzahl |nimmt exponentiell ab|.

-----

t Zeit in Zeiteinheiten (ZE) ab Markteinführung

y(t) Anzahl der nach t Zeiteinheiten bereits verkauften Produkte in ME

y\_0 Anzahl der zu Beginn(t =0) verkauften Produkte in ME

S Sättigungswert in ME; Anzahl der Produkte, die maximal verkauft werden können

S -y(t) Anzahl der zum Zeitpunkt t potentiell noch absetzbaren Produkte in ME; Anzahl der Produkte, die zum Zeitpunkt t noch verkauft werden können

S -y\_0 Anzahl der Produkte in ME, die zur Markteinführung (zum Zeitpunkt t =0) noch verkauft werden können

-----

Modellannahme: Die Anzahl der Produkte, die zum Zeitpunkt t noch verkauft werden können, ist S -y(t). Diese Anzahl nimmt |exponentiell ab|.

Bei Markteinführung (t =0) ist die Anzahl der Produkte, die noch verkauft werden können, S -y\_0 und nimmt dann nach (S -y\_0) \*'e^(-'la \*t) exponentiell ab.

Es gilt somit:

S -y(t) =(S -y\_0) \*'e^(-'la \*t)

y(t) =S -a \*'e^(-'la \*t) mit a =S -y\_0

----------

##-Beispiel 1.42: Markteinführung eines neuen Smartphones

Ein Mobilfunkanbieter führt ein neues Smartphone auf dem Markt ein.

Am Tag der Markteinführung wurden 500 vorbestellte Smartphones verkauft.

Nach fünf Tagen wurden insgesamt 1500 Geräte verkauft.

Die Marktsättigung wird bei 10000 Smartphones geschätzt.

Ermitteln Sie die Wachstumsfunktion für ein angenommenes beschränktes Wachstum. Lösung:

y\_0 =500 Anfangswert zum Zeitpunkt t =0

y(5) =1500 insgesamt verkaufte Geräte bis zum Zeitpunkt t =5

S =10000 Sättigungswert

a =9500 Anzahl der zum Zeitpunkt t =0 noch potentiell absetzbaren Smartphones

a =S -y\_0 =10000 -500 =9500

y(t) =S -a \*'e^(-'la \*t) Wachstumsfunktion für beschränktes Wachstum

y(t) =10000 -9500 \*'e^(-'la \*t) t Zeit nach Markteinführung in Tagen

y(t) insgesamt verkaufte Smartphones nach t Tagen

j-41 - Wachstum und Zerfall

Berechnung von 'la: y(5) =1500

1500 =10000 -9500 \*'e^(-'la \*5) |-10000

-8500 =-9500 \*'e^(-'la \*5) |/(-9500)

(8500)/(9500) ='e^(-'la \*5) |ln

ln((8500)/(9500)) =-'la \*5 |/5

'la =(ln((8500)/(9500)))/5 ~~0,022245

y(t) =10000 -9500 \*'e^(-0,022245 \*t) Wachstumsfunktion

----------

|Gleichung der Wachstumsfunktion für beschränktes Wachstum|

Die Funktion y mit y(t) =S -a \*'e^(-'la \*t) mit t 'el 'R^+\_0 und 'la >0 beschreibt eine |beschränkte Zunahme|.

Die Funktion y mit y(t) =S +a \*'e^(-'la \*t) mit t 'el 'R^+\_0 und 'la >0 beschreibt eine |beschränkte Abnahme|.

y(t) Bestand zum Zeitpunkt t

S Sättigungswert

a =|S -y\_0|

----------

Für y\_0 =0 ergibt sich die Wachstumsfunktion mit y(t) =S -S \*'e^(-'la \*t) =S \*(1 -'e^(-'la \*t)).

----------

Tipp: Die Steigung der Wachstumsfunktion wird kleiner.

----------

|Eigenschaften der Wachstumsfunktion für beschränktes Wachstum|

* Die Steigung der Funktion für beschränktes Wachstum nimmt ab.
* Die Funktion wächst umso weniger, je näher die Funktionswerte y(t) dem Sättigungswert S kommen. Der Wert S selbst wird dabei nicht erreicht.
* Die Zunahme pro ZE ist proportional zur Restkapazität S -y(t).

----------

##-Beispiel 1.43: Infusion

Ein Medikament wird in Form einer Infusion verabreicht.

Die Anreicherung des Wirkstoffes im Blut erfolgt nach der Funktionsgleichung y(t) =A \*(1 -'e^(k \*t))

A ist der Sättigungswert.

y(t) ist die Menge des Wirkstoffes im Blut in ml t Minuten nach Beginn der Infusion.

10 Minuten nach Beginn der Infusion sind 50 % des Sättigungswertes im Blut erreicht. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von y.

Lösung:

0,5 \*A =A \*(1 -'e^(k \*10))

0,5 =1 -'e^(k \*10)

'e^(k \*10) =0,5 |ln

k =(ln(0,5))/(10) <=> k ~~-0,069315

y(t) =A \*(1 -'e^(-0,069315 \*t)) Wachstumsfunktion

-----

Ein Kondensator ist ein Bauteil zur Speicherung von elektrischen Ladungen. Die Kapazität C eines Kondensators ist ein Maß für sein Speichervermögen und wird in Farad gemessen.

----------

##-Beispiel 1.44: Kondensator

Ein Kondensator hat eine Kapazität C =50 'myF (Mikrofarad). Er wird in Serie mit einem Widerstand R an eine Spannungsquelle (Batterie) mit U =12 V (Volt) angeschlossen. Es fließt kurzzeitig ein Ladestrom, bis der Kondensator voll geladen ist.

Die am Kondensator gemessene Spannung entspricht bei voller Ladung der Spannung der Spannungsquelle.

Die Spannung am Kondensator U(t) wächst nach der Beziehung U(t) =12 \*(1 -'e^(-0,03 \*t)).

Dabei wird die Spannung U(t) in Volt und die Zeit t in Sekunden gemessen.

j-42 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-Beispiel 1.44: Kondensator (Fortsetzung)

a) Stellen Sie die gegebene Wachstumsfunktion grafisch dar.

Lesen Sie aus dem Graphen der Funktion ab, nach welcher Zeit t die Spannung am Kondensator die Hälfte des Sättigungswertes erreicht hat.

Lösung:

Der Sättigungswert S ist 12 V.

Nach ca. 23 Sekunden ist die Hälfte des Sättigungswertes, d. h. 6 V, erreicht.

-----

b) Ermitteln Sie rechnerisch, nach welcher Zeit t die Spannung am Kondensator die Hälfte des Sättigungswertes erreicht hat.

Überprüfen Sie das Ergebnis Ihrer Rechnung mithilfe der Grafik aus a).

Lösung:

6 =12 \*(1 -'e^(-0,03 \*t)) |/12

1/2 =1 -'e^(-0,03 \*t) |-1 |\*(-1)

1/2 ='e^(-0,03 \*t) |ln

ln(1/2) =-0,03 \*t |/(-0,03)

t =(ln(1/2))/(-0,03) =(-ln(2))/(-0,03) =(ln(2))/(0,03) ~~23,1

Die berechnete Zeit stimmt mit t ~~23,1 Sekunden gut mit dem abgelesenen Wert überein.

-----

Zur Erinnerung:

ln(a/b) =ln(a) -ln(b)

ln(1) =0

ln(1/2) =ln(1) -ln(2) =0 -ln(2) =-ln(2)

----------

##-Beispiel 1.45: Newtonsches Abkühlgesetz

In einem Raum mit einer Temperatur von konstant 20 °C kühlt heißes Wasser mit der Anfangstemperatur 100 °C in einem Gefäß innerhalb von 1° Minuten auf 40 °C ab.

Die Abkühlung eines Körpers von einer Ausgangstemperatur T\_0 auf eine konstante Temperatur der Umgebung T\_u erfolgt nach dem Gesetz T(t) =T\_u +(T\_0 -T\_u) \*'e^(-k \*t).

Dabei ist

t Zeit in Minuten, die seit Versuchsbeginn verstrichen ist

T(t) die momentane Temperatur in °C zum Zeitpunkt t

T\_u =20 °C Raumtemperatur, konstante Umgebungstemperatur

T\_0 =100 °C Temperatur des Körpers beim Start des Versuches

k Konstante der Abnahme

Die vereinfachte Funktion mit T(t) =20 +80 \*'e^(-k \*t) entspricht der Funktionsgleichung für beschränkte Abnahme.

a) Berechnen Sie die Konstante k.

Lösung:

T(t) =T\_u +(T\_0 -T\_u) \*'e^(-k \*t)

40 =20 +80 \*'e^(-k \*10)

0,25 ='e^(-k \*10)

k =-(ln(0,25))/(10) ~~0,138629

-----

b) Ermitteln Sie, wann die Wassertemperatur 30 °C erreicht.

T(t) =30; t =?

Lösung:

T(t) =T\_u +(T\_0 -T\_u) \*'e^(-k \*t)

30 =20 +80 \*'e^(-k \*t)

0,125 ='e^(-k \*t) |ln

ln(0,125) =-k \*t

t =(ln(0,125))/k =(ln(0,125))/(0,138629)

t ~~15

Nach ca. 15 Minuten hat das Wasser eine Temperatur von 30 °C.

j-43 -Wachstum und Zerfall

t in Minuten | T in °C

0 | 100

10 | 40

? | 30

? | 20,01

-----

c) Berechnen Sie, wann die Wassertemperatur 20,01 °C erreicht.

T(t) =20,01; t =?

Lösung:

t ~~64,83

Nach ca. 65 Minuten hat das Wasser eine Temperatur von 20,01 °C.

-----

d) Argumentieren Sie, warum die Temperatur von 20 °C unter den gegebenen Rahmenbedingungen nicht unterschritten werden kann.

Lösung:

|Physikalisch:|

Wärmeenergie kann nur vom wärmeren auf den kälteren Körper übergehen. Sobald Wasser und Luft dieselbe Temperatur haben, ist kein weiterer Wärmeaustausch möglich und die Temperatur des Wassers kann nicht mehr niedriger werden.

-----

|Mathematisch:|

Die Zeit, die vergeht, bis sich das Wasser auf eine Temperatur T\_1 abkühlt, ist gegeben durch:

T\_1 =20 +80 \*'e^(-0,138629 \*t)

(T\_1 -20)/(80) ='e^(-0,138629 \*t)

Für T\_1 <=20 ist der Ausdruck (T\_1 -20)/(80) kleiner gleich null.

Von null und negativen Zahlen ist der Logarithmus aber nicht definiert und somit muss T\_1 >20 bleiben.

Die Wassertemperatur nähert sich asymptotisch der Raumtemperatur. Diese wird jedoch (in endlicher Zeit) nie erreicht.

-----

|Lösung des Beispiels unter Verwendung des Solvers des GTR:|

Ziel ist es, mithilfe des Solvers komfortabel alle Größen einer Wachstumsfunktion zu berechnen. Das hier beschriebene Grundprinzip kann einfach auf andere Berechnungen übertragen werden.

Geben Sie dazu die gegebene Wachstumsfunktion als Y\_1 ein.

Y\_1 =U +(O -U) \*'e^(-K \*X)

Öffnen Sie danach den Solver und geben Sie hier ein: eqn: 0=Y\_1 -T Dabei steht Y\_1 für die in Y\_1 eingegebene Funktion.

T ist eine vorzugebende Temperatur.

Die Eingabe von Y\_1 ist etwas kompliziert:

Drücken Sie die Taste (VARS), gehen Sie mit dem Cursor auf Y-VARS und bestätigen Sie 1:Function mit (ENTER). Es erscheint ein neuer Bildschirm mit einer Liste von Funktionen.

Wählen Sie die gewünschte Funktion (hier 1:Y\_1) und bestätigen Sie wieder mit (ENTER).

Im Solver steht eqn: 0=Y\_1.

Ergänzen Sie die Eingabe auf eqn: 0=Y\_1 -T und drücken Sie (ENTER).

Das folgende Bild enthält in der ersten Zeile die eingegebene Gleichung.

In den folgenden Zeilen werden alle Variablen, die in der eingegebenen Gleichung enthalten sind, aufgelistet.

Neben den Variablen stehen die aktuellen |derzeit| gespeicherten Werte.

Aktualisieren die angezeigten Werte mit den Werten aus der Angabe.

Der Eintrag für K zu diesem Zeitpunkt ist zunächst noch (fast) beliebig.

K soll im nächsten Schritt berechnet werden.

a) Zur Berechnung von K setzen Sie den Cursor hinter K=und drücken Sie die Tasten mit (ALPHA) [SOLVE].

Der Wert der Konstante K wird berechnet und ändert sich für den Rest des Beispiels nicht. (K =0,1386 ...)

Mit der Taste (GRAPH) werden die aktuellen Funktionsgraphen gezeichnet.

j-44 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-Beispiel 1.45: Newtonsches Abkühlgesetz (Fortsetzung)

b) Berechnung des Zeitpunktes, wann T =30 °C ist.

Geben Sie für T den Wert 30 ein und berechnen Sie x.

c) Berechnung des Zeitpunktes, wann T =20,01 °C ist.

Geben Sie für T den Wert 20,01 ein und berechnen Sie wieder x.

----------

Verwenden Sie den Solver als Eingabemaske und visualisieren Sie die Kurven mithilfe des Grafikbildschirmes.

Eingabeteil -> GRAPH -> Ausgabeteil

Ausgabeteil -> MATH; 0: Solver... (0 eingeben) -> Eingabeteil

----------

#### \*\*-1.2.4 Logistisches Wachstum

Auch bei diesem Wachstumsmodell nach Pierre |Verhulst| (1804 bis 1849) wird die Endlichkeit der Ressourcen berücksichtigt. Die Modellannahme für das logistische Wachstum geht von folgenden Bedingungen aus:

* Es gibt eine Grenze S, die nicht überschritten wird. S ist der |Sättigungswert|.
* Der Zuwachs zum Zeitpunkt t ist proportional zur prozentuellen Restkapazität ((S -y(t))/S) und zum momentanen Bestand y(t).

----------

|Gleichung der Wachstumsfunktion für das logistische Wachstum|

y(t) =S/(1 +b \*'e^(-k \*t)) mit t 'el 'R^+\_0

y(t) Bestand zum Zeitpunkt t

S Sättigungswert

b =(S -y\_0)/(y\_0) b >0 Wachstum, b <0 Abnahme

----------

Begründung: Für t =0 erhält man y\_0 =S/(1 +b \*'e^0) <=> b =(S -y\_0)/(y\_0).

j-45 - Wachstum und Zerfall

|Eigenschaften der Wachstumsfunktion für logistisches Wachstum|

* Das Wachstum ist am Beginn der Entwicklung annähernd exponentiell. Die Funktion wächst umso weniger, je näher die Funktionswerte y(t) dem Sättigungswert S kommen. Der Wert S selbst wird dabei nicht erreicht.
* Die Steigung der Funktion nimmt zuerst zu und dann ab. Die Kurve der logistischen Wachstumsfunktion ist s-förmig.

----------

##-Beispiel 1.46: Kaninchenpopulation

Auf einer entlegenen Insel werden zu Studienzwecken 50 Kaninchen ausgesetzt. Man nimmt an, dass die Ressourcen der Insel für eine maximale Anzahl von 1000 Kaninchen ausreichen. Da sich im ersten Jahr die begrenzten Ressourcen noch nicht bemerkbar machen, wächst die Kaninchenpopulation im ersten Jahr um 50 % auf 75 Kaninchen an.

Beschreiben Sie die Entwicklung der Kaninchenpopulation durch ein logistisches Wachstumsmodell.

a) Ermitteln Sie die logistische Wachstumsfunktion und zeichnen Sie den Graphen der Wachstumsfunktion.

Lösung:

y\_0 =50 Anfangswert zum Zeitpunkt t =0

y(1) =50 \*1,5 =75 Anzahl der Kaninchen nach einem Jahr

S =1000 Sättigungswert

y(t) =S/(1 +b \*'e^(-k \*t)) Wachstumsfunktion für logistisches Wachstum

b und k müssen berechnet werden.

-----

Zur Berechnung von b wird der Anfangswert y(0) =50 verwendet:

y\_0 =50

50 =(1000)/(1 +b \*'e^(-k \*t))

50 =(1000)/(1 +b) |\*(1 +b) |/50

1 +b =20 |-1

b =19

-----

Alternativ könnte zur Berechnung von b auch die Formel

b =(S -y\_0)/(y\_0) =(1000 -50)/(50) =19

verwendet werden.

Zur Berechnung von k wird das Zahlenpaar (1|75) verwendet:

y(1) =75

75 =(1000)/(1 +19 \*'e^(-k \*1)) |\*(1 +19 \*'e^(-k)) |/75

1 +19 \*'e^(-k) =(1000)/(75) |-1 |/19

'e^(-k) =((1000)/(75) -1)/(19) ~~0,649123 |ln

-k ~~-0,43213

k ~~0,43213

y(t) =(1000)/(1 +19 \*'e^(-0,43213 \*t)) Wachstumsfunktion

-----

b) Berechnen Sie die Anzahl der Kaninchen nach 10 Jahren.

Lösung:

y(10) =(1000)/(1 +19 \*'e^(-0,43213 \*10)) ~~798,49

In zehn Jahren werden voraussichtlich 798 Kaninchen auf der Insel leben.

----------

Im ersten Schritt mit y\_0 den Wert b berechnen.

Im zweiten Schritt mit y(1) k berechnen.

-----

Zur Erinnerung:

e^0 =1

j-46 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-Beispiel 1.46: Kaninchenpopulation (Fortsetzung)

c) Sobald 95 % des Sättigungswertes überschritten werden, wollen die Wissenschaftler den Gesundheitszustand der Kaninchen genauer untersuchen.

Ermitteln Sie, in wie vielen Jahren das eintreten wird.

Lösung:

950 =(1000)/(1 +19 \*'e^(-0,43213 \*t)) |\*(1 +19 \*'e^(-0,432 13 \*t)) |/950

1 +19 \*'e^(-0,43213 \*t) =(1000)/(950) |-1 |/19

'e^(-0,43213 \*t) =((1000)/(950) -1)/(19) ~~0,00277 |ln

-0,43213 \*t =ln(0,00277) |/(-0,43213)

t ~~13,63

Nach ca. 13 Jahren und 8 Monaten sollten die Untersuchungen beginnen.

----------

##-Beispiel 1.47: Sonnenblumen

Ein Biologe verwendet zur Modellierung des Wachstums von Sonnenblumen die empirisch ermittelte Wachstumsfunktion H mit

H(t) =(2 \*'e^('la \*t))/('e^('la \*t) +19).

Dabei ist H(t) die durchschnittliche Höhe der Pflanzen nach t Tagen in Metern.

a) Berechnen Sie den Parameter 'la, wenn die Sonnenblumen nach 100 Tagen eine durchschnittliche Höhe von 1,25 m erreicht haben.

Schreiben Sie die Gleichung der Wachstumsfunktion an.

Lösung:

H(100) =1,25

1,25 =(2 \*'e^('la \*100))/('e^('la \*100) +19) |\*('e^('la \*100) +19)

1,25 \*'e^('la \*100) +1,25 \*19 =2 \*'e^('la \*100) |-1,25 \*'e^('la \*100)

23,75 =0,75 \*'e^('la \*100) |/0,75 |ln

ln((23,75)/(0,75) ='la \*100 |/100

'la ~~0,03455

H(t) =(2 \*'e^(0,03455 \*t))/('e^(0,03455 \*t) +19 Wachstumsfunktion

-----

b) Ermitteln Sie die Höhe der Jungpflanzen beim Setzen und die erwartete maximale Höhe.

Lösung:

H(0) =(2 \*'e^(0,03455 \*0))/('e^(0,03455 \*0) +19) =0,1

Anfangsgröße H(0) =10 cm

Die maximale Größe S können Sie beispielsweise erhalten, indem Sie für t eine große Zahl z. B. t =300 einsetzen, d. h., die Sonnenblumen lange wachsen lassen.

H(300) ~~S =2 m

Die Sonnenblumen erreichen eine maximale Höhe von bis zu 2 m.

-----

c) Zeigen Sie, dass die gegebene Wachstumsfunktion mit der Funktion

h(t) =2/(1 +10 \*'e^(-'la \*t)) äquivalent ist.

Lösung:

Erweitern Sie den Bruch mit 'e^(-'la \*t).

H(t) =(2 \*'e^('la \*t) \*'e^(-'la \*t))/(('e^('la \*t) +19) \*'e^(-'la \*t)) =

=2/(1 +10 \*'e^(-'la \*t)) =h(t)

----------

Zur Erinnerung:

a^b \*a^(-b) =a^b \*1/(a^b) =1

'e^('la \*t) \*'e^(-'la \*t) =1

j-47 - Wachstum und Zerfall

##### \*\*-Gemischte Beispiele

##-Beispiel 1.48: Vergleich von vier Wachstumsfunktionen

a) Ordnen Sie den vorliegenden Funktionsgleichungen die dazugehörigen Graphen zu. Tragen Sie die entsprechenden Buchstaben in die Tabelle ein und ergänzen Sie fehlende Werte.

Ermitteln Sie den Startwert y\_0 und gegebenenfalls den Sättigungswert S.

y\_1(t) =60 \*1,2^t

y\_2(t) =(200)/(1 +2,33 \*'e^(-0,272 \*t))

y\_3(t) =60 +20 \*t

y\_4(t) =200 \*(1 -'e^(-0,2 \*t))

Lesen Sie y(5) aus den gegebenen Graphen ab.

-----

Lösung:

|Lineares Wachstum:|

Funktionsgleichung: y\_3

Graph: D

Startwert y\_0: 60

Sättigungswert S: -

y(5): 160

-----

|Exponentielles Wachstum:|

Funktionsgleichung: y\_1

Graph: C

Startwert y\_0: 60

Sättigungswert S: -

y(5): ~~150 (149,3)

-----

|Beschränktes Wachstum:|

Funktionsgleichung: y\_4

Graph: B

Startwert y\_0: 0

Sättigungswert S: 200

y(5): ~~125 (126,4)

-----

|Logistisches Wachstum:|

Funktionsgleichung: y\_2

Graph: A

Startwert y\_0: 60

Sättigungswert S: 200

y(5): ~~125 (125,2)

-----

b) Erklären Sie' wie Sie den Graphen des beschränkten Wachstums von dem des logistischen Wachstums unterscheiden können.

Lösung:

Beide Funktionen modellieren ein Wachstum mit Begrenzung.

Die Steigung des Graphen B des beschränkten Wachstums nimmt ab und ist nicht s-förmig.

Der Graph A des logistischen Wachstums ist s-förmig, d. h., die Steigung der Funktion nimmt zuerst zu und dann ab.

----------

##-Beispiel 1.49: Großtrappen

Erfinden Sie eine kurze Geschichte zum Wachstum der Population von Großtrappen im Nordburgenland.

Verwenden Sie die Wachstumsfunktion f, die für die prognostizierte Anzahl f(t) der Großtrappen nach t Jahren mit f(t) =900 -790 \*'e^(-0,026 \*t) erstellt wurde.

Geben Sie in Ihrer Geschichte den Anfangsbestand, den Bestand nach 5 Jahren, nach 20 Jahren und den prognostizierten Endbestand an.

Lösung:

Durch den Vergleich mit der allgemeinen Wachstumsgleichung für beschränktes Wachstum erkennen Sie:

S =900

a =790 =900 -y\_0

y\_0 =110

-----

Zur Erinnerung:

y(t) =S -a \*'e^(-'la \*t)

a =|S -y\_0|

j-48 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-Beispiel 1.49: Großtrappen (Fortsetzung)

Geschichte:

Großtrappen gehören zu den gefährdeten Tieren in Österreich.

Bei einer Studie zum Schutz der Großtrappen wurden zu Beginn der Beobachtungen 900 -790 =110 Großtrappen gezählt.

Nach 5 Jahren ist die Anzahl auf ca. 206 Großtrappen gewachsen.

Berechnung: y(5) =900 -790 \*'e^(-0,026 \*5) =206,3

Nach 20 Jahren ist die Anzahl auf ca. 430 Großtrappen gewachsen.

Berechnung: y(20) =900 -790 \*'e(-0,026 \*20) =430,3

Man schätzt, dass die Anzahl der Großtrappen durch geeignete Schutzmaßnahmen auf bis zu 900 Vögel wachsen könnte.

----------

##-Beispiel 1.50: Hühnermast

Masthühner schlüpfen mit einer Masse von 40 bis 45 g. Durch Spezialfutter, das speziell auf hohe Tageszunahmen ausgelegt ist, wächst die Masse der Hühner sehr rasch.

a) Die Masse der Hühner kann mit folgender Funktion beschrieben werden:

m(t) =(3100)/(1 +72,8 \*'e^(-0,858 \*t))

t Zeit in Wochen nach dem Schlüpfen des Kükens m(t) Masse in Gramm zum Zeitpunkt t

* Stellen Sie die Funktion m grafisch dar.
* Berechnen Sie die Masse eines Kükens nach dem Schlüpfen und die Masse eines ausgewachsenen Huhnes.
* Die Masthühner werden nach 6 Wochen verkauft.

Lesen Sie aus dem Graphen die Masse nach 6 Wochen ab.

* Ermitteln Sie die Zuwachsrate der Masse der Hühner in Tabellenform bis zur 6. Woche.

Runden Sie in geeigneter Form.

-----

Lösung:

* Grafik siehe Randspalte.
* m(0) =(3100)/(1 +72,8 \*'e^(-0,858 \*0)) =42

Die Masse beim Schlüpfen ist 42 g.

S ~~3100 g Die Masse eines ausgewachsenen Huhnes

* m(6) ~~2200 g (abgelesen)

m(6) =(3100)/(1 +72,8 \*'e^(-0,858 \*6)) =2178 (berechnet)

Die Masse beim Verkauf ist 2178 g.

t in Wochen: 0

m(t) in Gramm: 42

-----

t in Wochen: 1

m(t) in Gramm: 97

absoluter Zuwachs in Gramm: 97 -42 =55

Zuwachsrate für [t -1; t]: (97 -42)/(42) =1,31 =131 %

-----

t in Wochen: 2

m(t) in Gramm: 220

absoluter Zuwachs in Gramm: 220 -97 =123

Zuwachsrate für [t -1; t]: 1,27 =127 %

-----

t in Wochen: 3

m(t) in Gramm: 473

absoluter Zuwachs in Gramm: 253

Zuwachsrate für [t -1; t]: 1,15 =115 %

-----

t in Wochen: 4

m(t) in Gramm: 925

absoluter Zuwachs in Gramm: 452

Zuwachsrate für [t -1; t]: 0,96 =96 %

-----

t in Wochen: 5

m(t) in Gramm: 1552

absoluter Zuwachs in Gramm: 627

Zuwachsrate für [t -1; t]: 0,68 =68 %

-----

t in Wochen: 6

m(t) in Gramm: 2178

absoluter Zuwachs in Gramm: 626

Zuwachsrate für [t -1; t]: 0,4 =40 %

-----

Die Zuwachsrate beim logistischen Wachstum sinkt mit wachsendem t.

b) Um das Wachstum der Junghühner zu optimieren, wird auch die Stalltemperatur elektronisch geregelt. Die Regelung der Stalltemperatur erfolgt nach der Funktion T mit T(t) =18 \*(1 +'e^(-0,38 \*t)).

t Zeit in Wochen nach dem Schlüpfen des Kükens T(t) Stalltemperatur nach t Wochen in °C

j-49 - Wachstum und Zerfall

Die Grafik in der Randspalte zeigt die gegebene Funktion.

* Erklären Sie anhand der Grafik, warum es sich hier um eine beschränkte Abnahme handelt.
* Lesen Sie die Raumtemperatur beim Schlüpfen der Küken und den Wert für S ab.

Lösung:

* Die Kurve ist nicht s-förmig. Sie beginnt mit T(0) ~~36 °C und nähert sich dann asymptotisch dem Sättigungswert ~~18 °C.

Somit ist eine beschränkte Abnahme anzunehmen.

* Die Raumtemperatur beim Schlüpfen der Küken ist ca. 36 °C, die untere Grenze der Temperaturkurve S ist ca. 18 °C.

-----

c) Beim Umformen der Gleichung T(t) =18 \*(1 +'e^(-0,38 \*t)) nach der Zeit t ist ein Fehler passiert. Finden Sie den Fehler und stellen Sie richtig.

T(t) =18 \*(1 +'e^(-0,38 \*t)) |/18

(T(t))/(18) =1 +'e^(-0,38 \*t) |ln

ln((T(t))/(18)) =ln(1) +ln('e^(-0,38 \*t))

ln((T(t))/(18)) =0 +ln('e^(-0,38 \*t))

ln((T(t))/(18)) =-0,38 \*t |/(-0,38)

t =(ln((T(t))/(18)))/(-0,38)

Lösung:

T(t) =18 \*(1 +'e^(-0,38 \*t)) |/18

(T(t))/(18) =1 +'e^(-0,38 \*t) |ln

ln((T(t))/(18)) =ln(1) +ln('e^(-0,38 \*t))

ln((T(t))/(18)) =ln(1) +ln('e^(-0,38 \*t))

ln((T(t))/(18)) =-0,38 \*t |/(-0,38)

t =(ln((T(t))/(18)))/(-0,38)

-----

Richtig wäre:

18 \*(1 +'e^(-0,38 \*t)) |/18

(T(t))/(18) =1 +'e^(-0,38 \*t) |-1

(T(t))/(18) -1 ='e^(-0,38 \*t) |ln

ln((T(t))/(18) -1) =-0,38 \*t |/(-0,38)

t =(ln((T(t))/(18) -1))/(-0,38=

----------

Hinweis:

ln(a +b) \*ln(a) +ln(b)

ln(1 +'e^(-0,38 \*t)) \*ln(1) +ln('e^(-0,38 \*t))

----------

##-Beispiel 1.51: Spracherwerb

Beobachtungen an Krippen- und Kindergartenkindern haben folgende durchschnittliche Satzlängen ergeben:

Alter in Jahren | Satzlänge in Worten

1,5 | 1,2

2 | 1,8

2,5 | 2,5

3 | 3,5

3,5 | 4,3

4 | 4,6

4,5 | 4,9

5 | 5

5,5 | 5,1

a) Stellen Sie den Zusammenhang zwischen dem Alter der Kinder und der durchschnittlichen Satzlänge in einem Punktdiagramm dar.

j-50 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-Beispiel 1.51: Spracherwerb (Fortsetzung)

b) Argumentieren Sie, ob man aus dem Diagramm einen linearen Zusammenhang herauslesen kann.

Lösung:

Zwischen 1,5 und 3,5 Jahren lässt sich zwar ein linearer Trend erkennen, ab 4 Jahren wird der Zuwachs aber deutlich geringer, daher insgesamt kein linearer Zusammenhang.

Der s-förmige Verlauf der Punktewolke deutet eher auf ein logistisches Wachstum hin.

-----

c) Die Satzlänge lässt sich mit folgender Funktion modellieren:

S(t) =(5,2)/(1 +28,4423 \*'e^(-1,3545 \*t))

Berechnen Sie die durchschnittliche Satzlänge eines 6-jährigen Kindes nach diesem Modell.

Lösung:

S(6) ~~5,2 Wörter

----------

##### \*\*-Übungsaufgaben

1.038 Übungen zum Prozentrechnen in Hinblick auf Wachstumsaufgaben:

a) Der Kassapreis eines Produktes beträgt € 30.000,00.

Der Steuersatz ist 20 %.

Berechnen Sie die im Kassapreis enthaltene Steuer.

**[]**

b) Der Stromverbrauch eines Kunden ist von einem Jahr zum nächsten von 2134 kWh um 3,5 % gestiegen.

Berechnen Sie den neuen Stromverbrauch.

**[]**

c) Ein Bankguthaben ist von einem Jahr zum folgenden von € 13.245,00 auf € 13.683,00 gestiegen.

Berechnen Sie den Zinssatz in Prozent.

**[]**

d) Ein Kleinkind hat eine Masse von 5 kg.

In einem Monat nimmt seine Körpermasse um 250 g zu.

Ermitteln Sie die Zunahme der Masse in Prozent.

**[]**

e) Anleihekurs am Montag: 102,4; Anleihekurs am Dienstag: 104,3

Berechnen Sie die absolute und die prozentuelle Zunahme des Kurses.

**[]**

f) Von 27 Schülerinnen und Schülern sind 10 Schülerinnen weiblich.

Ermitteln Sie den Prozentsatz der Schülerinnen.

**[]**

g) Bei einer Umsatzsteuer von 20 % gilt:

Steuer =Bruttobetrag/6

Zeigen Sie die Richtigkeit dieser Formel.

**[]**

----------

Hinweis: Rechnen Sie bei den folgenden Wachstumsaufgaben mit allen Kommastellen und runden Sie erst das Ergebnis.

absoluter Zuwachs 'De y =y\_(neu) -y\_(alt)

relativer Zuwachs, Zuwachsrate, Änderungsrate i:

i =(y\_n -y\_(n -1))/(y\_(n -1)) =(y\_(neu) -y\_(alt))/(y\_(alt))

----------

##### \*\*-Aufgaben zu linearem Wachstum

1.039 Der Lagerbestand eines Betriebes beträgt am Jahresanfang 100 Stück. Pro Monat kommen weitere 15 Stück dazu.

Der Verkauf erfolgt erst später.

a) Begründen Sie, warum ein lineares Wachstum vorliegt.

**[]**

b) Erstellen Sie die Gleichung der linearen Wachstumsfunktion für den Lagerbestand nach t Monaten.

**[]**

c) Ermitteln Sie den Lagerbestand am Jahresende.

**[]**

d) Berechnen Sie, nach wie vielen Monaten 250 Stück im Lager sind.

**[]**

j-51 - Übungsaufgaben

##-1.040 Weltweite CO\_2 - Emissionen (Quelle: Wiener Zeitung)

Im Jahr 1990 wurden weltweit ca. 23 Mrd. Tonnen CO2 in die Atmosphäre emittiert.

2012 waren die Emissionen auf ca. 35 Mrd. Tonnen CO2 gestiegen.

Gehen Sie von einer näherungsweise linearen Zunahme der CO\_2-Emission aus.

Setzen Sie für das Jahr 1990 den Wert t =0.

a) Berechnen Sie die durchschnittliche jährliche Zunahme der CO\_2-Emission.

**[]**

b) Erstellen Sie die lineare Wachstumsfunktion für die CO2-Emission nach t Jahren.

**[]**

c) Ermitteln Sie, wie hoch nach diesem Modell die CO\_2-Emission im Jahr 2020 sein wird.

**[]**

d) Berechnen Sie, in welchem Jahr die CO\_2-Emission die Grenze von 30 Mrd. Tonnen/Jahr überschritten hat.

**[]**

----------

##### \*\*-Aufgaben zu exponentiellem Wachstum

##-1.041 Die Bevölkerung einer Stadt wächst jährlich um 3 % gegenüber dem Vorjahr. Im Jahr 2000 zählte die Stadt 120000 Einwohner.

a) Erklären Sie, warum das Bevölkerungswachstum durch ein exponentielles Wachstumsmodell beschrieben werden kann.

Schreiben Sie den Anfangswert, den Zuwachsfaktor und die Wachstumsfunktion an.

**[]**

b) Berechnen Sie die Einwohnerzahl für die Jahre 2010, 2050, 2100 und 2200. Interpretieren Sie diese Prognosewerte auf ihre Sinnhaftigkeit.

**[]**

----------

##-1.042 Nach Schätzungen von Experten nimmt der Verkehr auf Österreichs Autobahnen jährlich um 4 % zu.

a) Begründen Sie, warum diese Entwicklung mit einem exponentiellen Modell beschrieben werden kann.

**[]**

b) Erstellen Sie die Wachstumsfunktion.

**[]**

c) Ermitteln Sie, um wie viel Prozent der Verkehr insgesamt in 5, 10, 20, 50 und n Jahren zunimmt.

**[]**

----------

##-1.043 Der Graph zeigt den Verlauf des exponentiellen Abbaus von Koffein im Körper einer Versuchsperson.

{{Grafik: Nicht darstellbar.}}

a) Lesen Sie aus dem Graphen die Anfangsmenge und die Halbwertszeit ab.

b) Erklären Sie die Bedeutung der Halbwertszeit in Worten in Bezug auf den vorliegenden Graphen.

c) Schätzen Sie mithilfe des Graphen, um wie viel Prozent die Koffeinmenge im Körper der Versuchsperson pro Stunde abnimmt.

Sarah trinkt eine Tasse starken Kaffee und hat damit 90 mg Koffein im Körper. Die Halbwertszeit für den Abbau von Koffein beträgt bei Sarah eine Stunde.

d) Modellieren Sie den Abbau des Koffeins im Körper von Sarah in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Stunden) mithilfe einer Exponentialfunktion. Erstellen Sie eine Gleichung der Exponentialfunktion.

j-52 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-1.044 Von einer Anfangsmenge von 6 g des radioaktiven Isotops Ba-140 zerfallen täglich ca. 5,2 %. Ermitteln Sie, wie viel nach 7, 13 und 25 Tagen übrig ist.

**[]**

----------

##-1.045 Nach einer Operation bekommt ein Patient 2,5 mg eines Schmerzmittels verabreicht. Vom Körper werden stündlich jeweils 15 % dieses Schmerzmittels abgebaut. Berechnen Sie die Restmenge nach 1, 2, 3 bzw. t Stunden.

**[]**

----------

##-1.046 Ergänzen Sie die folgende Tabelle für das exponentielle Wachstum mit y(t) =y\_0 \*(1 +i)^t. (Beachten Sie die Vorzeichen!)

Wachstumsfunktion: y(t) =6 \*1,02^t

Startwert: y\_0 =**[]**

1 +i: **[]**

i =**[]** %

y(1): **[]**

Wachstum/Abnahme: **[]**

-----

Wachstumsfunktion: y(t) =**[]**

Startwert: y\_0 =20

1 +i: 0,85

i =**[]** %

y(1): **[]**

Wachstum/Abnahme: **[]**

-----

Wachstumsfunktion: y(t) =10 \*3,4^t

Startwert: y\_0 =**[]**

1 +i: **[]**

i =**[]** %

y(1): **[]**

Wachstum/Abnahme: **[]**

-----

Wachstumsfunktion: y(t) =**[]**

Startwert: y\_0 =**[]**

1 +i: **[]**

i =-50 %

y(1): 0,2

Wachstum/Abnahme: **[]**

----------

##-1.047 Lesen Sie aus den gegebenen Grafiken von exponentiellen Zunahme- und Abnahmefunktionen jeweils den Startwert und die Halbwertszeit bzw. die Verdoppelungszeit ab.

Schreiben Sie die Gleichung der jeweiligen Zunahme- oder Abnahmefunktion in der Form y(t) =y\_0 \*(1 +i)^t und in der Form y(t) =y\_0 \*'e^(k \*t) an.

{{Grafik: Nicht darstellbar.}}

----------

##-1.048 Erstellen Sie für die Funktion f mit f(x) =100 \*'e^(0,05 \*x) im Intervall [0; 50] eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f.

Wählen Sie geeignete Einheiten auf der y-Achse.

----------

##-1.049

a) Erstellen Sie für die Funktion f mit f(t) =y\_0 \*'e^(k \*t) für k =-0,04 und y\_0 =100 eine Wertetabelle von t =0 bis t =50 und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f.

**[]**

b) Erklären Sie allgemein die Bedeutung von y\_0 der Funktion f für den Verlauf des Graphen der Funktion.

**[]**

c) Erklären Sie die Bedeutung des Vorzeichens von k für den Verlauf des Graphen der Funktion f.

**[]**

----------

##-1.050 Ein junger Waldbestand von 50000 m^3 wächst mit einer jährlichen Zuwachsrate von i =4 %.

a) Ermitteln Sie, wie viel Holz in 15 Jahren bei exponentiellem Wachstum zuwächst.

**[]**

b) Ermitteln Sie die Verdoppelungszeit des Holzbestandes.

**[]**

j-53 - Übungsaufgaben

##-1.051 Bei günstigen Bedingungen vermehren sich Bakterien sehr rasch.

Zu Beginn einer Untersuchung bedeckt die Bakterienkultur in einer Nährlösung eine Fläche von 1 cm^2. Die Fläche der Bakterienkultur verdoppelt sich jeweils nach einer halben Stunde.

Berechnen Sie die Fläche, die die Bakterienkultur nach

a) 1 Stunde,

b) 2 Stunden,

c) 1 Tag,

d) 2 Tagen,

e) t Stunden

bedeckt.

**[]**

Interpretieren Sie, wie realistisch die berechneten Werte sind.

**[]**

----------

##-1.052 Die Fläche einer Bakterienkultur verdoppelt sich alle 3 Stunden.

Anfangs bedeckt sie 5 cm^2. Welche Fläche bedeckt sie nach

a) 3 Stunden,

b) 6 Stunden,

c) 9 Stunden,

d) 1 Tag,

e) 2 Tagen und

f) t Stunden?

**[]**

Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die Fläche der Bakterienkultur stündlich wächst.

**[]**

----------

##-1.053 Denksportaufgabe:

Die Fläche, die Seerosen auf einem Teich bedecken, verdoppelt sich jeden Tag. Nach 15 Tagen ist die halbe Seefläche mit Seerosen bedeckt.

Schätzen Sie, wann der ganze Teich mit Seerosen bedeckt ist.

**[]**

----------

##-1.054 In einer Bakterienkultur verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien alle 5 Stunden.

a) Erstellen Sie die Gleichung der Wachstumsfunktion.

**[]**

b) Berechnen Sie das prozentuelle Wachstum der Bakterienkultur pro Stunde.

**[]**

c) Erklären Sie, wie Sie die Anzahl der Bakterien in der Kultur nach 15 Stunden mithilfe der Verdopplungszeit T einfach berechnen können.

**[]**

----------

##-1.055

a) Die Zahl der Bakterien in einer Nährlösung wächst exponentiell.

Um 8:00 Uhr waren es 1000 Bakterien, um 11:00 Uhr sind es 2460 Bakterien.

Berechnen Sie den prozentuellen Zuwachs pro Stunde.

Erstellen Sie eine Wachstumsfunktion.

**[]**

b) Eine Population wächst exponentiell.

Zu Beginn der Untersuchung gab es y\_0 Individuen in der Population, nach n Zeiteinheiten ist die Population auf y\_n Individuen angewachsen. Zeigen Sie, dass für den |prozentuellen Zuwachs pro Zeiteinheit| gilt:

i =((y\_n)/(y\_0))^(1/n) -1

----------

##-1.056

a) Ein Kapital von € 15.000,00 verzinst sich mit i =3,5 %.

Berechnen Sie den Wert des Kapitals nach 10 Jahren.

**[]**

b) Ein Kapital ist nach 5 Jahren bei einem Zinssatz von i =4 % auf € 5.200,00 angewachsen. Berechnen Sie, wie hoch das Kapital zu Beginn war.

**[]**

c) Ein Kapital von € 15.000,00 ist nach 12 Jahren auf € 22.666,00 angewachsen. Ermitteln Sie, zu welchem Prozentsatz es sich verzinst hat.

**[]**

d) Ein Kapital von € 12.000,00 ist bei einem Prozentsatz von i =2,75 % auf € 15.000,00 angewachsen. Bestimmen Sie, wie lange es zinseszinsmäßig verzinst wurde.

**[]**

----------

##-1.057 Ein Kapital von € 10.000,00 wächst jährlich um 4 % (Zinssatz i =4 %).

a) Erstellen Sie die Wachstumsfunktion in der Form y(t) =y\_0 \*(1 +i)^t.

**[]**

b) Erstellen Sie die Wachstumsfunktion in der Form y(t) =y\_0 \*'e^(k \*t).

**[]**

c) Berechnen Sie das Kapital nach 5 Jahren.

**[]**

d) Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren sich das Kapital verdoppelt.

**[]**

e) Ermitteln Sie, wie viele Jahre das Kapital angelegt werden muss, wenn am Ende der Laufzeit € 50.000,00 abgehoben werden sollen.

**[]**

j-54 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-1.058 In einer Nährlösung verdoppelt sich die Bakterienzahl alle zwei Stunden.

a) Erstellen Sie die Wachstumsfunktion in der Form y(t) =y\_0 \*(1 +i)^t.

**[]**

b) Erstellen Sie die Wachstumsfunktion in der Form y(t) =y\_0 \*'e^(k \*t).

**[]**

c) Bestimmen Sie, wie viele Bakterien es 13 Stunden nach Versuchsbeginn gibt, wenn zu Beginn 100 Bakterien in der Nährlösung waren.

**[]**

----------

##-1.059 Der Weltenergieverbrauch verdoppelt sich etwa alle 14 Jahre.

a) Bestimmen Sie die jährliche Zuwachsrate.

**[]**

b) Berechnen Sie, in wie vielen Jahren sich der Energieverbrauch jeweils verdreifacht.

**[]**

c) Erstellen Sie die Wachstumsfunktion in der Form N(t) =N\_0 \*(1 +i)^t.

**[]**

d) Erstellen Sie eine allgemeine Formel für die Verdreifachungszeit, wenn der jährliche Zuwachsfaktor 1 +i gegeben ist.

**[]**

----------

##-1.060 Das Wachstum des Energieverbrauches betrug im Jahr 2000 ca. 1,5 % pro Jahr. Nehmen Sie an, dass der Energieverbrauch in den nächsten Jahrzehnten konstant um 1,5 % pro Jahr wächst.

Berechnen Sie, in welchem Jahr der jährliche Energieverbrauch doppelt so groß wie im Jahr 2000 ist.

**[]**

----------

##-1.061 1976 hatte eine Stadt 120000 Einwohner. Im Jahr 2006 ergab die Volkszählung eine Einwohnerzahl von 180000.

Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Bevölkerung jährlich zugenommen hat.

**[]**

----------

##-1.062 In den letzten Jahrzehnten hat sich die Bevölkerung der Erde etwa alle 40 Jahre verdoppelt. Nehmen Sie an, die Zuwachsrate bleibt in den nächsten Jahrzehnten konstant.

Im Jahr 2000 betrug die Erdbevölkerung 6 Mrd. Menschen.

a) Berechnen Sie die jährliche Zuwachsrate in Prozent.

**[]**

b) Erstellen Sie die Wachstumsfunktion.

**[]**

c) Berechnen Sie, in welchem Jahr 15 Milliarden Menschen auf der Erde leben.

**[]**

d) Ermitteln Sie, wie groß die Erdbevölkerung im Jahr 2020 aufgrund dieser Angaben sein wird.

**[]**

----------

1.063 Die Bevölkerung von Araukarien betrug im Jahr 2010 ca. 7,3 Millionen Menschen. Das jährliche Bevölkerungswachstum beträgt 1,6 %.

a) Bestimmen Sie, in welchem Jahr neun Millionen Menschen in diesem Land wohnen.

**[]**

b) Berechnen Sie, in welchem Jahr 20 Millionen Menschen in Araukarien leben.

**[]**

----------

##-1.064 China und Indien sind die beiden bevölkerungsreichsten Staaten der Erde. China hatte im Jahr 2003 mit 1,2792 Mrd. zwar mehr Einwohner als Indien mit 1,03339 Mrd. Aber Indien hat mit 1,51 % jährlichem Zuwachs eine höhere Wachstumsrate als China mit 0,73 %.

a) Stellen Sie das Bevölkerungswachstum beider Länder für 60 Jahre ab 2003 in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.

**[]**

b) Berechnen Sie, wann die Bevölkerung beider Länder gleich groß sein wird.

**[]**

c) Berechnen Sie, wann die beiden Länder jeweils die 2-Mrd.-Grenze erreichen werden.

**[]**

----------

##-1.065 Beim Zerfall von Radium vermindert sich die Strahlungsintensität nach 1580 Jahren auf die Hälfte.

a) Bestimmen Sie, wie viel Prozent der Anfangsintensität nach 17380 Jahren noch übrig sind.

**[]**

b) Ermitteln Sie, nach wie vielen Jahren die Strahlungsintensität 1 % des Anfangswertes erreicht.

**[]**

c) Berechnen Sie die Strahlungsintensität nach 3000 Jahren.

**[]**

j-55 - Übungsaufgaben

##-1.066 Eine Zerfallsfunktion hat die Gleichung y(t) =y\_0 \*'e^(0,03 \*t) (t in Zeiteinheiten).

a) Erklären Sie, woran Sie erkennen, dass es sich bei der gegebenen Funktion um eine Zerfallsfunktion handelt.

**[]**

b) Ermitteln Sie die Halbwertszeit T\_(1/2).

**[]**

c) Schreiben Sie die Gleichung für diesen Zerfall in der Form y(t) =y\_0 \*(1 +i)^t. Interpretieren Sie die Bedeutung von i.

**[]**

----------

##-1.067 Die Halbwertszeit des radioaktiven Isotops Ba-140 beträgt 13 Tage; d. h., nach 13 Tagen ist nur noch die Hälfte der ursprünglichen Atome vorhanden. Das Zerfallsgesetz lautet N(t) =N\_0 \*'e^('la \*t) (t Zeit in Tagen, N\_0 Anfangsmenge, N(t) Menge nicht zerfallener Atome nach t Tagen).

a) Berechnen Sie 'la.

**[]**

b) Schreiben Sie die Gleichung der Zerfallsfunktion an.

**[]**

----------

1.068 Eine radioaktive Substanz zerfällt nach dem Gesetz:

N(t) =N\_0 \*'e^(-0,028 \*t) (Zeit t in Minuten).

a) Ermitteln Sie die Halbwertszeit dieser radioaktiven Substanz.

**[]**

b) Erklären Sie, warum nach der doppelten Halbwertszeit noch immer ein Viertel des Anfangswertes vorhanden ist.

**[]**

----------

##-1.069 Ein radioaktives Isotop zerfällt nach der Formel N(t) =N\_0 \*'e^('la \*t).

Mithilfe der Formel T\_(1/2) =(ln(2))/(0,5) kann die Halbwertszeit für ein Isotop mit 'la =-0,5 berechnet werden.

Zeigen Sie die Richtigkeit dieser Formel (t in Jahren).

**[]**

----------

T\_(1/2) =(ln(1/2))/('la)

'e^('la) =1 +i

t Zeit in Zeiteinheiten

N(t) Menge in Mengeneinheiten zum Zeitpunkt t

N\_0 Anfangsmenge in Mengeneinheiten

----------

##-1.070 Vom radioaktiven Stoff Barium sind nach 10 Tagen 40 % zerfallen.

Berechnen Sie, wie viel Prozent des Stoffes täglich zerfallen.

Die Berechnung ist händisch durchzuführen und Schritt für Schritt zu dokumentieren.

**[]**

----------

##-1.071 Bei einem Unfall wird radioaktives Jod-131 freigesetzt und zerfällt exponentiell. Die Zerfallskurve ist gegeben.

{{Grafik: Nicht darstellbar.}}

-----

Barium Ba ist ein chemisches Element mit der Ordnungszahl 56.

Es ist ein Erdalkalimetall aus der sechsten Periode. Barium ist im elementaren Zustand metallischglänzend und von silbrig-weißer Farbe. Es kommt in der Natur wegen seiner hohen Reaktivität nicht elementar vor.

-----

a) Lesen Sie aus der Grafik die Halbwertszeit von Jod-131 ab.

**[]**

b) Ermitteln Sie mithilfe der Grafik die Gleichung des Zerfallsgesetzes für Jod-131. Dokumentieren Sie Ihre Vorgangsweise.

**[]**

c) Allgemein kann der radioaktive Zerfall auch durch das Zerfallsgesetz in der Form beschrieben werden:

N(t) =N\_0 \*(1/2)^(t/(T\_(1/2)))

Begründen Sie die Richtigkeit dieser Funktionsgleichung.

**[]**

----------

##-1.072 Von einer Anfangsmenge des radioaktiven Radiums sind nach 100 Jahren noch ca. 96 % vorhanden.

a) Ermitteln Sie das Zerfallsgesetz in der Form y(t) =y\_0 \*'e^(k \*t).

**[]**

b) Ermitteln Sie das Zerfallsgesetz in der Form y(t) =y\_0 \*(1 +i)^t.

**[]**

c) Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren sich eine Anfangsmenge auf 1 % der ursprünglichen Menge verringert hat.

**[]**

d) Ermitteln Sie die Halbwertszeit von Radium.

**[]**

e) Erklären Sie die Bedeutung von i und vergleichen Sie mit dem Wert von k.

**[]**

j-56 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-1.073 Um das Alter organischer Fundstücke zu bestimmen, verwendet man die C-14-Radiokarbonmethode. Das radioaktive Isotop C-14 kommt in jedem lebenden Organismus in einem konstanten Verhältnis zum Kohlenstoff C-12 vor. Nach dem Absterben des Organismus (die Zufuhr von C-14 über die Nahrung wird unterbrochen) nimmt die Konzentration von C-14 im leblosen Körper durch radioaktiven Zerfall ab. Die Halbwertszeit von C-14 beträgt ca. 5730 Jahre.

a) In einem gefundenen Skelett sind noch 10 % des ursprünglichen C-14-Anteiles enthalten. Berechnen Sie das Alter des Skeletts.

**[]**

b) Zeichnen Sie die Zerfallskurve (1 cm entspricht 1000 Jahren).

**[]**

----------

##-1.074 Die Halbwertszeit radioaktiver Stoffe kann nur mit einer gewissen Ungenauigkeit angegeben werden.

Für die Halbwertszeit von C-14 gilt: T\_(1/2) =5730 Jahre +-1 %.

Berechnen Sie den Zeitraum für das Alter des Skelettes mit 10 % des ursprünglichen C-14-Anteiles (siehe letztes Beispiel).

**[]**

----------

##-1.075 Im September 1991 wurde auf über 3000 m Seehöhe in den Ötztaler Alpen eine ausgeaperte Gletscherleiche gefunden. Dieser Fund entpuppte sich als wissenschaftliche Weltsensation, denn Ötzi, wie der "Mann aus dem Eis" liebevoll bezeichnet wurde, erwies sich als wesentlich älter, als ursprünglich vermutet wurde. Durch die C-14-Methode (Halbwertszeit 5730 Jahre) war es möglich, das Alter des Mannes auf etwa 5300 Jahre zu bestimmen und ihn der Jungsteinzeit zuzuordnen.

a) Stellen Sie die Zerfallsfunktion von C-14 in der Form y(t) =y\_0 \*'e^(k \*t) auf.

**[]**

b) Ermitteln Sie die C-14-Konzentration, die bei Ötzi festgestellt wurde.

**[]**

c) In einem gefundenen Skelett sind noch 10 % des ursprünglichen C-14-Anteils enthalten. Berechnen Sie das Alter des Skeletts.

**[]**

d) Zeichnen Sie die Zerfallskurve (1 cm ; 1000 Jahre).

**[]**

-----

Abb.: Seit 1998 ist Ötzi und seiner Zeit im Südtiroler Archäologiemuseum in Bozen eine Ausstellung gewidmet.

----------

##-1.076 Im April 1986 ereignete sich in der ukrainischen Stadt Tschernobyl ein Reaktorunfall, der zu einer der größten Umweltkatastrophen der Menschheit führte. Durch eine Explosion eines Kernreaktors wurden große Mengen an radioaktiven Stoffen in die Atmosphäre geschleudert und in einer radioaktiven Wolke Tausende Kilometer weit über ganz Osteuropa, Skandinavien und Zentraleuropa verteilt. Insgesamt wurde etwa 40 % der Gesamtfläche Europas durch das Isotop Cäsium-137 (Cs-137), das eine Halbwertszeit von 30 Jahren hat, mit mindestens 4 kBq pro m^2 kontaminiert.

a) Erstellen Sie die Zerfallsfunktion der Form N(t) =N\_0 \*'e^('la \*t) von Cs-137. Wählen Sie t =0 für das Jahr 1986, N\_0 =4 kBq/m^2.

**[]**

b) Berechnen Sie, wie hoch die Cs-137-Belastung in kBq/m^2 im Jahr 2010 in diesen kontaminierten Flächen Europas war.

**[]**

c) Noch im Jahr 2000 wurde im Fleisch von Wildtieren eine Konzentration von 9000 Bq/kg gemessen. Der Grenzwert für Lebensmittel beträgt in der EU aber 600 Bq/kg.

Ermitteln Sie, wie lange es dauert, bis die Konzentration auf diesen Grenzwert abgesunken ist.

**[]**

d) Stellen Sie die Abnahme der Cs-137-Strahlung durch eine Wertetabelle und ein Diagramm dar.

Vergleichen Sie den in b) erhaltenen Wert mit Vergleichswerten aus dem Internet.

**[]**

-----

Abb.: Tschernobyl: Der Sarkophag im Mai 2005. Die Stahlbetonhülle hat Risse, durch die Regenwasser ins Innere eindringt. Eine neue Ummantelung ist in Vorbereitung.

Becquerel =1 Bq =1 Zerfall/s. Becquerel ist die Einheit der Aktivität radioaktiver Stoffe.

j-57 - Übungsaufgaben

##-1.077 Unmittelbar nach der Spritzung von Johannisbeeren mit dem Pflanzenschutzmittel |Parathion| lässt sich im Waschwasser eine Konzentration von 1,2 % des Wirkstoffs nachweisen.

20 Tage später ist die Konzentration im Waschwasser noch 0,1 %.

a) Ermitteln Sie die Zerfallskonstante.

**[]**

b) Erstellen Sie die zugehörige Zerfallsfunktion.

**[]**

-----

Parathion (E 605) ist ein Gift.

Im Volksmund wird es als "Schwiegermuttergift" bezeichnet, da es für viele bekannt gewordene Suizide und Morde missbraucht wurde.

E 605 ist seit 2002 in der EU verboten!

----------

##-1.078 In Physikbüchern findet man die barometrische Höhenformel P(h) =p\_0 \*'e^(k \*h).

Nach dieser Formel nimmt der Luftdruck p in Millibar (mbar) mit der Höhe h in km exponentiell ab. p\_0 ist der Luftdruck auf Meeresniveau. Verwenden Sie in diesem Beispiel p\_0 =1000 mbar. Die Erfahrung zeigt, dass sich der Luftdruck in 5,5 km Höhe auf die Hälfte von p\_0 reduziert.

a) Ermitteln Sie die Konstante k.

**[]**

b) Erstellen Sie die Abnahmefunktion für den Luftdruck.

**[]**

c) Berechnen Sie den Luftdruck auf dem Gipfel des Großglockners (3798 m).

**[]**

d) Erstellen Sie eine Tabelle mit den Luftdruckwerten von Meereshöhe bis 10000 m mit einer Schrittweite von 1000 m.

**[]**

e) Stellen Sie den Druckabfall in der Atmosphäre grafisch dar.

**[]**

----------

##-1.079 Ein Chemiker entnimmt einem vollen 50-Liter-Fass 5 Liter Wein und gießt 5 Liter Wasser hinein. Ermitteln Sie, wie viele Liter Wein in dem Fass verbleiben, wenn er auf diese Weise

a) viermal und

**[]**

b) n-mal mischt.

**[]**

----------

##-1.080 Vergessenskurve von Ebbinghaus:

Im 19. Jahrhundert hat der Psychologe Hermann Ebbinghaus festgestellt, dass wir jeweils nach einer halben Stunde die Hälfte eines mühsam eingeprägten Lernstoffs (z. B. Vokabeln) wieder vergessen haben.

Nehmen Sie an, dass Lernende den Lernstoff (die Vokabeln) zunächst zu 100 % beherrschen.

Berechnen Sie, wie viel des Lernstoffs nach

a) einer halben Stunde,

b) einer Stunde,

c) 2 Stunden und

d) t Stunden

noch im Gedächtnis der Lernenden sind.

**[]**

-----

Ebbinghaus experimentierte meist mit sinnlosen Wortepaaren. Der Mensch kann sich aber sinnvolle Wortepaare, wie z. B. Vokabeln besser merken als sinnlose Wortepaare.

Neuere Erkenntnisse zeigen, dass verstandene Prinzipien und Gesetzmäßigkeiten nach 5 Tagen zu etwa 1 % und nach 30 Tagen zu 5 % vergessen wurden.

Gedichte wurden nach 5 Tagen zu 25 % und nach 30 Tagen zu 50 % vergessen.

----------

##-1.081 Versuchsaufbau mit Kunststofffolie:

a) Eine Glasscheibe lässt 85 % des einfallenden Lichts durch.

Berechnen Sie die Lichtintensität nach dem Durchgang durch 2, 3, 4 und n derartige Glasscheiben.

(Bezeichnen Sie die Anfangsintensität mit I\_0 und die Intensität nach dem Durchgang durch n Glasscheiben mit I\_n).

**[]**

b) Berechnen Sie die Dämpfung der Lichtintensität in Dezibel (dB) nach dem Durchgang durch 1, 2, 3 und 10 Glasplatten.

Erklären Sie den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Glasplatten und der jeweiligen Dämpfung.

**[]**

c) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Dämpfung der Lichtintensität in Dezibel (Db) nach dem Durchgang durch n Glasplatten.

**[]**

-----

Dämpfung in dB:

D =10 \*lg((P\_(ein))/(P\_(aus))) =10 \*lg((I\_0)/(I\_n))

Annahme: I\_0 =100 %

j-58 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

Annahme zur Berechnung der Dämpfung:

I(0) =1

I(Halbwertsdicke) =0,5

-----

##-1.082 Beim Durchdringen von Glas verliert ein Lichtstrahl pro Zentimeter Eindringtiefe 7 % seiner Intensität.

a) Erstellen Sie eine Funktion für die Lichtintensität in Prozent der Ausgangsintensität, nach einer Eindringtiefe von x Zentimetern in der Form I(x) =I\_0 \*'e^(k \*x).

x Eindringtiefe des Lichtstrahls in cm

I(x) Intensität des Lichtstrahls in Prozent in einer Eindringtiefe x

I\_0 Anfangsintensität des Lichtstrahles; Annahme I\_0 =100 %

**[]**

b) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Anfangsintensität nach dem Durchdringen von 10 cm Glas noch übrig sind.

Berechnen Sie auch die Dämpfung nach 10 cm Eindringtiefe.

**[]**

c) Die Eindringtiefe, in der sich die Anfangsintensität des Lichtstrahles halbiert, wird als |Halbwertsdicke| bezeichnet.

Berechnen Sie die Halbwertsdicke des vorliegenden Glases.

**[]**

d) Eine Faustregel besagt, dass jeweils nach der Halbwertsdicke die Dämpfung um ca. 3 dB steigt.

Verifizieren Sie diese Regel, indem Sie die Dämpfung nach der einfachen Halbwertsdicke berechnen.

Berechnen Sie weiters die Dämpfung nach der doppelten, dreifachen, n-fachen Halbwertsdicke und vergleichen Sie die Ergebnisse.

**[]**

e) Berechnen Sie, welche Glasdicke ein Lichtstrahl durchdringen muss, wenn sich seine Intensität auf 40 % des Anfangswertes verringern soll.

**[]**

----------

##-1.083 Als |Halbwertsdicke| bezeichnet man die Stärke eines Materials, die notwendig ist, um zum Beispiel Gammastrahlung auf die halbe Intensität zu reduzieren. Für Gammastrahlung hat Beton eine Halbwertsdicke von 9 cm.

a) Ermitteln Sie die Abnahmefunktion der Intensität I von Gammastrahlung in Beton in der Form I(d) =I\_0 \*a^d an, wobei d die Dicke von Beton in cm ist.

Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Gammastrahlung pro cm an Intensität verliert.

Interpretieren Sie die Bedeutung des Wertes von a.

**[]**

b) Aus der Dicke des Betons kann man berechnen, wie gut die Abschirmung der Strahlung ist.

Berechnen Sie, wie viel Prozent der Gammastrahlung eine 30 cm dicke Betonwand durchdringt.

**[]**

c) Ein Bunker soll so gebaut werden, dass Gammastrahlung auf 20 % abgeschwächt wird.

Ermitteln Sie, wie dick die Betonwand gebaut werden muss.

**[]**

d) Zeigen Sie, dass die Dämpfung der Gammastrahlung nach Durchdringen der Halbwertsdicke Beton ca. 3 dB beträgt.

**[]**

----------

##### \*\*-Aufgaben zu beschränktem Wachstum

##-1.084 Eine Pflanze wächst näherungsweise nach dem Gesetz h(t) =2 -a \*'e^(-'la \*t). Dabei ist h(t) die nach t Tagen erreichte Höhe in Metern.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Wachstumsfunktion, wenn beim Keimen die Höhe der Pflanze gleich null war und 40 Tage nach dem Keimen die Höhe der Pflanze 1,2 Meter beträgt.

**[]**

b) Berechnen Sie, wie viele Tage nach dem Keimen die Höhe der Pflanze 1 Meter beträgt.

**[]**

c) Lesen Sie den Maximalwert (Sättigungswert) für die Höhe der Pflanze aus der Gleichung der Wachstumsfunktion ab.

**[]**

-----

Beschränktes Wachstum

y(t) =S -a \*'e^(-'la \*t)

y(t) =S \*(1 -'e^(-'la \*t)) für y\_0 =0

-----

Beschränkte Abnahme

y(t) =S +a \*'e^(-'la \*t)

-----

Sättigungswert S

a =|S -y\_0|

j-59 - Übungsaufgaben

##-1.085 Die Länge einer Zuckerrübe nimmt näherungsweise nach dem Gesetz L(t) =S -a \*'e^(-'la \*t) zu.

Zu Beginn der Untersuchung hat die Zuckerrübe eine Länge von 0,5 cm. Nach etwa 15 Wochen erreicht sie eine Länge von ca. 20 cm.

Nach 20 Wochen hat die Zuckerrübe eine ausreichende Länge erreicht und wird geerntet.

Die maximale Länge der Zuckerrübe beträgt ca. 21 cm.

Stellen Sie die Gleichung der Wachstumsfunktion auf und zeichnen Sie den Funktionsgraphen.

**[]**

----------

##-1.086 Die Grafik in der Randspalte zeigt den täglichen Nahrungsbedarf in kg (Trockenmasse) von Jungstieren von ihrer Geburt bis zum Verkauf nach ca. 18 Monaten.

a) Lesen Sie den täglichen Nahrungsbedarf eines Jungstieres mit 6 Monaten, mit 12 Monaten und mit 18 Monaten aus der vorliegenden Grafik ab.

**[]**

b) Erklären Sie, warum die vorliegende Grafik ein beschränktes Wachstum vermuten lässt.

**[]**

c) Der Bedarf an Futter eines Jungstieres wächst näherungsweise nach der Funktion N mit N(t) =S \*(1 -'e^(-k \*t)).

Der Nahrungsbedarf eines erwachsenen Stieres wird mit maximal ca. 11 kg angegeben.

Der Nahrungsbedarf eines Stieres mit 18 Monaten beträgt laut Grafik ca. 10 kg.

Ermitteln Sie die Funktionsgleichung für den Nahrungsbedarf.

**[]**

d) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion N und zeichnen Sie die in a) aus der gegebenen Grafik abgelesenen Werte und die Sättigungsmenge S in Ihre Grafik ein.

**[]**

----------

##-1.087 Ein in einem Raum mit der Temperatur T\_R =20 °C frei aufgestellter Körper mit der Anfangstemperatur T\_0 =60 °C kühlt ab.

Die Temperatur T(t) ist eine Funktion der Abkühldauer t.

Für die Temperatur des Körpers t Sekunden nach Beginn des Versuches gilt das Newtonsche Abkühlgesetz:

T(t) =T\_R +(T\_0 -T\_R) \*'e^(-k \*t) (k ist eine körper- und stoffabhängige Konstante.)

a) Ermitteln Sie den Wert von k, wenn man weiß, dass die Temperatur des Körpers nach 40 Sekunden auf 40 °C abgesunken ist.

**[]**

b) Berechnen Sie die Temperatur des Körpers nach einer Minute.

**[]**

c) Berechnen Sie die Körpertemperatur nach 10 Minuten.

**[]**

d) Zeichnen Sie die Kurve des Abkühlvorganges.

**[]**

----------

##-1.088 In einem Glas befindet sich Tee mit einer Temperatur von 'de\_2 =80 °C.

Die Umgebungstemperatur liegt bei 'de\_1 =20 °C.

Die Abkühlung erfolgt nach dem Gesetz 'de(t) ='de\_1 +('de\_2 -'de\_1) \*'e^(-0,05 \*t).

t Zeit seit Versuchsbeginn in Minuten

'de(t) Temperatur des Teewassers in °C nach t Minuten

a) Ermitteln Sie die Temperatur des Tees nach 10 min, nach 20 min und nach 1 Stunde.

**[]**

b) Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis der Tee auf Trinktemperatur (40 °C) abgekühlt ist.

**[]**

j-60 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##### \*\*-Aufgaben zu logistischem Wachstum

##-1.089 Eine Pflanze wächst näherungsweise nach dem Gesetz h(t) =2/(1 +4 \*'e^(-k \*t)). Dabei ist h(t) die nach t Tagen erreichte Höhe in Metern.

a) Berechnen Sie k, wenn 40 Tage nach Versuchsbeginn die Höhe der Pflanze 1,2 Meter beträgt.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe h zu Versuchsbeginn (t =0).

**[]**

c) Ermitteln Sie, wie viele Tage nach Versuchsbeginn sich die Höhe der Pflanze verdoppelt hat.

**[]**

d) Zeichnen Sie den Graphen der Wachstumsfunktion h in einem geeigneten Koordinatensystem.

Lesen Sie aus Ihrem Graphen die Anfangshöhe und die maximale Höhe ab.

**[]**

e) Erklären Sie, woran Sie aus der Grafik erkennen, dass ein logistisches Wachstum vorliegt.

**[]**

----------

##-1.090 Eine Pilzkultur wächst näherungsweise nach dem Gesetz A(t) =(100)/(1 +3 \*'e^(-k \*t)).

Dabei ist A(t) die nach t Stunden von den Pilzen bedeckte Fläche in mm^2.

a) Berechnen Sie k, wenn 6 Stunden nach Versuchsbeginn die Fläche 50 mm^2 beträgt.

**[]**

b) Bestimmen Sie, wie groß die Fläche zu Versuchsbeginn (t =0) ist.

**[]**

c) Berechnen Sie, wie viele Stunden nach Versuchsbeginn sich die Fläche der Bakterienkultur verdreifacht hat.

**[]**

d) Zeichnen Sie den Graphen der Wachstumsfunktion A in einem geeigneten Koordinatensystem.

Lesen Sie aus Ihrem Graphen die Anfangsfläche und die maximale Fläche ab.

**[]**

e) Erklären Sie, woran Sie aus der Grafik erkennen, dass ein logistisches Wachstum vorliegt.

**[]**

----------

##-1.091 Ein Baum wächst näherungsweise logistisch. Zu Beginn des Wachstums ist die Höhe y\_0 =50 cm. Die Zeit t wird in Jahren angegeben.

Die Maximalhöhe des Baumes ist 25 Meter.

Nach 5 Jahren ist der Baum 6 Meter hoch.

a) Erstellen Sie die Wachstumsfunktion in der Form y(t) =M/(1 +b \*'e^(-k \*t)).

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe des Baumes nach 10 Jahren.

**[]**

c) Berechnen Sie y(8). Erklären Sie, was y(8) bedeutet.

**[]**

d) Zeichnen Sie den Graphen der Wachstumsfunktion in einem geeigneten Koordinatensystem.

**[]**

e) Erklären Sie, wie Sie aus der Funktionsgleichung y die Maximalhöhe ablesen können.

**[]**

----------

##-1.092 Das Längenwachstum einer Zuckerrübe ist nach dem logistischen Wachstumsmodell zu modellieren.

Zu Beginn der Untersuchung hat die Zuckerrübe eine Länge von 0,5 cm. Nach etwa 15 Wochen erreicht sie eine Länge von ca. 20 cm.

Nach 20 Wochen hat die Zuckerrübe eine ausreichende Länge erreicht und wird geerntet.

Die maximale Länge der Zuckerrübe beträgt ca. 21 cm.

Erstellen Sie die Gleichung der Wachstumsfunktion in der Form L(t) =S/(1 +b \*'e^(-'la \*t)) und stellen Sie diese grafisch dar.

**[]**

----------

##-1.093 Eine Hefepilzkultur wächst in einer 20 cm^2 großen Schale mit Nährlösung und bedeckt ursprünglich eine Fläche von 1 cm^2.

a) Ermitteln Sie, wie lang es bei exponentiellem Wachstum mit 45 % Zuwachsrate pro Stunde dauern würde, bis die Versuchsschale voll ist.

Stellen Sie die Wachstumsfunktion grafisch dar.

**[]**

j-61 - Übungsaufgaben

b) Es wird logistisches Wachstum beobachtet. In der ersten Stunde ist die Zuwachsrate 45 % und wird danach kleiner.

Erstellen Sie eine Wachstumsfunktion in der Form A(t) =S/(1 +b \*c^t) und stellen Sie diese grafisch im Koordinatensystem von a) dar.

**[]**

----------

##-1.094 Im Jahr 1920 wurde von L. Reed und R. Pearl eine Formel publiziert, die die Bevölkerungsentwicklung der USA modellieren sollte:

N(t) =(210)/(1 +51,5 \*'e^(-0,03 \*t))

In dieser Formel bezieht sich t =0 auf das Jahr 1790. Ersetzt man t durch (t -1790) kann die gewünschte Jahreszahl direkt in die neue Formel für N(t) eingesetzt werden (Transformation).

N(t) =(210)/(1 +51,5 \*'e^(-0,03 \*(t -1790)))

Die Pearl-Reed-Formel modelliert das Bevölkerungswachstum der USA bis zum Jahr 1950 recht gut. Ab der Mitte des 20. Jahrhunderts bewirkt eine verstärkte Zuwanderung ein erhöhtes Wachstum.

Mit der neuen Wachstumsformel

N\_1(t) =(557)/(1 +63,16 \*'e^(-0,01982 \*(t -1790))) kann man die neuen Rahmenbedingungen in das neue Modell einbeziehen.

a) Stellen Sie die beiden Wachstumsfunktionen N und N\_1 grafisch dar, und vergleichen Sie mit den real vorliegenden Daten in der Randspalte.

**[]**

b) Berechnen Sie aufgrund des neuen Modells die Bevölkerung der USA im Jahr 2050.

**[]**

c) Ermitteln Sie, wann die Bevölkerung der USA nach dem neuen Modell die 300-Mio.-Grenze überschritten hat.

**[]**

-----

|Bevölkerung der USA zwischen 1800 und 2000|

Nach Angaben des Census Büros entwickelte sich die Bevölkerung folgendermaßen:

Jahr | Bevölkerung

1800 | 5096908

1850 | 23100218

1900 | 74885943

1950 | 150697361

2000 | 281421906

-----

Historischer Hintergrund:

1783: Frieden von Paris; die Souveränität der Vereinigten Staaten wird anerkannt.

1789: Aus einem lockeren Staatenbund wird ein Bundesstaat. George Washington wird zum ersten Präsidenten gewählt.

----------

##### \*\*-Gemischte Aufgaben

##-1.095 Im Jahr 1980 betrug die Erdbevölkerung ca. 4,5 Mrd. Menschen.

a) Stellen Sie die Wachstumsfunktion der Erdbevölkerung grafisch dar, wenn man ein jährliches Wachstum von 1,53 % annimmt.

**[]**

b) Ermitteln Sie die Wachstumsfunktion mit y(t) =M/(1 +b \*'e^(-k \*t)), wenn man annimmt, dass die Erdbevölkerung im Jahr 1999 die 6-Mrd.-Grenze überschritten hat und die Erdbevölkerung die 20-Mrd.-Grenze nicht übersteigt.

**[]**

c) Berechnen Sie mit der Wachstumsfunktion aus b) die Erdbevölkerung für das Jahr 2020.

**[]**

----------

##-1.096 Anna und Berta besuchen eine höhere Schule mit 700 Schüler/innen. Aus Langeweile setzen die beiden ein Gerücht in die Welt.

Zu Beginn kennen nur 2 Personen (Anna und Berta) das Gerücht.

Das Gerücht verbreitet sich aber sehr schnell an der Schule und nach einem Tag kennen bereits 128 Schüler/innen den Inhalt.

a) Modellieren Sie die Ausbreitung des Gerüchtes nach dem exponentiellen Wachstum.

Ermitteln Sie die Gleichung der Wachstumsfunktion und stellen Sie diese in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

**[]**

b) Modellieren Sie die Ausbreitung des Gerüchtes nach dem begrenzten Wachstumsmodell.

Ermitteln Sie die Gleichung der Wachstumsfunktion und stellen Sie diese im Koordinatensystem von a) dar.

Beachten Sie, dass maximal 700 Schülerinnen an der Schule sind.

**[]**

c) Modellieren Sie die Ausbreitung des Gerüchtes nach dem logistischen Wachstumsmodell.

Ermitteln Sie die Gleichung der Wachstumsfunktion und stellen Sie diese im Koordinatensystem von a) dar.

**[]**

d) Argumentieren Sie, welches der drei Wachstumsmodelle die Gegebenheiten am besten beschreibt.

**[]**

j-62 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-1.097 Die Transitlawine rollt! "Die von der EU-Kommission vorgeschlagene Lockerung des Transitvertrags wird in Österreich zu beträchtlichen Lkw- Zuwächsen führen." (aus: Tiroler Tageszeitung, 22./23. 12. 2001)

Die ökopunktepflichtigen Lkw-Transitfahrten sind von 1,06 Millionen im Jahr 1991 auf ca. 2 Millionen im Jahr 2012 gestiegen, obwohl als Obergrenze im Transitvertrag 1,61 Millionen vereinbart waren.

(siehe Grafiken)

Transitlawine rollt

Ökopunktepflichtige Lkw-Transitfahrten in Millionen

1991: 1,06

1995: Obergrenze laut Transitvertrag: 1,61

2000: 1,70 (Wert laut EU-Kommission niedriger APA)

Quelle: Transitform

-----

LKW-Fahrten Brennerautobahn

2012: 2,0 Mio.

2011: 1,97 Mio.

2010: 1,9 Mio.

2009: 1,81 Mio.

83 % Transit

-----

a) Berechnen Sie unter der Annahme eines linearen Wachstums den jährlichen absoluten Zuwachs an Transitfahrten.

Schreiben Sie die Gleichung der linearen Wachstumsfunktion y\_1 an. Berechnen Sie, wann die vereinbarte Obergrenze von 1,61 Mio. nach dem linearen Modell überschritten wurde.

Berechnen Sie die Anzahl der Lkw-Fahrten, die im Jahr 2020 bei linearem Zuwachs zu erwarten sind.

**[]**

b) Schreiben Sie die Gleichung der exponentiellen Wachstumsfunktion y\_2 an.

Berechnen Sie unter der Annahme eines exponentiellen Wachstums den jährlichen prozentuellen Zuwachs und die Verdoppelungszeit.

**[]**

Berechnen Sie, wann die vereinbarte Obergrenze von 1,61 Mio. Lkw-Fahrten nach dem exponentiellen Modell überschritten wurde. Berechnen Sie die Anzahl der Lkw-Fahrten, die im Jahr 2020 bei exponentiellem Wachstum zu erwarten sind.

**[]**

c) Experten schätzen, dass die Kapazitätsgrenze S der Brennerautobahn mit 3 Mio. Lkw-Fahrten gegeben ist.

Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion y\_3 des begrenzten Wachstums mit y\_3(t) =S -c \*'e^(k \*t).

Berechnen Sie, wann die vereinbarte Obergrenze von 1,61 Mio. Lkw-Fahrten nach dem Modell des begrenzten Wachstums überschritten wurde.

**[]**

Berechnen Sie die Anzahl der Lkw-Fahrten, die im Jahr 2020 bei begrenztem Wachstum zu erwarten sind.

**[]**

d) Experten schätzen, dass die Kapazitätsgrenze S der Brennerautobahn mit 3 Mio. Lkw-Fahrten gegeben ist.

Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion y\_4 des logistischen

Wachstums mit y\_4(t) =S/(1 +b \*'e^(-k \*t)).

Ermitteln Sie, wann die vereinbarte Obergrenze von 1,61 Mio. Lkw-Fahrten nach dem logistischen Wachstumsmodell überschritten wurde.

Berechnen Sie die Anzahl der Lkw-Fahrten, die im Jahr 2020 bei logistischem Wachstum zu erwarten sind.

**[]**

e) Stellen Sie alle vier Wachstumsfunktionen aus a) bis d) in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar und argumentieren Sie, welches Modell Ihrer Meinung nach die Entwicklung am besten beschreibt.

**[]**

j-63 - Übungsaufgaben

##-1.098 Modellieren Sie das Wachstum der Weltbevölkerung unter Verwendung der Daten von 1950 und 2000 und erstellen Sie Prognosen für die Zukunft.

Weltbevölkerung insgesamt in Mio.

1262 | 1650 | 2520 | 6057 | 9322

1850 | 1900 | 1950 | 2000 | 2050

-----

a) Berechnen Sie unter der Annahme eines linearen Wachstums den jährlichen absoluten Zuwachs der Weltbevölkerung.

Berechnen Sie, wie viele Menschen 2050 bei linearem Zuwachs zu erwarten sind.

Ermitteln Sie, wann die 10-Mrd.-Grenze überschritten wird.

**[]**

b) Berechnen Sie unter der Annahme eines exponentiellen Wachstums den jährlichen prozentuellen Zuwachs und die Verdoppelungszeit der Weltbevölkerung.

Bestimmen Sie, wie viele Menschen 2050 bei exponentiellem Zuwachs zu erwarten sind.

Ermitteln Sie, wann die 10-Mrd.-Grenze überschritten wird.

**[]**

c) Experten schätzen, dass die Kapazitätsgrenze M der Weltbevölkerung bei 12 Mrd. liegt.

Ermitteln Sie die Gleichung der logistischen Wachstumsfunktion

y(t) =M/(1 +b \*'e^(-k \*t)).

Berechnen Sie, wie viele Menschen 2050 bei logistischem Zuwachs zu erwarten sind.

Ermitteln Sie, wann die 10-Mrd.-Grenze überschritten wird.

**[]**

----------

##-1.099 Aufgabenstellung wie 1.098 c) für Nordamerika: Kapazitätsgrenze 800 Mio. Berechnen Sie, wann bei logistischem Wachstum die 600-Mio.-Grenze erreicht wird.

Nordamerika:

1850: 26

1900: 82

1950: 172

2000: 314

2050: 438

----------

##-1.100 Um das Wachstum einer Hefekultur zu untersuchen, wird deren Masse in regelmäßigen Abständen gemessen.

Für die Masse m gilt die Wachstumsfunktion:

m(t) =(670)/(1 +66 \*'e^(-0,53 \*t))

t Zeit in Stunden

m(t) Masse in Gramm nach t Stunden

Der Graph der Funktion m ist in der Randspalte dargestellt.

a) Berechnen Sie den Anfangswert m\_0 und ermitteln Sie den Sättigungswert S.

**[]**

b) Erklären Sie mithilfe der Grafik, warum es sich hier um eine logistische Wachstumsfunktion handelt.

**[]**

j-64 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-1.100

c) Lesen Sie aus der Grafik den absoluten Zuwachs in den ersten 10 Stunden ab.

Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe der Funktionsgleichung.

**[]**

d) Berechnen Sie, wann die Masse der Hefekultur 600 Gramm übersteigt.

**[]**

e) Anton möchte herausfinden, wann die Masse der Bakterienkultur 500 Gramm beträgt.

Er macht dazu folgende fehlerhafte Umformung:

500 =(670)/(1 +66 \*'e^(-0,53 \*t)) |\*(1 +66 \*'e^(-0,53 \*t))

500 \*(1 +66 \*'e^(-0,53 \*t)) =670 |/500

1 +66 \*'e^(-0,53 \*t) =1,34 |-1

66 \*'e^(-0,53 \*t) =0,34 |ln

ln(66 \*'e^(-0,53 \*t)) =ln(0,34)

-0,53 \*t \*ln(66 \*'e) =ln(0,34) |/(-0,53 \*ln(66 \*'e))

t =(ln(0,34))/(-0,53 \*ln(66 \*'e))

Finden Sie den Fehler und stellen Sie die Umformung richtig.

----------

##### \*\*-Ziele erreicht?

##-Z 1.1 Die gegebenen Wertetabellen enthalten Punkte von Exponentialfunktionen der Form y =c \*a^x.

Schreiben Sie jeweils die passende Gleichung an.

a)

x | f(x)

1 | 6

2 | 18

3 | 54

4 | 162

-----

b)

x | f(x)

-1 | 2

1 | 0,5

3 | 0,125

5 | 0,03125

----------

##-Z 1.2 Vervollständigen Sie die Tabelle mit den Eigenschaften der jeweiligen Exponentialfunktion.

y =3 \*2^x

Monotonie: **[]**

Schnittpunkt mit y-Achse: **[]**

Prozent der Zu-/Abnahme: **[]**

-----

y =0,5 \*1,9^x

Monotonie: **[]**

Schnittpunkt mit y-Achse: **[]**

Prozent der Zu-/Abnahme: **[]**

-----

y =0,8^x

Monotonie: **[]**

Schnittpunkt mit y-Achse: **[]**

Prozent der Zu-/Abnahme: **[]**

-----

y =0,005^x

Monotonie: **[]**

Schnittpunkt mit y-Achse: **[]**

Prozent der Zu-/Abnahme: **[]**

----------

##-Z 1.3 Ermitteln Sie mithilfe der Grafik in der Randspalte die fehlenden Parameter der Funktionen.

a) f(x) =c \*a^x +2

b) g(x) =2 \*a^x +d

j-65 - Ziele erreicht?

##-Z 1.4 Die reelle Funktion f mit f(x) =c \*a^x mit a >1 und c \=0 ist eine Exponentialfunktion.

Iris stellt fünf Behauptungen auf, die ihrer Meinung nach für diese Exponentialfunktion gelten. Leider sind nur zwei dieser Behauptungen richtig.

Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen an und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Behauptung | Begründung

**[]** f(0) =0 | **[]**

**[]** f(x +1) =a \*f(x) | **[]**

**[]**f(x +h) =h \*f(x) | **[]**

**[]** f(k \*x) =k \*f(x) | **[]**

**[]** (f(x +h))/(f(x)) =a^h | **[]**

----------

##-Z 1.5 Wählen Sie aus der Grafik in der Randspalte die zur Funktion f mit f(x) =2^x passende Logarithmusfunktion.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

**[]**

----------

##-Z 1.6 Lösen Sie die Gleichung 3^x =2 grafisch näherungsweise mithilfe beider Graphen.

{{Grafik: Nicht darstellbar.}}

Erklären Sie den Zusammenhang zwischen den beiden dargestellten Funktionen.

**[]**

----------

##-Z 1.7 Kreuzen Sie jene Gleichung an, die zu der Exponentialgleichung 5^(2x -1) =25^(3x +2) äquivalent ist.

Begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie die zur Umformung der ursprünglichen Gleichung nötigen Rechenschritte dokumentieren.

**[]** 2x -1 =3x +2

**[]** 2x -1 =6x +4

**[]** 2x -1 =1,5x +1

----------

##-Z 1.8 Begründen Sie, welche der gegebenen Gleichungen keine Lösung hat. Lösen Sie die beiden anderen Gleichungen für x 'el 'R.

a) 16^x =2^x \*8

b) 10^(5x -2) =3 \*7^(2x +3)

c) 2^(x +3) =-9

----------

Z 1.9 Berechnen Sie die Unbekannte x ohne technologische Hilfsmittel und begründen Sie ihr Ergebnis mithilfe der passenden Exponential- oder Potenzgleichung.

a) log\_2(2^x) =6

b) log\_x(81) =2

c) log\_(10)(1/x) =1

d) ln\_('w('e)) =x

j-66 - Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-Z 1.10 Kreuzen Sie die richtige Gleichung an. Begründen Sie, warum die anderen Gleichungen falsch sind und stellen Sie diese richtig.

**[]** 1/2 \*lg(x) -1/2 \*lg(y) -1/2 \*lg(z) =lg('w(x -y -z))

**[]** 2 \*lg(x) -3 \*lg(y) +lg(z) -1 =lg((x^2 \*z)/(10 \*y^3))

**[]** lg(x) +2 =lg(20x)

----------

##-Z 1.11 Die Stärke von Erdbeben wird anhand des Ausschlags A\_(max) eines Seismographen gemessen. Die dabei ermittelte Magnitude M wird meist nach der Richterskala angegeben. Es gilt der Zusammenhang:

M =log\_(10)((A\_(max))/(A\_0))

A\_(max) maximaler Ausschlag des Seismographen in 'mym

A\_0 Ausschlag eines Bebens der Magnitude M =0 in 'mym

a) In einem amerikansichen Schulbuch findet sich für den Zusammenhang der Magnitude M eines Erdbebens und dessen verursachten Ausschlags am Seismographen die Formel

M =(ln(A\_(max) -ln(A\_0))/(ln(10))

Zeigen Sie durch entsprechende Umformung, dass diese Formel zur im deutschsprachigen Raum verwendeten, oben angeführten Formel äquivalent ist.

**[]**

b) Argumentieren Sie, wie sich der maximale Ausschlag A\_(max) am Seismographen verändert, wenn nach einem Beben der Stärke M ein Nachbeben der Stärke M -2 folgt.

**[]**

----------

##-Z 1.12 Begründen Sie, welches Modell (linear oder exponentiell) jeweils zum angegebenen Sachverhalt passt und erstellen Sie eine passende Funktionsgleichung.

a) Im Jahr 2015 betrug der Preis einer Ware € 145,00. Seither steigt der Preis jährlich um 0,5 %.

**[]**

b) Martin erhielt zu seinem 5. Geburtstag von seinen Großeltern € 50,00. In den folgenden Jahren ist der Wert des Geburtstagsgeschenks jedes Jahr um € 10,00 erhöht worden.

**[]**

c) Die Anzahl der Tiere einer Walpopulation hat sich alle 5 Jahre halbiert. Ursprünglich wurden 500 Tiere gezählt.

**[]**

----------

##-Z 1.13 Von ursprünglich 300 mg eines radioaktiven Isotops sind nach 8 Tagen noch 200 mg in der Probe enthalten.

a) Berechnen Sie die prozentuelle Abnahme der Stoffmenge pro Tag.

**[]**

b) Erstellen Sie eine passende Funktionsgleichung in der Form y(t) =c \*'e^('la \*t).

**[]**

c) Berechnen Sie die vorhandene Stoffmenge nach 16 Tagen.

**[]**

d) Erklären Sie den Begriff Halbwertszeit und berechnen Sie die Halbwertszeit des vorliegenden radioaktiven Zerfalls.

**[]**

----------

##-Z 1.14 Beim Reaktorunfall in Tschernobyl 1984 wurde unter anderem der radioaktive Stoff Cs-137 freigesetzt. Dieser Stoff hat eine Halbwertszeit von ca. 30 Jahren. Anton behauptet: "Da der Unfall 1984 passiert ist, müsste nach 60 Jahren, also 2044 kein Cs-137 in der Umgebung von Tschernobyl mehr existieren." Erklären Sie, welchen Fehler Anton in seiner Behauptung macht.

**[]**

----------

##-Z 1.15 Ein exponentieller Vorgang wird durch die Funktion f mit f(t) =125 \*2,35^t beschrieben.

Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 125.

Erklären Sie, ob f ein exponentielles Wachstum oder eine exponentielle Abnahme beschreibt und lesen Sie aus der Gleichung ab, um wie viel Prozent sich der Funktionswert bei der Erhöhung von t um eine Einheit verändert.

j-67 - Ziele erreicht?

##-Z 1.16 Eine Pilzkultur wächst näherungsweise nach dem Gesetz

A(t) =(100)/(1 +3 \*'e^(-k \*t)).

t Zeit in Stunden

A(t) die nach t Stunden bedeckte Fläche in mm^2

a) Wählen Sie aus der Grafik in der Randspalte den zu diesem Gesetz passenden Graphen. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

**[]**

b) Begründen Sie anhand des Verlaufs des Graphen, welches Wachstumsmodell vorliegt.

**[]**

c) 3 Stunden nach Versuchsbeginn nimmt die Pilzkultur eine Fläche von 50 mm^2 ein. Helene möchte mithilfe dieser Information die Unbekannte k in der angegebenen Wachstumsformel bestimmen.

Sie rechnet:

50 =(100)/(1 +3 \*'e^(-3 \*k)).

(50)/(100) =1 +3 \*'e^(-3 \*k)

-1/2 =3 \*'e^(-3 \*k)

-1/6 ='e^(-3 \*k)

ln(-1/6) =-3 \*k

k =-1/3 \*ln(-1/6) =ERROR

Erklären Sie, welchen Fehler Helene gemacht hat und stellen Sie die Rechnung richtig.

Begründen Sie, warum Helenes Taschenrechner eine Fehlermeldung ausgibt.

**[]**

d) Berechnen Sie, welche Fläche die Pilzkultur nach 10 Stunden einnimmt, wenn k =0,3663 beträgt.

**[]**

----------

##-Z 1.17 Der Graph in der Randspalte beschreibt den Zusammenhang zwischen der Temperatur einer Flüssigkeit in Grad Celsius (°C) in Abhängigkeit der Zeit t in Minuten (min).

a) Erstellen Sie eine passende exponentielle beschränkte Abnahmefunktion T mit T(t) =S +a \*'e^(-'la \*t).

Lesen Sie die dazu benötigten Informationen aus dem Graphen ab.

{{Grafik: Nicht darstellbar.}}

b) Die Temperatur der Flüssigkeit kann die ihrer Umgebung nicht unterschreiten.

Zeigen Sie, dass die in a) erstellte Funktion dieser Tatsache gerecht wird. Hinweis: Zeigen Sie, dass beispielsweise T(t) =10 nicht definiert ist.

j-68 - Zinsen und Zinseszinsen

## \*\*-2 Zinsen und Zinseszinsen

Unter Finanzmathematik versteht man die Anwendung mathematischer Methoden auf die Probleme des Bank- und Kreditwesens. Bei diesen Problemen spielen |Zinsen| eine entscheidende Rolle. Als Zinsen bezeichnet man die Vergütung, die für das Ausleihen einer Geldsumme zu leisten ist.

In der Antike stellte der Philosoph Aristoteles (384 bis 322 v. Chr.) der Ökonomik die Chrematistik entgegen, die unbegrenzte Anhäufung von Geld und Reichtum. Dies ist für Aristoteles unnatürlich und verwerflich.

Auch in der mosaischen Gesetzgebung war es verboten, Zinsen zu nehmen:

"Du darfst von deinem Bruder keine Zinsen nehmen: weder Zinsen für Geld noch Zinsen für Getreide noch Zinsen für sonst etwas, wofür man Zinsen nimmt."

(Deuteronomium, 23, 20)

-----

Dieses Zinsverbot wurde vom Christentum übernommen und erst im 18. Jahrhundert aufgehoben. Altindische Werke rechnen jedoch mit einem außerordentlich hohen Zinssatz von ca. 60 %. Im heidnischen Rom war es ebenfalls üblich Zinsen zu verlangen, Zinseszinsen waren jedoch verboten. Zur Zeit Ciceros war die gesetzlich zulässige Höchstgrenze des Zinses 48 % jährlich. Kaiser Justinian setzte sie später mit 1/2 % je Monat (6 % jährlich) fest.

Vom 12. bis zum 14. Jahrhundert wurde in ganz West- und Mitteleuropa Zinsnehmen üblich. In Österreich ist das Einheben von Zinsen seit dem Jahre 1111 erlaubt. Politische Krisen bewirken stets ein Hinaufschnellen des Zinssatzes, in Zeiten des Wohlstandes ist er besonders niedrig. Im Reichsgesetz von 1868 wurde in Österreich das Nehmen von Zins und Zinseszins gestattet, und zwar nach zwei Usancen: die |dekursive Usance|, bei der die Zahlung der Zinsen nach Ablauf der Ausleihdauer erfolgt, und die antizipative Usance, die ein Relikt der Umgehung des früheren Zinsverbotes darstellt (von 100 Einheiten ausgeliehenen Kapitals wurden z. B. nur 96 ausgezahlt, aber 100 zurückverlangt). Dieses Gesetz bildete die Voraussetzung für die Entwicklung der Finanzmathematik im heutigen Sinn.

Die derzeitige Rechtsgrundlage für die Berechnung von Spareinlagen ist das |Bankwesengesetz| (BWG) 1994/2002 und das |Verbraucherkreditgesetz| (VKrG) 2010.

----------

Tipp: Auch bei der Überlassung einer Wohnung spricht man manchmal von Zins: Mietzins.

census: lateinisch für Vermögen

-----

"So ist der Wucher hassenswert, der aus dem Gelde selbst den Erwerb zieht und nicht aus dem, wofür das Geld da ist. Denn das Geld ist um des Tausches willen erfunden worden, durch den Zins vermehrt es sich aber durch sich selbst. (...) Durch den Zins entsteht Geld aus Geld. Diese Art des Gelderwerbs ist also am meisten gegen die Natur."

(aus: Aristoteles: Politik, 1. Buch, 1258 b)

-----

usance: französisch für Brauch, Gepflogenheit

dekursiv: im Nachhinein

decurrere: lateinisch für herablaufen

antizipativ: im Vorhinein

anticipare: lateinisch für vorwegnehmen

----------

##### \*\*-Meine Ziele

Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

* die einfache dekursive Verzinsung und die dekursive Verzinsung mittels Zinseszins für ganz- und unterjährige Zinsperioden sowie die stetige Verzinsung beschreiben,
* mit einfachen Zinsen und mit Zinseszinsen Barwert, Endwert, Zinssatz und Verzinsungsdauer berechnen,
* nominelle und äquivalente Zinssätze und den Effektivzinssatz unterscheiden und berechnen,
* Zahlungsströme bewerten, vergleichen und auf einer Zeitachse darstellen,
* Verzinsungsmodelle kontextbezogen anwenden.

----------

##### \*\*-Worum geht's hier?

So berechnet die Bank die |Zinsen bei Sparbüchern|: Am Ende jeden Jahres werden die Zinsen berechnet und die Kapitalertragssteuer (KESt) wird davon subtrahiert. Der Rest wird zum Kapital addiert und bildet die Berechnungsgrundlage für die Zinsen des neuen Jahres.

Am 7. 5. 2016 wurden auf ein neues Sparbuch 10.000,00 Euro eingezahlt. Der Jahreszinssatz beträgt 3 % und die KESt 25 %. Am 18. 8. 2017 wird das Gesamtguthaben samt Zinsen abgehoben.

Berechnen Sie den gesamten Zinsertrag sowie den Abhebungsbetrag.

Die Verzinsung beginnt am 8. 5. 2016 und endet am 17. 8. 2017.

----------

Tipp: Erträge aus Kapitalvermögen unterliegen der Einkommenssteuer, die als Kapitalertragssteuer (KESt) direkt von den Finanzinstituten eingehoben wird.

In Österreich beträgt die KESt derzeit 25 %.

j-69 - Grundbegriffe

Für den Zeitraum vom 8. 5. 2016 bis 31. 12. 2016 erhält man 23 +30 \*7 =233 Zinstage

Die Zinsen berechnet man für K =€ 10.000,00, p =3 und T =233 nach der Tageszinsformel

Z =(K \*p \*T)/(36000) =(10000 \*3 \*233)/(36000) =19417.

Abzüglich 25 % KESt erhält man also € 145,63 Zinsen.

Diese Zinsen werden am 31. 12. 2016 zum Kapital addiert und mit diesem ab 1. 1.2017 verzinst. Für den Zeitraum vom 1. 1. 2017 bis 17. 8. 2017 erhält man 17 +30 \*7 =227 Zinstage (die Zinsen für den 1. 1.2017 werden bezahlt).

Für K =€ 10.145,63, p =3 und T =227 erhält man

Z =(10145,63 \*3 \*227)/(36000) =191,92.

Abzüglich 25 % KESt ergibt dies € 143,94 Zinsen, die auf dem Sparbuch gutgeschrieben werden.

Der gesamte Zinsertrag beträgt daher € 145,63 +€ 143,94 =€ 289,57.

Der Kontostand am 18. 8. 2017 beträgt € 10.289,57.

----------

Hinweis: Jeder Monat wird mit 30 und das Jahr mit 360 Tagen gerechnet (deutsche Usance).

Bei Spareinlagen erhält man nach § 32 (7) BWG weder für den Tag der Einzahlung noch für den Tag der Auszahlung Zinsen.

Zinsfuß p =3

Zinssatz i =3 % =0,03

----------

### \*\*-2.1 Grundbegriffe

|Definition: Kapital, Barwert, Endwert|

* |Kapital| bedeutet in der Finanzmathematik einen Betrag in einer bestimmten Währung, der zu einem gegebenen Zeitpunkt fällig ist.
* Der |Barwert| eines Kapitals, Present Value PV, ist der Wert des Kapitals am Anfang eines gegebenen (Verzinsungs-)Zeitraumes.
* Der |Endwert| eines Kapitals, Final Value (Future Value) FV, ist sein Wert am Ende eines gegebenen (Verzinsungs-)Zeitraumes.

----------

Das Konzept des Time-Value-of-Money ist zentral für das Finanzwesen:

* A dollar today is worth more than a dollar in a year.
* A dollar in a year is worth less than a dollar today, because the opportunity to earn interest is foregone.

Because prices rise, future dollars are generally worth less than present dollars.

----------

Ein Kapital von € 1.000,00 heute (Barwert) ist bei einem Zinssatz von 5 % in einem Jahr um € 50,00 Zinsen mehr wert, also € 1.050,00 (Endwert).

Es ist daher notwendig anzugeben, wann € 1.000,00 fällig sind.

Veranschaulichung durch eine Zeitachse:

K\_0 -> aufzinsen -> K\_n (0 -> n)

K\_n -> abzinsen -> K\_0 (n -> 0)

K\_0 Barwert (PV) von K\_n

K\_n Endwert (FV) von K\_0

n Verzinsungsdauer

In den folgenden Formeln wird die |Verzinsungsdauer| n stets |in Jahren| angegeben.

-----

|Zeitachse|

Zahlung an die Bank: negatives Vorzeichen

Zahlung von der Bank: positives Vorzeichen

Modell mit Zeitachse:

Zahlung vom Geldnehmer zum Geldgeber: negatives Vorzeichen

Zahlung vom Geldgeber zum Geldnehmer: positives Vorzeichen

Das Fähnchen definiert den Bezugszeitpunkt, auf den alle Zahlungen aufgezinst oder abgezinst werden.

j-70 - Zinsen und Zinseszinsen

|Definition: Begriffe der Zinsrechnung|

* Die |Zinsen| sind der Betrag, der als Vergütung für das entliehene Kapital für einen vereinbarten Zeitraum bezahlt wird.

Die Zinsen sind die Differenz zwischen End- und Anfangskapital: Z =K\_n -K\_0

* Der Zeitpunkt der Fälligkeit der Zinsen heißt |Zinstermin|. Der Zeitraum zwischen zwei aufeinander folgenden Zinsterminen heißt Zinsperiode.
* Der |Zinssatz| gibt an, wie viel für eine Währungseinheit des Kapitals und für eine Zinsperiode als Zinsen zu verrechnen ist. Diese Angabe erfolgt in Prozent des Kapitals.
* |Kapitalisieren| der Zinsen heißt, am Fälligkeitstag die Zinsen zum Kapital zu addieren.

----------

|Definition: Ganzjährige und unterjährige Verzinsung|

* Die Verzinsung heißt |ganzjährig|, wenn die Zinsperiode ein Jahr beträgt.
* Die Verzinsung heißt |unterjährig|, wenn die Zinsperiode ein Jahresbruchteil ist, d. h., mehrmals pro Jahr verzinst wird.

Üblich sind 2 (Semesterverzinsung), 4 (Quartalsverzinsung) oder 12 (Monatsverzinsung) Zinstermine pro Jahr.

-----

Tipp: Für ganzjährige Zinssätze verwendet man den Zusatz "p. a."

(pro anno: lateinisch für pro Jahr).

----------

|Definition: Dekursive und antizipative Verzinsung|

* Die Verzinsung heißt |dekursiv (im Nachhinein)|, wenn die Zinsen vom Anfangskapital berechnet und am Ende der Zinsperiode fällig werden:

Endkapital =Anfangskapital +Zinsen

K\_n =K\_0 +Z

* Die Verzinsung heißt |antizipativ (im Vorhinein)|, wenn die Zinsen vom Endkapital berechnet und am Anfang der Zinsperiode fällig werden:

Anfangskapital =Endkapital -Zinsen

K\_0 =K\_n -Z

----------

Den dekursiven Zinssatz bezeichnen wir mit i =p/(100) (von englisch: interest),

den antizipativen Zinssatz mit d (von englisch: discount).

-----

Zinsfuß p =5

Zinssatz i =5 % =0,05

----------

##-Beispiel 2.1: Dekursive und antizipative Verzinsung

Frau Arnold nimmt einen Kredit über € 100.000,00 mit einer Laufzeit von einem Jahr und einer Verzinsung von 5 % auf.

* Bei dekursiver Verzinsung i =5 % wird das Kapital € 100.000,00 ausbezahlt.

Nach einem Jahr werden das Kapital und die Zinsen (€ 5.000,00) zurückbezahlt, insgesamt € 105.000,00.

K\_1 =K\_0 +Z =100000 +5000 =105000

* Bei antizipativer Verzinsung d =5 % werden vom Kapital € 100.000,00 die Zinsen € 5.000,00 abgezogen und € 95.000,00 ausbezahlt.

Nach einem Jahr werden € 100.000,00 zurückbezahlt.

K\_0 =K\_1 -Z =100000 -5000 =95000

In beiden Fällen betragen die Zinsen € 5.000,00.

Der Unterschied liegt im Zeitpunkt der Zahlung der Zinsen.

----------

Im Bankwesen wird fast ausschließlich die dekursive Verzinsung verwendet.

Von entscheidender Bedeutung ist die Art des Zinszuschlags.

----------

|Definition: Einfache Zinsen, Zinseszinsen|

* Bei |einfachen Zinsen| werden die Zinsen einmalig für die gesamte Verzinsungsdauer kapitalisiert.
* Bei |Zinseszinsen| werden die Zinsen zu jedem Zinstermin kapitalisiert und dann mitverzinst.

j-71 - Grundbegriffe

Insgesamt können wir die Zinsrechnung nach |drei Merkmalen| einteilen:

Zinszuschlag:

* einfache Zinsen

Die Zinsen werden am Ende der Verzinsungsdauer kapitalisiert.

* Zinseszinsen

Die Zinsen werden zu jedem Zinstermin kapitalisiert.

-----

Verzinsungsperiode:

* ganzjährige Verzinsung

Zinsperiode ist ein Jahr.

* unterjährige Verzinsung

Zinsperiode ist ein Jahresbruchteil.

-----

Zinsfälligkeit:

* dekursiv (im Nachhinein)

Endkapital =Anfangskapital +Zinsen

* antizipativ (im Vorhinein)

Anfangskapital =Endkapital -Zinsen

----------

|Zeit ist Geld - ein Leitmotiv des Puritanismus:|

"Bedenke, dass Zeit Geld ist; wer täglich zehn Schilling durch seine Arbeit erwerben könnte und den halben Tag spazieren geht oder auf seinem Zimmer faulenzt, der darf, auch wenn er nur sechs Pence für sein Vergnügen ausgibt, nicht dies allein berechnen, er hat neben dem noch fünf Schilling ausgegeben oder vielmehr weggeworfen.

Bedenke, dass Geld von einer fruchtbaren Natur ist. Geld kann Geld erzeugen und die Sprösslinge können noch mehr erzeugen und so fort. Wer ein Fünf-Schilling-Stück umbringt, mordet alles, was damit hätte produziert werden können: ganze Kolonnen von Pfunden Sterling."

Benjamin Franklin

Abb.: BENJAMIN FRANKLIN, 1706 BIS 1790, AMERIKANISCHER STAATSMANN UND ERFINDER

----------

##### \*\*-Berechnung der Zinstage bei Spareinlagen

Der Zeitraum, für den Zinsen berechnet werden, ergibt sich aus der Differenz zweier Daten, die den Beginn (Werktag nach Einzahlungstag) und das Ende der Verzinsung angeben.

Jeder Monat wird mit 30 und das Jahr mit 360 Tagen gerechnet (deutsche Usance).

Bei Spareinlagen erhält man nach § 32 (7) BWG weder für den Tag der Einzahlung noch für den Tag der Auszahlung Zinsen.

-----

Hinweis: Im Bankwesen wird fast ausschließlich die dekursive Verzinsung verwendet.

"Die Verzinsung der Einzahlungen auf Spareinlagen beginnt mit dem Wertstellungstag (§ 37), wobei der Monat zu 30 und das Jahr zu 360 Tagen zu rechnen ist. Beträge, die innerhalb von 14 Tagen nach Einzahlung wieder abgehoben werden, sind nicht zu verzinsen, wobei Auszahlungen aus Spareinlagen stets zu Lasten der zuletzt einbezahlten Beträge zu erfolgen haben.

Bei Auszahlungen aus Spareinlagen sind die Zinsen für den ausbezahlten Betrag bis einschließlich dem der Auszahlung vorangegangenen Kalendertag zu berechnen."

(aus: BWG, § 32 (7))

----------

Hinweis: Beachten Sie, dass eine exakte Berechnung der Zinstage ohne Kalender problematisch ist, da festgestellt werden muss, ob dem Tag der Einzahlung ein Werktag folgt. Darauf wird in der Folge keine Rücksicht genommen.

----------

##-Beispiel 2.2: Zinstage für Spareinlagen

a) Ein Betrag wird am 5. 7. auf ein Sparkonto gelegt und am 30. 11. mit den Zinsen wieder abgehoben. Berechnen Sie die Zinstage.

Erster Zinstag: 6. 7.

Letzter Zinstag: 29. 11.

Zinstage Juli: 30 -5 =25

Zinstage August, September, Oktober: 30 +30 +30 =90

Zinstage November: 29

Gesamtzinstage: 25 +90 +29 =144

-----

b) Ein Betrag wird am 11. 7. auf ein Sparkonto gelegt und am 5. 11. mit den Zinsen wieder abgehoben. Berechnen Sie die Zinstage.

Erster Zinstag: 12. 7.

Letzter Zinstag: 4. 11.

Zinstage Juli: 30 -11 =19

Zinstage August, September, Oktober: 30 +30 +30 =90

Zinstage November: 4

Gesamtzinstage: 19 +90 +4 =113

j-72 - Zinsen und Zinseszinsen

### \*\*-2.2 Einfache Zinsrechnung

Bei der einfachen Zinsrechnung werden die Zinsen während der Verzinsungsdauer nicht kapitalisiert. Daher bleibt das Kapital zur Berechnung der Zinsen während des gesamten Verzinsungszeitraumes unverändert.

In allen Formeln ist i ein dekursiver Jahreszinssatz und n die Verzinsungsdauer in Jahren. Die Verzinsungsdauer n ist meistens kürzer als ein Jahr.

-----

Hinweis: Bei längeren Laufzeiten ist es üblich, spätestens nach einem Jahr zu kapitalisieren und weiter mit Zinseszins zu rechnen.

-----

Tipp: Die einfache Zinsrechnung entspricht dem linearen Wachstumsmodell.

----------

##-Beispiel 2.3: Endwert bei einfacher Verzinsung

Gegeben sind der Barwert € 1.000,00, der dekursive Zinssatz i =6 % und die Verzinsungsdauer 5 Monate, d. h. n =5/(12) Jahre.

Berechnen Sie den Endwert.

Zinsen Z =1000 \*0,06 \*5/(12) =25

Endwert FV =1000 +25 =1025

Der Endwert beträgt € 1.025,00.

----------

|Einfache dekursive Verzinsung|

Z =K\_0 \*i \*n

i dekursiver Jahreszinssatz, n Verzinsungsdauer in Jahren

K\_n =K\_0 +K\_0 \*i \*n

|Endwertformel:|

K\_n =K\_0 \*(1 +i \*n)

|Barwertformel:|

K\_0 =(K\_n)/(1 +i \*n)

|Tageszinsformel| für n =T/(360):

K\_n =K\_0 \*(1 +i \*T/(360))

T Anzahl der Zinstage

n =T/(360) Verzinsungsdauer in Jahren

----------

In der Endwert- und Barwertformel treten die vier Variablen K\_n, K\_0, i und n auf. Daraus ergeben sich vier Grundaufgaben der Zinsrechnung.

----------

##-Beispiel 2.4: Vier Grundaufgaben bei einfacher Verzinsung

a) Berechnung des Endwerts K\_n:

Der Barwert eines Kapitals ist € 1.000,00, der Zinssatz i =8 % und die Verzinsungsdauer 10 Monate und 15 Tage.

Berechnen Sie den Endwert.

K\_n =1000 \*(1 +0,08 \*(315)/(360)) =1070

Der Endwert beträgt € 1.070,00.

-----

b) Berechnung des |Barwerts K\_0|:

Der Betrag von € 1.270,00 ist nach 2 Monaten und 12 Tagen bei i =8 % fällig. Berechnen Sie den Barwert.

Die Verzinsungsdauer beträgt T =72 Tage, also n =(72)/(360) Jahre.

K\_0 \*(1 +0,08 \*(72)/(360)) =1270

K\_0 \*(1 +i \*n) =K\_n

K\_0 =(1270)/(1 +0,08 \*(72)/(360)) =1250

K\_0 =(K\_n)/(1 +1 \*n)

Der Barwert beträgt € 1.250,00.

----------

Hinweis: Mit der Zielwertsuche können Sie in Excel, wenn drei Werte der Endwertformel gegeben sind, den vierten berechnen lassen.

j-73 - Einfache Zinsrechnung

c) Berechnung des |Zinssatzes i|:

Der Barwert eines Kapitals ist € 1.000,00, sein Endwert € 1.050,00.

Berechnen Sie, zu welchem Zinssatz i das Kapital 10 Monate bei einfacher Verzinsung angelegt war.

1050 =1000 \*(1 +i \*(10)/(12))

1,05 =1 +i \*5/6

0,05 =i \*5/6

i =6 %

-----

K\_n =K\_0 \*(1 +i \*n)

(K\_n)/(K\_0) =1 +i \*n

(K\_n)/(K\_0) -1 =i \*n

i =((K\_n)/(K\_0) -1) \*1/n (Zinssatz)

Das Kapital war mit 6 % angelegt.

-----

d) Berechnung der |Verzinsungsdauer n|:

Der Barwert eines Kapitals ist € 1.000,00, sein Endwert € 1.050,00.

Berechnen Sie, wie lange das Kapital bei i -8 % verzinst war.

1050 =1000 \*(1 +0,08 \*n)

1,05 =1 +0,08 \*n

n =0,625

-----

K\_n -K\_0 \*(1 +i \*n)

(K\_n)/(K\_0) =1 +i \*n

n =((K\_n)/(K\_0) -1) \*1/i (Verzinsungsdauer)

Die Verzinsungsdauer beträgt 0,625 Jahre bzw. 225 Tage.

----------

##### \*\*-Skonto

sconto: italienisch für Preisnachlass

Die häufigste Zahlungsvereinbarung zwischen Geschäftspartnern ist der |Kauf auf Ziel| (Kreditkauf):

Der Käufer erhält die Ware, bezahlt aber erst später, oft beträgt das Zahlungsziel 30 Tage. Dies ist ein kurzfristiger Kredit, den der Lieferant einer Ware dem Käufer einräumt und der als Lieferantenkredit bezeichnet wird.

Der Verkäufer hat das Interesse, dass das Zahlungsziel nicht zur Gänze ausgeschöpft wird und kann als Anreiz dem Käufer einen Skonto anbieten:

Er gibt einen Preisnachlass, wenn innerhalb einer kurzen Frist nach Erhalt der Rechnung bezahlt wird.

-----

Tipp: Skonto ist ein prozentualer Preisnachlass auf den Rechnungsbetrag bei Bezahlung innerhalb einer vorgegebenen Frist.

Meistens beträgt der Skontosatz 2 % oder 3 %, die Skontofrist 8 Tage.

----------

##-Beispiel 2.5: Jahresverzinsung eines Lieferantenkredits

Ein Kunde bestellt bei einer Tischlerei einen Kasten und bekommt folgende Rechnung:

Nettobetrag: 4.684,98

zuzüglich 20 % Mehrwertsteuer: 937,00

Gesamtsumme EUR 5.621,98

30 Tage Ziel, innerhalb von 8 Tagen 2,0 % Skonto SKONTOBETRAG 112,44 ERGIBT NETTO EUR 5.509,54

-----

a) Zeigen Sie die Richtigkeit des angegebenen Skontobetrages und des sich daraus ergebenden Nettobetrages:

Die Zahlungsvereinbarung "30 Tage Ziel, innerhalb von 8 Tagen 2,0 % Skonto" bedeutet:

Bei Begleichung der Rechnung innerhalb der Skontofrist von 8 Tagen dürfen von € 5.621,98 Rechnungsbetrag 2 % Skonto, also der Skontobetrag € 112,44 abgezogen werden. Der Kunde bezahlt € 5.509,54, für den Kunden am günstigsten am 8. Tag.

-----

Skontobetrag:

2 % von 5621,98 =0,02 \*5621,98 =112,44

Resultierender Nettobetrag: 5621,98 -112,44 =5509,54

j-74 - Zinsen und Zinseszinsen

##-Beispiel 2.5: Jahresverzinsung eines Lieferantenkredits (Fortsetzung)

b) Berechnen Sie, welcher dekursiven Jahresverzinsung dieser Lieferantenkredit entspricht.

Der Barwert beträgt € 5.509,54, der Endwert € 5.621,98, die Verzinsungsdauer 30 -8 =22 Tage.

5509,54 \*(1 +i \*(22)/(360)) =5621,98

i ~~0,334

Der Skontoabzug entspricht einer dekursiven Jahresverzinsung von etwa 33,4 %.

|Überschlagsmäßig| kann der zugehörige Jahreszinssatz zu einem Skontosatz durch eine Schlussrechnung ermittelt werden:

22 Tage 2 %

360 Tage x

x =(2 % \*360)/(22) ~~32,7 %

Dies entspricht der antizipativen Verzinsung.

Allerdings sollte nach VKrG § 27 (1) als Effektivzinssatz der dekursive Jahreszinssatz von 33,4 % angegeben werden.

----------

##### \*\*-Übungsaufgaben

##-2.001 Übertragen Sie in dezimale Form.

a) i =4 %

**[]**

b) i =12 1/4 %

**[]**

c) i =3 1/2 %

**[]**

d) i =1/2 %

**[]**

----------

##-2.002 Übertragen Sie in Prozent.

Verwenden Sie Dezimalzahlen oder gemischte Brüche.

a) i =0,014

**[]**

b) i =0,07125

**[]**

c) i =0,0025

**[]**

d) i =0,105

**[]**

----------

##-2.003 Berechnen Sie den Endwert für das Anfangskapital € 100,00 bei gegebenem Zinssatz und gegebener Verzinsungsdauer.

a) i =2 %; 5 M

**[]**

b) i =6 %; 4 1/2 M

**[]**

c) i =4 %; 3 M 7 T

**[]**

d) i =4 3/4 %; 9 M 21 T

**[]**

-----

Die einfache Verzinsung wird fast ausschließlich unterjährig verwendet.

Überlegen Sie: Was könnte ein Kunde tun, wenn eine Bank über Jahre einfach verzinsen würde?

Er könnte nach jedem Jahr sein Guthaben abheben und sofort wieder mit den Zinsen einzahlen.

----------

##-2.004 Vier Grundaufgaben (dekursive Verzinsung):

a) |Endwert:| Berechnen Sie den Endwert, auf den ein Kapital von € 1.000,00 in 96 Tagen bei einer Verzinsung von 6 % anwächst.

**[]**

b) |Barwert:| Ermitteln Sie den Betrag, den man anlegen muss, um nach 96 Tagen bei einer Verzinsung von 6 % über € 1.200,00 verfügen zu können.

**[]**

c) |Zinssatz:| Berechnen Sie den Zinssatz, zu dem man € 1.000,00 für 96 Tage anlegen muss, um € 1.020,00 zu bekommen.

**[]**

d) |Verzinsungsdauer:| Ermitteln Sie, wie lange man € 1.000,00 bei einer Verzinsung von 6 % anlegen muss, bis das Kapital auf € 1.020,00 angewachsen ist.

**[]**

-----

Endwertformel für einfache dekursive Verzinsung:

K\_n =K\_0 \*(1 +i \*n)

-----

Hinweis:

Zinstage bei Spareinlagen: Differenz der Tage -1 Zinstage bei Krediten: Differenz der Tage

Jeder Monat wird mit 30 Tagen gerechnet.

----------

##-2.005 Berechnen Sie den fehlenden Wert (alle Beträge in €):

... | a) | b) | c) | d)

K\_0 | 5000 | **[]** | 5000 | 5000

i | 9 % | 9 % | **[]** | 9 %

n | 300 T | 300 T | 300 T | **[]**

K\_n | **[]** | 6000 | 5400 | 5400

-----

... | e) | f) | g) | h)

K\_0 | 1500 | 1500 | 1500 | **[]**

i | 12 % | **[]** | 12 % | 12 %

n | **[]** | 300 T | 300 T | 300 T

K\_n | 1600 | 1600 | **[]** | 2400

j-75 - Übungsaufgaben

##-2.006 Berechnen Sie, in welcher Zeit sich ein Kapital bei i =4 % verdoppelt.

Diskutieren Sie, ob das Ergebnis sinnvoll ist.

**[]**

----------

##-2.007 € 30.000,00 sollen 9 Monate ausgeliehen werden.

Die Zinsen betragen € 1.125,00.

Berechnen Sie den jährlichen Zinssatz.

**[]**

----------

##-2.008 Ein Sparguthaben wird vom 5. März bis zum 22. November desselben Jahres angelegt. Dieses bringt bei i =6 % Zinsen in der Höhe von € 600,00. Berechnen Sie die Höhe dieses Sparguthabens am 5. März.

**[]**

----------

##-2.009 Ein Geldbetrag in der Höhe von € 1.784,00 wurde am 20. März auf einem Sparbuch angelegt. Am 15. Juni desselben Jahres erhält man einschließlich der einfachen Zinsen € 1.802,73.

Berechnen Sie den Jahreszinssatz.

**[]**

----------

Die Spareinlagen aller Österreicher betragen insgesamt 422 Milliarden Euro. Damit sind die Haushalte der Hauptkapitalgeber der Banken und des österreichischen Staates.

(Quelle: ORF, Ö1 Mittagsjournal, 21.10. 2008)

-----

Hinweis: 25 % KESt können elegant berücksichtigt werden, indem der Zinssatz um 25 % vermindert wird: i \*0,75

----------

##-2.010 Eine am 7. 3. fällige Forderung für einen Kredit in Höhe von € 7.200,00 wird mit einem Betrag von € 7.882,50 getilgt.

a) Die Tilgung erfolgt am 22. 9. desselben Jahres.

Berechnen Sie den jährlichen Zinssatz.

**[]**

b) Argumentieren Sie, wie sich der Zinssatz verändert, wenn der Kredit nach dem 22. 9. getilgt wird.

**[]**

----------

##-2.011 Frau Huber leiht sich am 15. 3. bei einem Kreditinstitut € 9.000,00 und zahlt am 11. 11. desselben Jahres € 10.000,00 zurück.

a) Berechnen Sie den Jahreszinssatz dieses Kredits.

**[]**

b) 1,5 % Bearbeitungsgebühr sowie € 25,00 Kontoführungsgebühr werden vom Auszahlungsbetrag abgezogen.

Ermitteln Sie den Jahreszinssatz einschließlich der Gebühren.

**[]**

c) Frau Huber kann eine geringere Kontoführungsgebühr vereinbaren. Argumentieren Sie, wie sich der Jahreszinssatz verändert.

**[]**

----------

Kreditzinsen orientieren sich in der Euro-Zone am EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate), jenem Zinssatz, zu dem sich Banken Geld leihen.

----------

##-2.012 Ermitteln Sie die fehlenden Werte der gegebenen Spareinlagen (deutsche Usance 30/360). 25 % KESt werden bei den Zinsen abgezogen.

a)

Kapital K\_0: € 1.240,00

Zinssatz i: 4,5 %

Einzahlung - Auszahlung: 20. 7. - 19. 8.

Zinsen Z nach Abzug der KESt: **[]**

Endkapital K\_n: **[]**

b)

Kapital K\_0: **[]**

Zinssatz i: 5 %

Einzahlung - Auszahlung: 2. 3. - 3. 8.

Zinsen Z nach Abzug der KESt: € 20,20

Endkapital K\_n: **[]**

c)

Kapital K\_0: € 775,00

Zinssatz i: **[]**

Einzahlung - Auszahlung: 14. 9. - 21. 10.

Zinsen Z nach Abzug der KESt: € 4,65

Endkapital K\_n: **[]**

----------

##-2.013 Lieferantenkredit: Für die Bezahlung einer Warenlieferung gelten folgende Zahlungsbedingungen: "3 % Skonto bei Zahlung innerhalb von 10 Tagen, andernfalls Zahlung des vollen Rechnungsbetrages innerhalb von 30 Tagen." Berechnen Sie jene dekursive Jahresverzinsung, die diesem Kredit entspricht.

**[]**

----------

2.014 Herr Huber muss eine Warenlieferung bezahlen. Nimmt er das Angebot eines Skontos in Anspruch, muss er für den zu zahlenden Betrag das Girokonto überziehen und 15 % Überziehungszinsen zahlen.

Alternativ kann er den vollen Betrag zum Zahlungsziel entrichten.

a) Zahlungsbedingung: innerhalb von 10 Tagen 2 % Skonto, 60 Tage netto. Argumentieren Sie, ob Herr Huber das Skonto in Anspruch nehmen soll.

**[]**

b) Argumentieren Sie, wie sich Herr Huber unter folgender Zahlungsbedingung entscheiden soll:

3 % Skonto bei Zahlung innerhalb 14 Tagen, 30 Tage netto

**[]**

j-76 - Zinsen und Zinseszinsen

### \*\*-2.3 Zinseszinsrechnung

Im Gegensatz zur einfachen Zinsrechnung werden bei der Zinseszinsrechnung mit dekursiver Verzinsung die am Ende eines jeden Zinstermins fälligen Zinsen jeweils zum Kapital dazugerechnet. Das Kapital nimmt bei jedem Zinstermin um diese Zinsen zu.

Herleitung der Formeln für einen dekursiven ganzjährigen Zinssatz i, für eine Verzinsungsdauer von n Jahren und für das Anfangskapital K\_0:

Barwert, Anfangskapital: K\_0

Kapital nach einem Jahr:

K\_1 =K\_0 +K\_0 \*i =K\_0 \*(1 +i)

Kapital nach zwei Jahren:

K\_2 =K\_1 +K\_1 \*i =K\_1 \*(1 +i) =K\_0 \*(1 +i)^2

...

Kapital nach n Jahren:

K\_n =K\_(n -1) +K\_(n -1) \*i =K\_(n -1) \*(1 +i) =K\_0 \*(1 +i)^n

-----

Tipp:

|Einfache Zinsrechnung:|

Zinszuschlag am Ende der Verzinsungsdauer

|Zinseszinsrechnung:|

Zinszuschlag zu jedem Zinstermin

-----

Tipp: Der Aufzinsungsfaktor q wird in der Literatur auch mit r bezeichnet, der Abzinsungsfaktor q-1 auch mit v.

----------

Dekursiver Zinseszins

K\_n =K\_0 \*(1 +i)^n =K\_0 \*q^n

q =1 +i

Endwertformel, Aufzinsungsformel dekursiver Aufzinsungsfaktor

K\_0 =(K\_n)((1 +i)^n) =K\_n \*(1 +i)^(-n) =K\_n \*q^(-n)

1/(1 +i) =(1 +i)^(-1) =q^(-1) =1/q

Barwertformel, Abzinsungsformel dekursiver Abzinsungsfaktor

----------

In der Endwert- und Barwertformel treten die vier Variablen K\_n, K\_0, i und n auf.

Daraus ergeben sich - analog zur einfachen Zinsrechnung - vier Grundaufgaben der Zinseszinsrechnung.

Endwertformel: K\_n =K\_0 \*(1 +i)^n

Barwertformel: K\_0 =(K\_n)/((1 +i)^n)

Zinssatz: i = ^(n)'w((K\_n)/(K\_0)) -1

----------

##-Beispiel 2.6: Vier Grundaufgaben der dekursiven Zinseszinsrechnung

a) Berechnung des |Endwerts K\_n|:

Der Barwert eines Kapitals ist € 1.000,00; i =6 %.

Berechnen Sie den Endwert nach 7 Jahren.

Aufzinsungsfaktor: q =1 +i =1 +0,06 =1,06

K\_7 =1000 \*1,067 =1503,63

K\_n =K\_0 \*(1 +i)^n

Der Endwert beträgt € 1.503,63.

-----

b) Berechnung des |Barwerts K\_0|:

Berechnen Sie den Betrag, den man heute bei i =6 % anlegen muss, um nach 7 Jahren über € 1.500,00 verfügen zu können.

Aufzinsungsfaktor: q =1 +i =1 +0,06 =1,06

K\_0 =(1500)/(1,06^7) =1500 \*1,06^(-7) =997,59

K\_0 =(K\_n)/((1 +i)^n)

Es müssen € 997,59 angelegt werden.

-----

c) Berechnung des |Zinssatzes i|:

Berechnen Sie den dekursiven Zinssatz, zu dem man € 1.000,00 sieben Jahre lang anlegen muss, um den Endwert € 1.500,00 zu erhalten.

1500 =1000 \*(1 +i)^7

1,5 =(1 +i)^7

1 +i = ^(7)'w(1,5) ~~1,0596

i = ^(n)'w((K\_n)/(K\_0)) -1

i ~~5,96 %

Der Zinssatz beträgt etwa 5,96 %.

-----

d) Berechnung der |Verzinsungsdauer n|:

Berechnen Sie, wie lange man € 1.000,00 zu i =6 % anlegen muss, um den Endwert

€ 1.500,00 zu erhalten.

1500 =1000 \*1,06^n

1,5 =1,06^n

n =(ln(1,5))/(ln(1,06)) ~~6,96

n =(ln((K\_n)/(K\_0)))/(ln(q))

Das Kapital muss ca. 6,96 Jahre verzinst werden.

In der Praxis wird allerdings im Bankwesen der Jahresbruchteil mit einfachen Zinsen gerechnet.

----------

Löse[Gleichung] liefert die exakte Lösung einer Gleichung.

NLöse[Gleichung] liefert eine numerische Lösung der Gleichung.

-----

Verzinsungsdauer:

n =(ln((K\_n)/(K\_0)))/(ln(q))

j-77 - Zinseszinsrechnung

##-Beispiel 2.7: Formel erstellen

Walter muss eine heute aufgenommene Schuld S nach n Jahren durch eine Zahlung Z bei einem jährlichen Zinssatz i tilgen.

Erstellen Sie eine Formel, mit der die aufgenommene Schuld S berechnet werden kann.

Lösung:

Beim gesuchten Betrag S handelt es sich um den Barwert eines Finanzgeschäftes, bei dem die Zahlung Z dem Endwert entspricht.

Aus der Barwertformel ergibt dies:

S =Z/(1 +i)^n) oder S =Z \*(1 +i)^(-n)

----------

|Äquivalenzprinzip|

Mehrere zu unterschiedlichen Zeitpunkten fällige Zahlungen dürfen nur dann zu einem Gesamtwert zusammengefasst werden, wenn sie zuvor auf einen |gemeinsamen Bezugszeitpunkt| auf- oder abgezinst werden.

----------

Als Bezugszeitpunkt wählt man meistens den Zeitpunkt Null und berechnet den Barwert. Alternativ kann der Zeitpunkt der letzten Zahlung gewählt und der Endwert berechnet werden.

-----

|Äquivalenzprinzip:|

Leistung =Gegenleistung bezogen auf denselben Zeitpunkt

----------

|Barwert eines Zahlungsstroms|

Ein |Zahlungsstrom (Cashflow)| von n Zahlungen Z\_1, Z\_2, ..., Z\_n, die zu den Zeitpunkten t\_1, t\_2, ... t\_n erfolgen, wird durch Abzinsen mit dem Zinssatz i auf den Zeitpunkt t =0 bewertet:

PV

Present Value oder Barwert:

PV =Z\_1 \*(1 +i)^(-t\_1) +Z\_2 \*(1 +i)^(-t^2) +... +Z\_n \*(1 +i)^(-t\_n) ='Si[k=1;n](Z\_k \*(1 +i)^(-t\_k))

Der Barwert (Present Value PV) ist die Summe aller auf den Zeitpunkt t =0 abgezinsten Zahlungen.

----------

Hinweis: Das Fahnenzeichen bedeutet in den folgenden Grafiken immer den Bezugszeitpunkt.

----------

##-Beispiel 2.8: Barwert eines Zahlungsstroms

Herr Dorfer wird in den folgenden fünf Jahren jeweils am Jahresende Zahlungen in Euro erhalten:

Z\_1 =6000; Z\_2 =8000; Z\_3 =10000; Z\_4 =12000 und Z\_5 =14000

a) Berechnen Sie den Barwert dieser Zahlungen für i =10 %;

Aufzinsungsfaktor q =1,1;

Abzinsungsfaktor q^(-1) =1,1^(-1)

Zahlung: 6.000,00 €

Verzinsungsdauer: 1

Barwert der Zahlungen: 6000 \*1,1^(-1) | 5.454,54 €

-----

Zahlung: 8.000,00 €

Verzinsungsdauer: 2

Barwert der Zahlungen: 8000 \*1,1^(-2) | 6.611,57 €

-----

Zahlung: 10.000,00 €

Verzinsungsdauer: 3

Barwert der Zahlungen: 10000 \*1,1^(-3) | 7.513,15 €

-----

Zahlung: 12.000,00 €

Verzinsungsdauer: 4

Barwert der Zahlungen: 12000 \*1,1^(-4) | 8.196,16 €

-----

Zahlung: 14.000,00 €

Verzinsungsdauer: 5

Barwert der Zahlungen: 14000 \*1,1^(-5) | 8.692,90 €

Barwert: 36.468,32

Der Barwert beträgt € 36.468,32.

j-78 - Zinsen und Zinseszinsen

##-Beispiel 2.8: Barwert eines Zahlungsstroms (Fortsetzung)

b) Stellen Sie den Zahlungsstrom einschließlich Barwert auf einer Zeitachse dar.

{{Grafik: Nicht darstellbar.}}

c) Ermitteln Sie den Endwert dieser Zahlungen:

Da der Zahlungsstrom durch den Barwert auf den Zeitpunkt t =0 bewertet ist, kann der Endwert berechnet werden, indem der Barwert 5 Jahre aufgezinst wird.

FV =36468,32 \*1,1^5 =58732,59

Der Endwert beträgt € 58.732,59.

-----

d) Stellen Sie den Barwert und den Endwert in Abhängigkeit des Zinssatzes i grafisch dar. Erklären Sie anhand der Graphen, wie sich der Barwert und der Endwert mit steigendem Zinssatz i verändern.

Für steigenden Zinssatz i fällt der Barwert, der Endwert steigt.

----------

|Auswirkungen von steigenden Zinssätzen|

* Steigt der Zinssatz i, dann fällt der Barwert (Present Value PV).
* Steigt der Zinssatz i, dann steigt auch der Endwert (Final Value FV).

----------

Ist ein Zahlungsstrom im Barwert (Endwert) zusammengefasst, so kann jeder beliebige Zeitwert des Zahlungsstroms durch Auf- bzw. Abzinsen des Barwerts (Endwerts) berechnet werden.

----------

##-Beispiel 2.9: Vergleich von zwei Angeboten

Frau Bauer möchte eine Wohnung verkaufen und bekommt zwei Angebote:

A bietet € 180.000,00 sofort,

B bietet € 100.000,00 in einem Jahr und € 100.000,00 in zwei Jahren.

a) Argumentieren Sie, welches Angebot für Frau Bauer besser ist, wenn sie

(1) mit i =10 % und

(2) mit i =5 % kalkuliert.

b) Ermitteln Sie den Zinssatz, für den die beiden Angebote gleich sind.

Lösung:

a) Um die Angebote vergleichen zu können, müssen alle Zahlungen auf einen Zeitpunkt bewertet werden.

Als Bewertungszeitpunkt bietet sich der Zeitpunkt t =0 an.

Die Zahlungen werden abgezinst und der Barwert PV berechnet.

(1) Für i =10 % erhalten Sie den Aufzinsungsfaktor q =1,1.

PV\_A =180000

PV\_B =(100000)/(1,1) +(100000)/(1,1^2) =100000 \*1,1^(-1) +100000 \*1,1^(-2) =173553,72

Für i =10 % ist für Frau Bauer das Angebot A besser.

-----

(2) Für i =5 % erhalten Sie den Aufzinsungsfaktor q =1,05.

PV\_A =180000

PV\_B =(100000)/(1,05) +(100000)/(1,05^2) =100000 \*1,05^(-1) +100000 \*1,05^(-2) =185941,04

Für i =5 % ist für Frau Bauer das Angebot B besser.

Die Entscheidung hängt vom Zinssatz ab, mit dem kalkuliert wird.

j-79 - Zinseszinsrechnung

Alternativ können Sie die Zahlungen auf den Zeitpunkt der letzten Zahlung aufzinsen und den Endwert FV berechnen.

(1) Für i =10 %:

FV\_A =180000 \*1,1^2 =217800

FV\_B =100000 \*1,1 +100000 =210000

oder wenn Sie den oben errechneten Barwert von B verwenden:

FV\_B =173553,72 \*1,1^2 =210000

Für i =10 % ist das Angebot A besser.

-----

(2) Für i =5 %:

FV\_A =180000 \*1,05^2 =198450

FV\_B =100000 \*1,0^5 +100000 =205000 oder

FV\_B =185 941,04 \*1,05^2 =205000

Für i =5 % ist das Angebot B besser.

Sie treffen mit dem Endwert dieselben Entscheidungen wie mit dem Barwert.

-----

b) Setzen Sie die Endwerte gleich:

180000 \*(1 +i)^2 =100000 \*(1 +i) +100000

Mit Technologie erhält man:

i\_1 ~~0,0732 (i^2 ~~-1,5177)

i ~~7,32 %

Bei einem Zinssatz von etwa 7,32 % sind die beiden Angebote gleichwertig.

----------

##-Beispiel 2.10: Vergleich von Barwerten

Ein Ministerium hat Geldnot und möchte eine Immobilie in guter Lage verkaufen, um die finanzielle Lage zu verbessern. Zum Stichtag liegen drei Kaufangebote vor:

A: 200 Millionen werden sofort bezahlt.

B: 350 Millionen werden nach 5 Jahren bezahlt.

C: 100 Millionen werden nach einem Jahr, 75 Millionen nach zwei Jahren, 50 Millionen nach drei Jahren und 25 Millionen nach vier Jahren bezahlt.

Berechnen Sie, für welches Angebot sich das Ministerium bei einem Marktzinssatz von

a) i\_M =12 % und

b) i\_M =9 % entscheiden soll und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Lösung:

a) PV\_A =200

PV\_B =350 \*1,12^(-5) =198,599

PV\_C =100 \*1,12^(-1) +75 \*1,12^(-2) +50 \*1,12^(-3) +25 \*1,12^(-4) =200,552

Das Angebot C hat bei einem Zinssatz von 12 % den höchsten Barwert, die Angebote sind allerdings fast gleichwertig.

-----

b) PV\_A =200

PV\_B =350 \*1,09^(-5) =227,476

PV\_C =100 \*1,09^(-1) +75 \*1,09^(-2) +50 \*1,09^(-3) +25 \*1,09^(-4) =211,189

Das Angebot B hat bei einem Zinssatz von 9 % den höchsten Barwert.

Die Barwerte in Abhängigkeit vom Zinssatz können tabellarisch und grafisch dargestellt werden:

j-80 - Zinsen und Zinseszinsen

##-Beispiel 2.11: Berechnung einer Kreditzahlung

Frau Müller hat einen Kredit über € 10.000,00 bei i =8 % aufgenommen, den sie durch

drei Zahlungen tilgen muss: € 3.000,00 nach einem Jahr, € 4.000,00 nach drei Jahren, die dritte Zahlung X nach vier Jahren.

Berechnen Sie die Höhe der dritten Zahlung X.

Lösung:

Alle Zahlungen werden auf den Zeitpunkt der Kreditauszahlung bewertet.

Der Kreditbetrag entspricht dem Barwert der Ratenzahlungen.

10000 =(3000)/(1,08) +(4000)/(1,08^3) +X/(1,08^4)

X =(10000 -(3000)/(1,08) -(4000)/(1,08^3)) \*1,08^4 =5505,75

Die dritte Zahlung beträgt € 5.505,75.

----------

##-Beispiel 2.12: Interpretation eines Zahlungsstroms

Zur Tilgung einer Schuld wird folgende Rechnung aufgestellt:

(5000)/(1,0375) +(8000)/(1,0375^3) =11982,78

a) Beschreiben Sie, wie hoch die Schuld ist und wie diese getilgt und verzinst wird.

b) Stellen Sie die in der Rechnung vorkommenden Zahlungen auf einer Zeitachse dar.

Lösung:

a) Die Schuld beträgt € 11.982,78.

Da die beiden Beträge abgezinst werden, erfolgen die Zahlungen zu einem späteren Zeitpunkt. Die Schuld wird durch zwei Raten in der Höhe von € 5.000,00 in einem Jahr und € 8.000,00 in drei Jahren getilgt.

q =1,0375

Der jährliche Zinssatz beträgt daher 3,75 % p. a.

----------

##### \*\*-Durchschnittliche Verzinsung

Banken bieten oft Finanzprodukte mit jährlich wechselnden Zinssätzen an. Für den Anleger ist aber die durchschnittliche Verzinsung über die gesamte Verzinsungsdauer wichtig.

##-Beispiel 2.13: Durchschnittlicher Zinssatz

Eine Bank bietet ein Sparbuch mit steigenden Zinssätzen an:

im 1. Jahr 1,5 % p. a. und im 2. Jahr 2,25 % p. a.

Berechnen Sie die durchschnittliche Verzinsung z, die nach zwei Jahren dasselbe Endkapital ergibt wie die beiden gegebenen Zinssätze.

Lösung:

Nach einem Jahr beträgt das Kapital K\_1 =K\_0 \*1,015.

Nach dem zweiten Jahr beträgt das Endkapital

K\_2 =K\_0 \*1,015 \*1,0225 =K\_0 \*(1 +z^-)^2.

Aus (1 +z^-)^2 =1,015 \*1,0225 folgt:

z^- ='w(1,015 \*1,0225) -1 ~~1,8743 %

Der durchschnittliche Zinssatz für die beiden Jahre beträgt ca. 1,87 %.

----------

Hinweis:

Beachten Sie:

Mit dem arithmetischen Mittel (1,5 % +2,25 %)/2 =1,875 % erhalten Sie nicht den korrekten durchschnittlichen Zinssatz.

----------

|Durchschnittlicher Zinssatz|

Wird ein Kapital

im ersten Jahr mit einem Zinssatz z\_1,

im zweiten Jahr mit dem Zinssatz z\_2,

im dritten Jahr mit dem Zinssatz z\_3 ...

im n-ten Jahr mit dem Zinssatz z\_n verzinst,

dann ergibt sich der durchschnittliche Zinssatz z für eine Verzinsung des Kapitals über n Jahre durch:

z^- = ^(n)'w((1 +z\_1) \*(1 +z\_2) \*(1 +z\_3) \*... \*(1 +z\_n)) -1

j-81 - Zinseszinsrechnung

##-Beispiel 2.14: "Sparbuch mit bis zu 4,25 % Verzinsung"

Eine Bank wirbt mit einem "Sparbuch bis zu 4,25 % Verzinsung".

im 1. Jahr 0,20 % p. a.,

im 2. Jahr 0,40 % p. a.,

im 3. Jahr 0,60 % p. a.,

im 4. Jahr 0,80 % p. a.,

im 5. Jahr 1,00 % p. a. und

im 6. Jahr 4,25 % p. a.

Als Durchschnittszinssatz gibt die Bank 1,2 % p. a. an.

a) Beurteilen Sie, ob die Angabe des Bankinstituts richtig ist.

b) Argumentieren Sie, ob ein Produkt mit folgender Verzinsung gleichwertig wäre:

im 1. Jahr 4,25 % p. a.,

im 2. Jahr 1,00 % p. a.,

im 3. Jahr 0,80 % p. a.,

im 4. Jahr 0,60 % p. a.,

im 5. Jahr 0,40 % p. a. und

im 6. Jahr 0,20 % p. a.

Lösung:

a) z^- = ^(6)'w(1,002 \*1,004 \*1,006 \*1,008 \*1,01 \*1,0425) -1 =1,199 % ~~1,2 %

Die Angabe ist richtig.

b) Aus mathematischer Sicht wäre das Produkt gleichwertig, da die Multiplikation der Zinssätze kommutativ ist.

Aus der Sicht der Bank nicht, da die Kunden beim zweiten Produkt das Sparbuch nach einem Jahr vermutlich kündigen würden.

----------

##### \*\*-Theoretische Verzinsung

Fallen Beginn oder Ende einer Kapitalverzinsung nicht genau auf einen Zinstermin, so erhält man nicht ganzzahlige Zinsperioden.

|Definition: Theoretische Verzinsung|

|Theoretische Verzinsung| liegt vor, wenn man auch für eine nicht ganze Anzahl von Zinsperioden End- und Barwert nach den Formeln der Zinseszinsrechnung ermittelt.

K\_n =K\_0 \*(1 +i)^n =K\_0 \*(1 +i)^(T +t\_1 +t\_2);

n =T +t\_1 +t\_2 Verzinsungsdauer in Jahren

T ganzzahliger Teil von n

t\_1, t\_2 nicht ganzzahlige Teile von n, Periodenbruchteile

----------

|Theoretische Verzinsung:|

Zinseszins mit nicht ganzzahligen Verzinsungsperioden

----------

In der Bankpraxis erfolgt die Verzinsung gemischt:

Gemischte (praktische) Verzinsung liegt vor, wenn man End- und Barwert für die ganze Anzahl der gegebenen Zinsperioden mit Zinseszinsen und für Periodenbruchteile mit einfacher Verzinsung ermittelt.

K\_n =K\_0 \*(1 +i \*t\_1) \*(1 +i)^T \*(1 +i \*t\_2)

----------

|Gemischte Verzinsung:|

Ganze Zinsperioden werden mit Zinseszins, Periodenbruchteile werden mit einfachen Zinsen gerechnet.

j-82 - Zinsen und Zinseszinsen

##-Beispiel 2.15: Theoretische und gemischte Verzinsung

Ein Kapital von € 5.834,00 wird bei i =6 % am Jahresanfang für 5 Jahre und 7 Monate angelegt.

T =5 Jahre, t\_1 =0 Jahre, t\_2 =7/(12) Jahre

Berechnen Sie den Endwert bei

a) theoretischer Verzinsung:

FV =5 834 \*1,06^(5 +7/(12)) =8 077,14

b) gemischter Verzinsung:

FV =5834 \*1,06^5 \*(1 +0,06 \*7/(12)) =8080,46

----------

##-Beispiel 2.16: Gemischte Verzinsung bei Spareinlagen

Auf ein neues Sparbuch werden € 1.000,00 am 6. 7. 2016 eingezahlt.

Berechnen Sie, den Betrag, den man am 13. 4. 2019 beheben kann, wenn 4 % Zinsen pro Jahr berechnet werden und 25 % KESt zu berücksichtigen sind.

Lösung:

Sie erhalten eine Verzinsung von 4 % \*0,75 =3 %.

Bei Spareinlagen wird gemischt verzinst.

174 Tage einfache zinsen

2 Jahre Zinseszinsen

102 Tage einfache Zinsen

-----

Hinweis: Bei Spareinlagen werden Jahresbruchteile einfach, volle Jahre mit Zinseszins verzinst.

Die gemischte Verzinsung führt zu einem höheren Endwert.

-----

* Vom 6. 7. 2016 bis Ende des Jahres 2016 werden für 174 Tage einfache Zinsen berechnet.

Am Ende des Jahres 2016 beträgt das Kapital

1000 \*(1 +0,03 \*(174)/(360)) =1014,50.

* Dieses Kapital wächst zwei Jahre bis Ende 2018 mit Zinseszinsen an:

1014,5 \*1,03^2 =1076,28

* Bis zum 12. 4. 2019, also 102 Tage, wird wieder einfach verzinst.

1076,28 \*(1 +0,03 \*(102)/(360)) =1085,43

-----

Berechnung ohne Zwischenwert:

FV =1000 \*(1 +0,03 \*(174)/(360)) \*1,03^2 \*(1 +0,03 \*(102)/(360)) =1085,43

Mit theoretischer Verzinsung erhalten Sie:

FV =1000 \*1,03^(2 +(174 +102)/(360)) =1 085,22

Der Unterschied beträgt € 0,21. In der Praxis wird der Differenzbetrag meist durch Schwankungen des Zinssatzes übertroffen.

----------

Hinweis: Da die gemischte Verzinsung mühsam zu berechnen ist und außerdem bei gleicher Verzinsungsdauer zu unterschiedlichen Ergebnissen führt, rechnet man vorwiegend mit theoretischer Verzinsung.

----------

##### \*\*-Verzinsungsdauer

##-Beispiel 2.17: Berechnung der Verzinsungsdauer

Frau Eberharter hat € 5.000,00 sofort zu bezahlen, € 6.000,00 in 18 Monaten und € 9.000,00 in 2 Jahren und 3 Monaten.

Berechnen Sie bei i =3 % theoretischer Verzinsung, wann diese Schuld durch die Kapitalsumme € 20.000,00 abgegolten werden kann.

Lösung: Berechnen Sie zuerst den Barwert der Schuld.

-----

|Äquivalenzprinzip:|

Leistung =Gegenleistung bezogen auf denselben Zeitpunkt

j-83 - Zinseszinsrechnung

PV =5000 +(5000)/(1,03^(1,5)) +(9000)/(1,03^(2,25)) =5000 +6000 \*1,03^(-1,5) +9000 \*1,03^(-2,25)

PV =19160,69

Den Barwert zinsen Sie so lange auf, bis der Endwert von € 20.000,00 erreicht ist.

19160,69 \*1,03^n =20000

1,03^n =1,043804

n \*ln(1,03) =ln(1,043804)

n ~~1,4504, d. h. nach 1 Jahr, 5 Monaten und 12 Tagen kann die Schuld von € 20.000,00 beglichen werden.

----------

Hinweis: Umrechnung in Jahre, Monate und Tage:

1,4504 -> 1 ganzes Jahr

0,4504 \*12 ~~5,404 -> 5 ganze Monate

0,404 \*30 ~~12,1 -> 12 ganze Tage

----------

##### \*\*-Unterjährige Verzinsung

Bisher haben Sie mit einer Zinsperiode von einem Jahr gerechnet. Der Jahreszinssatz wird mit dem Zusatz p. a. (pro anno) bezeichnet.

Oft ist die Zinsperiode aber kürzer als ein Jahr. Wird m-mal pro Jahr verzinst, so spricht man von unterjähriger Verzinsung und bezeichnet den unterjährigen Zinssatz mit i\_m.

* m =2: Semesterverzinsung, halbjährliche Verzinsung (p. s., pro Semester)
* m =4: Quartalsverzinsung, vierteljährliche Verzinsung (p. q., pro Quartal)
* m =12: Monatsverzinsung, monatliche Verzinsung (p. m., pro Monat)

-----

p. a.: pro anno, Jahres-

p. s.: pro semester, Semester-

p. q.: pro quartal, Quartals-

p. m.: pro mense, Monatsverzinsung

----------

|Definition: Unterjähriger Zinssatz und nomineller Jahreszinssatz|

* i\_m heißt unterjähriger Zinssatz.
* Der Zinssatz m \*i\_m heißt |nomineller Jahreszinssatz| oder |Nominalzinssatz|.

-----

i\_m unterjähriger Zinssatz

m \*i\_m Nominalzinssatz

-----

i\_2 =4 % bedeutet, dass jedes Semester mit 4 % verzinst wird. Der zugehörige nominelle Jahreszinssatz beträgt 2 \*4 % =8 %.

Meistens geben die Banken den nominellen Jahreszinssatz anstelle des unterjährigen Zinssatzes an. Der nominelle Jahreszinssatz wird beim grafischen Taschenrechner verwendet.

----------

##-Beispiel 2.18: Verzinsung für Bauspardarlehen

Der Nominalzinssatz für Bauspardarlehen beträgt in Österreich höchstens 6 % jährlich, die Zinsperiode ist ein Quartal, d. h., i\_4 =(6 %)/4 =1,5 % ist der entsprechende Quartalszinssatz.

Der Aufzinsungsfaktor q\_4 für ein Quartal ist 1,015.

Berechnen Sie den Endwert für € 1.000,00 nach einem Jahr.

Es wird nach jedem Quartal, also viermal verzinst.

FV =1000 \*1,015^4 =1061,36

-----

Tipp: So verzinsen Bausparkassen:

"In jedem Fall beträgt der Nominalzinssatz mindestens 3 % jährlich und höchstens 6 % jährlich.

Das Darlehenskonto wird jedes Kalendervierteljahresende abgeschlossen."

(aus den Allgemeinen Bedingungen einer Bausparkasse)

----------

|Unterjährige dekursive Verzinsung|

n Jahre haben n \*m Zinsperioden, der Aufzinsungsfaktor der Zinsperiode ist q\_m =1 +i\_m.

K\_n =K\_0 \*(1 +i\_m)^(n \*m) =K\_0 \*q\_m^(n \*m) dekursive unterjährige |Endwertformel|

K\_0 =(K\_n)/((1 +i\_m)^(n \*m)) =K \*(1 +i\_m)^(-n \*m) =K \*q\_m^(-n \*m)

dekursive unterjährige |Barwertformel|

-----

K\_n =K\_0 \*(1 +i\_m)^(n \*m)

K\_0 =(K\_n)/((1 +i\_m)^(n \*m))

j-84 - Zinsen und Zinseszinsen

##-Beispiel 2.19: Unterjährige Verzinsung

a) Der Betrag € 5.000,00 ist bei i\_(12) =1/2 % sechs Jahre aufzuzinsen. Berechnen Sie den Endwert FV.

Aufzinsungsfaktor für einen Monat: q\_(12) =1 +0,005 =1,005

FV =5000 \*1,005^(12 \*6) =7160,22

b) Gegeben sind K\_7 =€ 16.513,00 und i\_2 =4 %.

Berechnen Sie den Barwert PV Aufzinsungsfaktor für ein Semester: q\_2 =1,04

Die Anzahl der Zinsperioden beträgt 14 Semester.

PV =(16513)/(1,04^(14)) =16513 \*1,04^(-14) =9535,85

----------

##-Beispiel 2.20: Unterjährige Verzinsung

a) Vergleichen Sie den Endwert von € 10.000,00 nach einem Jahr für

i =12 %: FV =10000 \*1,12 =11200,00

i\_2 =6 %: FV =10000 \*1,06^2 =11236,00

i\_4 =3 %: FV =10000 \*1,03^4 =11255,09

i\_(12) =1 %: FV =10000 \*1,01^(12) =11268,25

i\_(360) =(12 %)/(360): FV =11274,74

b) Argumentieren Sie, warum i\_(360) den höchsten Endwert ergibt.

Beim Tageszinssatz i\_(360) wird jeden Tag verzinst. Es fallen daher bereits ab dem 2. Tag Zinsen an, die in den Folgetagen mitverzinst werden, ebenso am dritten Tag usw.

----------

##### \*\*-Stetige Verzinsung

Denken Sie sich das Jahr in eine immer größere Zahl von Zinsperioden unterteilt. Die Anzahl der Verzinsungen m geht gegen unendlich, wobei aber die Höhe der Zinszuschläge gegen null strebt.

Auf diese Weise kommt man zur stetigen, kontinuierlichen oder Augenblicksverzinsung.

Der entsprechende Zins wird dann im Augenblick, in dem er entsteht, zum Kapital addiert.

Aus der Endwertformel bei dekursiver unterjähriger Verzinsung

K\_n =K\_0 \*(1 +i\_m)^(m \*n) =K\_0 \*q\_m^(m \*n) wird dann folgende:

----------

|Stetige Aufzinsungsformel|

K\_n =K\_0 \*'e^(i\_('ue) \*n)

'e^(i\_('ue)) =1 +i

i\_('ue) =ln(1 +i)

i\_('ue) stetiger Zinssatz

i Jahreszinssatz

----------

Die |stetige Verzinsung| wird bei der Berechnung von Optionspreisen verwendet.

Optionen werden in der Betriebswirtschaft behandelt.

-----

|Stetige Aufzinsungsformel:|

K\_n =K\_0 \*'e^(i\_('ue) \*n)

----------

##-Beispiel 2.21: Stetige Verzinsung

Berechnen Sie den Endwert von € 10.000,00 nach einem Jahr für i =12 % bei stetiger Verzinsung:

FV =K\_1 =10000 \*'e^(0,12) =11274,97

Dieser Endwert ist geringfügig größer als jener bei i\_(360) mit € 11.274,74.

----------

##### \*\*-Äquivalente Zinssätze

##-Beispiel 2.22: Quartalverzinsung der Bausparkassen

Mit dem nominellen Jahreszinssatz 6 % für Bauspardarlehen erhalten Sie bei Quartalsverzinsung für € 1,00 nach einem Jahr den Endwert

FV =1 \*1,015^4 ~~1,06136.

Das Kapital hat sich effektiv um den Jahreszinssatz i ~~6,136 % verzinst.

Man sagt: i ~~6,136 % ist der zu i\_4 =1,5 % äquivalente Zinssatz, da die beiden Zinssätze bei gleichem Anfangskapital und gleicher Verzinsungsdauer denselben Endwert ergeben.

-----

Die Grafik zeigt K(t) für

* einfache
* theoretische
* gemischte (praktische) und
* stetige

Verzinsung mit i =86 % und K\_0 =€ 1.000,00.

j-85 - Zinseszinsrechnung

|Definition: Äquivalente Zinssätze|

|Äquivalente Zinssätze| ergeben in gleichen Zeiten aus gleichen Barwerten gleiche Endwerte und aus gleichen Endwerten gleiche Barwerte.

----------

##-Beispiel 2.23: Äquivalente Zinssätze

Gegeben ist i\_4 =2 %.

Berechnen Sie den äquivalenten Jahreszinssatz.

K\_0 \*(1 +i\_4)^4 =K\_0 \*(1 +i) |/K\_0

1,2^4 =1 +i

i =1,02^4 -1 ~~0,0824

Beachten Sie:

Der nominelle Jahreszinssatz zu i\_4 =2 % ist 8 %,

der äquivalente Jahreszinssatz ist ca. 8,24 %.

i\_4 =2 % und i " 8,24 % ergeben dieselben Endwerte.

----------

##-Beispiel 2.24: Nominelle und äquivalente Jahreszinssätze

Rechnen Sie den unterjährigen Zinssatz i\_m in den nominellen Jahreszinssatz m \*i\_m und in den äquivalenten Jahreszinssatz i um:

unterjähriger Zinssatz i\_m: i\_2 =3 %

nomineller Jahreszinssatz m \*i\_m: 2 \*3 % =6 %

äquivalenter Jahreszinssatz i: 1,03^2 -1 =6,09 %

-----

unterjähriger Zinssatz i\_m: i\_4 =2 %

nomineller Jahreszinssatz m \*i\_m: 4 \*2 % =8 %

äquivalenter Jahreszinssatz i: 1,02^4 -1 ~~8,24 %

-----

unterjähriger Zinssatz i\_m: i\_(12) =1 %

nomineller Jahreszinssatz m \*i\_m: 12 \*1 % =12 %

äquivalenter Jahreszinssatz i: 1,01^(12) -1 ~~12,68 %

----------

|Umrechnung äquivalenter Zinssätze:|

(1 +i\_m)^m =1 +i

(1 +i\_(12))^(12) =(1 +i\_4)^4 =(1 +i\_2)^2 =1 +i

q\_(12)^(12) =q\_4^4 =q\_2^2 =q

Berechnung des äquivalenten Jahreszinssatzes:

i =(1 +i\_m)^m -1

----------

##-Beispiel 2.25: Äquivalente Zinssätze

Rechnen Sie die Zinssätze äquivalent um:

a) i =5 %, i\_(12) =?

q =1,05 <=> q\_(12) = ^(12)'w(1,05) =1,05^(1/(12)) ~~1,004074 <=> i\_(12) ~~0,4074 %

-----

b) i\_2 =6 %, i\_4 =?

q\_2 =1,06 <=> q\_4 ='w(1,06) =1,06^(1/2) ~~1,0296 <=> i\_4 ~~2,96 %

-----

c) i =7,5 %, i\_2 =?

q =1,075 <=> q\_2 ='w(1,075) =1,075^(1/2) ~~1,0368 <=> i\_2 ~~3,68 %

-----

d) i\_(12) =0,6 %, i\_4 =?

q\_(12) =1,006 <=> q\_4 =1,006^3 ~~1,0181 <=> i\_4 ~~1,81 %

-----

e) i\_4 =2,5 %, i =?

q\_4 =1,025 <=> q =1,025^4 ~~1,1038 <=> i ~~10,38 %

(10,38 % ist der zu i\_4 =2,5 % äquivalente Jahreszinssatz.)

----------

Zur Berechnung des äquivalenten Zinssatzes müssen Sie den "Umweg" über den Aufzinsungsfaktor nehmen.

q\_(12)^(12) =q\_4^4 =q\_2^2 =q

q\_(12)^6 =q\_4^2 ='w(q)

q\_(12)^3 =q\_4 ='w(q\_2) = ^(4)'w(q)

q\_(12) = ^(3)'w(q\_4) = ^(6)'w(q\_2) = ^(12)'w(q)

-----

Hinweis:

Beachten Sie:

i =5 %

i\_(12) \= ^(12)'w(5) ~~1,1435

i\_(12) ist NICHT 1,1435 %!

i\_(12) = ^(12)'w(1,05) -1 ~~0,4074 %

----------

##### \*\*-Zinseszinsrechnung mit Technologieunterstützung

Mit dem TVM-Solver (Time-Value-of-Money-Solver) können Problemstellungen der Finanzmathematik für |Zinseszinsen| sehr einfach gelöst werden.

Geben Sie alle Zahlungen, die Sie erhalten, mit positivem Vorzeichen ein.

Beträge, die Sie zahlen müssen, geben Sie mit negativem Vorzeichen (-) ein.

Stellen Sie schließlich den Cursor in die Zeile mit der gesuchten Variablen und drücken Sie ALPHA [SOLVE]. Der gesuchte Wert wird berechnet.

j-86 - Zinsen und Zinseszinsen

|Bezeichnungen des Finanz-SOLVERS und ihre Bedeutung|

N Dauer in Jahren (Zahl der Raten) (Number of payment periods)

I% nomineller |Jahreszinssatz|, dekursiv (Annual interest rate)

Im Solver ist der nominelle Jahreszinssatz zu verwenden, das ist der relativ auf das Jahr bezogene Jahreszinssatz I% =i\_m \*m.

(z. B. i\_4 =3 %; I% =(3 \*4) =12 eintragen; C/Y =4)

PV Present Value (Barwert)

PMT Payments (regelmäßige Ratenzahlungen; Raten; Payment Amount)

FV Final Value; Future Value (Endwert; Zukunftswert)

P/Y Payments/Year (Zahlungsperioden/Jahr; regelmäßige Zahlungen pro Jahr; Number of payment periods per year)

C/Y Compounding periods/Year (Zinseszinsperioden/Jahr; i\_4 =3 %; C/Y =4; Number of compounding periods per year)

PMT: END BEGIN

Ratenzahlung am Ende oder am Beginn der dazugehörigen Rentenperiode; nachschüssig/vorschüssig

-----

Auf der Übungs-CD-ROM finden Sie eine Excel-Version des TVM-Solvers.

----------

##-Beispiel 2.26: Endwert mit TVM-Solver

Eine Investorin legt einen Betrag von € 100.000,00 gewinnbringend an.

a) Berechnen Sie den Betrag, über den sie nach 5 Jahren bei i =7,5 % verfügen kann.

FV =K\_5 =100000 \*(1 +0,075)^5 =143562,93

Rufen Sie den TVM-Solver auf und geben Sie folgende Werte ein:

N =5 Jahre

I% =7.5 nomineller Jahreszinssatz

PV =-100000 negatives Vorzeichen, da Ausgabe

PMT =0 keine regelmäßigen Zahlungen

FV =143562.93 berechneter Wert

P/Y =1 Zahlungsperiode ein Jahr

C/Y =1 eine Zinsperiode pro Jahr

PMT: END BEGIN Eingabe egal

Setzen Sie den Cursor in die Zeile des Future Value (FV=) und drücken Sie die Tasten ALPHA [SOLVE]. Sie erhalten den Future Value € 143.562,93.

Die Investorin kann nach 5 Jahren über € 143.562,93 verfügen.

-----

b) Ermitteln Sie den Betrag, über den sie nach 5 Jahren bei i\_2 =3,75 % verfügen kann.

FV =K\_5 =100000 \*(1 +0,0375)^(10) =144 504,39

Rufen Sie den TVM-Solver auf und geben Sie folgende Werte ein:

N =5 Jahre

I% =7.5 nomineller Jahreszinssatz 2 \*3,75 % =7,5 %

PV =-100000 negatives Vorzeichen, da Ausgabe

PMT =0 keine regelmäßigen Zahlungen

FV =144504.39 berechneter Wert

P/Y =1 Zahlungsperiode ein Jahr

C/Y =2 zwei Zinsperioden pro Jahr

PMT: END BEGIN Eingabe egal

Setzen Sie den Cursor in die Zeile des Future Value (FV=) und drücken Sie die Tasten ALPHA [SOLVE]. Sie erhalten den Future Value € 144.504,39.

Die Investorin kann bei Semesterverzinsung nach 5 Jahren über € 144.504,39 verfügen.

j-87 - Zinseszinsrechnung

##-Beispiel 2.27: Barwert mit TVM-Solver

Eine Investorin will in 10 Jahren über 100.000 Euro verfügen. Berechnen Sie die Höhe des Betrages, den sie heute anlegen muss.

a) bei i =12 %:

PV =K\_0 \*(100000)/(1,12^(10)) =100000 \*1,12^(-10) =32197,32

Rufen Sie den TVM-Solver auf und geben Sie folgende Werte ein:

N =10 10 Jahre

I% =12 nomineller Jahreszinssatz

PV =-32197.32 berechneter Wert

PMT =0 keine regelmäßigen Zahlungen

FV =100000 Future Value

P/Y =1 Zahlungsperiode ein Jahr

C/Y =1 eine Zinsperiode pro Jahr

PMT: END BEGIN Eingabe egal

Setzen Sie den Cursor in die Zeile des Present Value (PV=) und drücken Sie die Tasten ALPHA [SOLVE]. Sie erhalten den Present Value € 32.197,32.

Die Investorin muss heute bei Jahresverzinsung € 32.197,32 anlegen.

-----

b) bei i\_(12) =1 %:

PV =K\_0 =(100000)/(1,01^(120)) =100000 \*1,01^(-120( =30299,48

Rufen Sie den TVM-Solver auf und geben Sie folgende Werte ein:

N =10 10 Jahre

I% =12 nomineller Jahreszinssatz 12 \*1 % =12 %

PV =-30299.48 berechneter Wert

PMT =0 keine regelmäßigen Zahlungen

FV =100000 Future Value

P/Y =1 Zahlungsperiode ein Jahr

C/Y =12 zwölf Zinsperioden pro Jahr

PMT: END BEGIN Eingabe egal

Setzen Sie den Cursor in die Zeile des Present Value (PV=) und drücken Sie die Tasten ALPHA [SOLVE]. Sie erhalten den Present Value € 30.299,48.

Die Investorin muss heute bei Monatsverzinsung € 30.299,48 anlegen.

----------

##-Beispiel 2.28: Zinssatz mit TVM-Solver

Gegeben sind K\_0 =€ 1.000,00 und K\_(12) =€ 2.250,20.

Berechnen Sie den Jahreszinssatz i.

Lösung:

2250,2 =1000 \*(1 +i)^(12)

(1 +i)^(12) =2,2502

1 +i = ^(12)'w(2,2502) =1,06992

i =6,992 %

----------

##-Beispiel 2.29: Verzinsungsdauer mit TVM-Solver

a) Gegeben sind K\_0 =€ 4.000,00;

K\_n =€ 5.000,00 und i\_2 =2,75 %.

Berechnen Sie die Verzinsungsdauer bei theoretischer Verzinsung.

5000 =4000 \*1,02752^n

1,0275^(2n) =1,25

2n \*ln(1,0275) =ln(1,25)

2n ~~8,22 Semester

n ~~4,11 Jahre

j-88 - Zinsen und Zinseszinsen

##-Beispiel 2.29: Verzinsungsdauer mit TVM-Solver (Fortsetzung)

b) Herr Maier legt € 6.000,00 bei i\_4 =1,5 % an.

Am Ende der Laufzeit hat er € 8.577,00.

Berechnen Sie die Verzinsungsdauer.

n =(ln((K\_n)/(K\_0)))/(ln(1 +i\_4)) =(ln((8577)/(6000)))/(ln(1,015)) ~~24 Quartale =6 Jahre

Die Verzinsungsdauer beträgt 6 Jahre.

----------

##### \*\*-Übungsaufgaben

i dekursiver Jahreszinssatz

q =1 +i Aufzinsungsfaktor

-----

##-2.015 Ermitteln Sie den zugehörigen Aufzinsungsfaktor:

a) i =5 %

b) i =12 1/2 %

c) i =0,5 %

d) i =4 3/8 %

e) i =37 %

f) i =10 1/4 %

g) i =5 7/8 %

h) i =1 1/2 %

----------

##-2.016 Berechnen Sie den Endwert bzw. Barwert (Zinseszins):

a) K\_0 =€ 900,00

i =5 5/8 %; K\_9 =?

b) K\_0 =€ 360,00

i =1 3/4 %; K\_7 =?

c) K\_(10) =€ 18.000,00

i =5 %; K\_0 =?

d) K\_8 =€ 9.000,00

i =4 %; K\_0 =?

-----

Endwertformel: K\_n =K\_0 \*(1 +i)^n

Hinweis: Rechnen Sie im Folgenden immer mit theoretischer Verzinsung.

----------

##-2.017 Vier Grundaufgaben der Zinseszinsrechnung:

a) |Endwert:| Berechnen Sie den Endwert, auf den ein Kapital von € 1.000,00 in 5 Jahren anwächst bei einer Verzinsung von 6 %.

**[]**

b) |Barwert:| Ermitteln Sie den Betrag, den man anlegen muss, um nach 5 Jahren bei einer Verzinsung von 6 % über € 1.400,00 verfügen zu können.

**[]**

c) |Zinssatz:| Berechnen Sie den Zinssatz, zu dem man € 1.000,00 für 5 Jahre anlegen muss, um € 1.400,00 zu bekommen.

**[]**

d) |Verzinsungsdauer:| Ermitteln Sie, wie lange man € 1.000,00 bei einer Verzinsung von 6 % anlegen muss, bis das Kapital auf € 1.400,00 angewachsen ist.

**[]**

----------

##-2.018 Berechnen Sie den fehlenden Wert (alle Beträge in €):

... | a) | b) | c) | d)

K\_0 | 5000 | **[]** | 5000 | 5000

i | 9 % | 9 % | **[]** | 9 %

n | 4 | 4 | 4 | **[]**

K\_n | **[]** | 7000 | 7000 | 7000

-----

... | e) | f) | g) | h)

K\_0 | 1500 | 1500 | 1500 | **[]**

i | 12 % | **[]** | 12 % | 12 %

n | **[]** | 4 | 4 | 4

K\_n | 2400 | 2400 | **[]** | 2400

----------

##-2.019

a) Berechnen Sie jenes Kapital, das bei 4 % p. a. in 7 Jahren € 400,00 Zinseszins ergibt.

**[]**

b) Argumentieren Sie, wie sich das Kapital verändert, wenn

b1) der Zinssatz größer als 4 % p. a. ist,

**[]**

b2) die Verzinsungsdauer länger als 7 Jahre ist.

**[]**

----------

##-2.020 Ein Kreditgeber verzinst eingelegte Geldbeträge mit i =3,5 % und verlangt für verliehene Beträge i' =6 %.

Berechnen Sie jenen Zinsgewinn, den er dadurch bei einem Betrag von € 100.000,00 in 20 Jahren hat.

**[]**

----------

##-2.021 Jemand legt € 7.000,00 zinsbringend an, wobei die Einlagen mit i =4,5 % verzinst werden. Nach 5 Jahren behebt er ein Drittel des dann vorhandenen Kapitals.

Berechnen Sie den Betrag, über den er 5 Jahre nach der Behebung verfügen kann.

**[]**

j-89 - Übungsaufgaben

##-2.022 Welches Kapital gibt, zuerst 10 Jahre zu 4,25 %, dann 3 Jahre zu 4 % jährlich verzinst, € 705,54 Zinseszinsen?

**[]**

----------

##-2.023 Ein Kapital in der Höhe von € 6.378,54 wird zuerst 5 Jahre mit i =5 %, dann 3 Jahre mit i =4 % und schließlich 2 Jahre mit i =4,5 % verzinst.

Berechnen Sie den Endwert.

**[]**

##-2.024 Ermitteln Sie jenen Jahreszinssatz, zu dem sich ein Kapital in

a) 15 Jahren und

**[]**

b) 25 Jahren verdoppelt.

**[]**

-----

i = ^(i)'w((K\_n)/(K\_0)) -1

----------

##-2.025 € 1.000,00 werden 3 Jahre zu 4 % und dann 4 Jahre zu einem unbekannten Jahreszinssatz verzinst und ergeben € 303,32 Zinseszinsen.

Berechnen Sie den zweiten Zinssatz.

**[]**

----------

##-2.026 Ermitteln Sie, wie lange € 1.800,00 zu 4 % jährlich verzinst werden müssen, damit sie auf € 2.300,00 anwachsen.

**[]**

-----

n =(ln((K\_n)/(K\_0)))/(ln(q))

q =1 +i

----------

##-2.027 Berechnen Sie jene Verzinsungsdauer, in der € 273,13 bei 4,5-prozentiger Jahresverzinsung auf € 300,00 anwachsen.

**[]**

----------

##-2.028 Berechnen Sie jene Verzinsungsdauer, in der sich ein Kapital bei 3,75 % dek. p. a. verdreifacht.

**[]**

----------

##-2.029 Christa muss heute durch eine Zahlung Z eine Schuld S tilgen, die in n Jahren fällig ist.

Erstellen Sie eine Formel, mit der der jährliche Zinssatz i berechnet werden kann.

**[]**

----------

##-2.030 Peter legt einen Betrag auf ein Sparbuch. Nach n Jahren ist dieser Betrag, der mit dem Zinssatz i verzinst wird, auf das Guthaben G angewachsen.

Kreuzen Sie an, welche Formel jenen Betrag B angibt, den Peter heute auf das Sparbuch legt.

**[]** B =G/((1 +i)^(-n))

**[]** B =G \*(1 +i)^n

**[]** B =G \*(1 +i)^(-n)

**[]** B =G \*i^n

**[]** B =G /(1 +i)^(-n)

----------

##-2.031 Anita legt einen Betrag B auf ein Sparbuch. Das Sparbuch wird mit dem Jahreszinssatz i verzinst und wächst auf den Endbetrag E an.

Erstellen Sie eine Formel, die die Laufzeit n für diese Sparvariante angibt.

**[]**

----------

##-2.032 Erstellen Sie eine Formel, mit der die beiden Zahlungen Z\_1 und Z\_2 für den Zinssatz i auf den Zeitpunkt

a) t =0 und

b) t =4

bewertet werden:

**[]**

----------

##-2.033 Eine Zahlung A von € 8.000,00 ist am 1. 1. 2014 fällig, eine Zahlung B von € 10.000,00 ist am 1. 1.2018 fällig.

a) Erklären Sie, wie Sie den Wert der beiden Zahlungen vergleichen können.

**[]**

b) Ermitteln Sie, welche Zahlung den höheren Wert bei

(1) i =5 % und

(2) i =6 % hat.

**[]**

c) Ermitteln Sie den Zinssatz, bei dem beide Zahlungen denselben Wert haben.

**[]**

d) Stellen Sie den Wert der Zahlungen am 1. 1.2014 in Abhängigkeit des Zinssatzes grafisch dar.

**[]**

j-90 - Zinsen und Zinseszinsen

##-2.034 Für eine Realität liegen folgende Angebote vor:

* A bietet € 30.000,00 per 1.4. 2022, € 20.000,00 per 1.4. 2024 und € 40.000,00 per 1.4. 2027.
* B hingegen bietet € 70.000,00 per 1.4. 2017.

Argumentieren Sie, welches Angebot für den Verkäufer günstiger ist und um wie viel sie sich am 1.4. 2017 unterscheiden. i =4 %

**[]**

----------

##-2.035 Für ein Grundstück erhält man folgende Angebote:

* A bietet € 600.000,00 per 1. 7. 2012,
* B bietet € 690.000,00 per 1. 7. 2015 und
* C bietet € 800.000,00 per 1. 7. 2019.

Argumentieren Sie, welches Angebot das günstigste für den Verkäufer ist.

i =5 %

**[]**

----------

##-2.036 Für ein Geschäftshaus liegen folgende Angebote vor:

* A bietet € 1.100.000,00 per 1.9. 2014,
* B bietet € 240.000,00 per 1.9. 2015, € 360.000,00 per 1.9. 2016 und € 600.000,00 per 1.9. 2017.

Argumentieren Sie, welches Angebot günstiger für den Verkäufer ist. Berechnen Sie, um wie viel sie sich am 1.9. 2014 unterscheiden. i =5 %

**[]**

----------

##-2.037 Ein Schuldner hat eine Verbindlichkeit, die aus drei gleich hohen Zahlungen von je € 8.000,00 besteht, die zu den Terminen 31. 12. 2018, 31. 12. 2020 und 31. 12. 2024 fällig sind. i =7 %

a) Stellen Sie die Zahlungen auf einer Zeitachse grafisch dar.

**[]**

b) Berechnen Sie jenen einmaligen Betrag, durch den der Schuldner die Verbindlichkeit am 31. 12. 2015 begleichen kann.

**[]**

----------

##-2.038 Am 1.4. 2018 wurde ein Kredit in der Höhe von € 40.000,00 gewährt. Der Schuldner möchte diesen durch zwei gleich hohe Zahlungen Z am 1.4. 2020 und am 1.4. 2022 bei i =5,5 % zurückzahlen.

a) Stellen Sie die Zahlungen auf einer Zeitachse grafisch dar.

**[]**

b) Ermitteln Sie die Höhe der beiden Zahlungen.

**[]**

----------

##-2.039 Ein Darlehen von € 50.000,00 wird nach 5 Jahren mit € 65.000,00 getilgt.

a) Berechnen Sie den entsprechenden Zinssatz i.

**[]**

b) Die Rückzahlung in Höhe von € 65.000,00 erfolgt zu einem späteren Zeitpunkt.

Argumentieren Sie, wie sich dadurch der Zinssatz verändert.

**[]**

----------

##-2.040 Für einen Kredit über € 15.000,00, der mit 4 % p. a. verzinst wird, werden nach einem Jahr € 3.000,00 zurückgezahlt, der Rest in drei gleich hohen Zahlungen nach 4 Jahren, 5 Jahren bzw. nach 6 Jahren.

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom und den Bezugszeitpunkt auf einer Zeitachse grafisch dar.

**[]**

b) Schätzen Sie die Höhe der Zahlungen, indem Sie die Verzinsung vernachlässigen.

Erklären Sie, ob die Höhe der Zahlung durch Berücksichtigung der Zinsen größer oder geringer wird.

**[]**

c) Berechnen Sie die Höhe der Zahlungen.

**[]**

d) Argumentieren Sie, wie sich die Höhe der Raten verändert, wenn der Zinssatz steigt.

**[]**

----------

##-2.041 Auf einem Konto wurden unregelmäßige Ein- und Auszahlungen getätigt. Der Kontostand wurde durch folgende Rechnung am 1. 1. 2015 ermittelt:

2500 \*1,0325^(3,5) -1500 \*1,0325^2 +1000 \*1,0325 =2229,53

a) Beschreiben Sie die Kontobewegungen und den Zinssatz auf dem Konto.

**[]**

b) Tragen Sie die in der Rechnung vorkommenden Zahlungen und den Bezugszeitpunkt auf der Zeitachse ein:

1. 1. 2011 - 1. 1. 2012 - 1. 1. 2013 - 1. 1. 2014 - 1. 1. 205

**[]**

j-91 - Übungsaufgaben

##-2.042 Zur Tilgung einer Schuld in der Höhe von € 10.000 wird folgende Rechnung aufgestellt:

1234 \*1,025^(-1,75) +6000 \*1,025^(-4,5) +4000 \*1,025^(-6) =10000,00

a) Stellen Sie die in der Rechnung vorkommenden Zahlungen und den Bezugszeitpunkt auf einer Zeitachse dar.

**[]**

b) Beschreiben Sie, wie diese Schuld (Höhe der Zahlung, Zahlungszeitpunkt) getilgt wird.

Lesen Sie den verwendeten Zinssatz aus der Gleichung ab.

**[]**

----------

##-2.043 In den beiden Zeitachsen sind die Einzahlungen auf zwei jeweils für fünf Jahre gebundene Sparbücher mit Zinssatz i dargestellt.

Erklären Sie, auf welchem Sparbuch nach Ablauf der 5 Jahre der höhere Geldbetrag behoben werden kann.

**[]**

----------

##-2.044 Markus schuldet € 2.600,00 sofort, € 4.800,00 nach einem Jahr und € 8.600,00 nach 3 Jahren.

a) Stellen Sie diese Zahlungen auf einer Zeitachse grafisch dar.

**[]**

b) Ermitteln Sie, wann die gesamte Schuld bei i =5 % durch eine Zahlung von € 16.000,00 beglichen werden kann.

**[]**

----------

##-2.045 Anna schuldet € 30.000,00 per 1. 4. 2012, € 40.000,00 per 1. 6. 2013 und € 50.000,00 per 1. 4. 2016 bei i =4,25 %.

a) Stellen Sie diese Zahlungen auf einer Zeitachse grafisch dar.

**[]**

b) Ermitteln Sie, wann die gesamte Schuld durch € 120.000,00 beglichen werden kann.

**[]**

----------

##-2.046 Helmut schuldet € 10.000,00 per 1. 6. 2013, € 50.000,00 per 1. 9. 2014 und € 40.000,00 per 1. 6. 2016 bei i =4,5 %.

a) Berechnen Sie, wann die Schuld durch € 100.000,00 beglichen werden kann.

**[]**

b) Ermitteln Sie, an welchem Tag € 120.000,00 denselben Wert haben.

**[]**

----------

##-2.047 Eine Bank bietet ein "Sparbuch bis 3 %" an: Im 1. Jahr zahlt die Bank 1,25 % p. a., im 2. Jahr 1,75 % p. a und im dritten Jahr 3,25 % p. a.

Berechnen Sie die durchschnittliche Verzinsung.

**[]**

----------

##-2.048 Eine Bank bietet ein "Supersparbuch bis 5 %" an:

In den ersten drei Jahren zahlt die Bank 0,75 % p. a., im 4. und 5. Jahr 1,75 % p. a und im 6. Jahr 5 %.

Argumentieren Sie, warum es ein Nachteil wäre, dieses "Supersparbuch" gegen ein bestehendes Sparbuch mit 2 % Verzinsung einzutauschen.

**[]**

----------

##-2.049 Ein Geldinstitut bietet bei sechsjähriger Bindung des Kapitals ein "Best-Sparbuch" mit steigenden Zinsen an: In den ersten drei Jahren zahlt die Bank 1 % p. a., im vierten und fünften Jahr 1,5 % p. a. und im sechsten Jahr 5 % p. a. Die Bank gibt bei einer Einlage von € 1.000,00 einen Wert von € 1.114,50 nach sechs Jahren (ohne Berücksichtigung der KESt) an.

Thomas sagt: "Im Mittel wird mit (1 % +1,5 % +5 %)/3 =2,5 % p. a. verzinst." Anna behauptet: "Man muss auch die Verzinsungsdauer berücksichtigen. Im Mittel wird mit (1 % +1 % +1 % +1,5 % +1,5 % +5 %)/6 =1,8 % p. a. verzinst."

Maria sagt: "Auch das ist nicht ganz richtig. Man muss den Zinssatz so bestimmen, dass sich der angegebene Endwert ergibt. Das sind dann ca. 1,82 % p. a."

Begründen Sie, wer von den Dreien recht hat.

**[]**

j-92 - Zinsen und Zinseszinsen

##### \*\*-Unterjährige Verzinsung

##-2.050 Berechnen Sie den Endwert:

a) K\_0 =€ 3.600,00; i\_2 =3,75 %; 3 Jahre

**[]**

b) K\_0 =€ 6.000,00; i\_4 =2,25 %; 5 Jahre

**[]**

c) K\_0 =€ 600,00; i\_(12) =0,5 %; 4 Jahre

**[]**

----------

##-2.051 Berechnen Sie den Barwert:

a) K\_8 =€ 9.000,00; i\_2 =2 %

**[]**

b) K\_8 =€ 200.000,00; i\_4 =1 %

**[]**

c) K\_5 =€ 600,00; i\_(12) =0,5 %

**[]**

----------

##-2.052 Ein Kapital von € 20.000,00 war 6 Jahre mit i =6 % angelegt, ein ebenso großes 6 Jahre mit i\_2 =3 %.

Berechnen Sie die Differenz der Zinseszinsen.

**[]**

----------

##-2.053 Manfred will seinen Mazda verkaufen und bekommt zwei Angebote:

* A bietet € 10.000,00 in einem halben Jahr, € 3.000,00 nach neun Monaten und € 5.000,00 in einem Jahr.
* B bietet € 5.000,00 sofort, € 5.000,00 in einem halben Jahr und € 8.000,00 in einem Jahr.

a) Stellen Sie die beiden Angebote grafisch auf zwei Zeitachsen dar.

**[]**

b) Argumentieren Sie, welches Angebot für Manfred bei einem Zinssatz von i\_4 =1,5 % günstiger ist.

Berechnen Sie dazu die Bar- oder Endwerte der beiden Angebote und deren Differenz.

**[]**

c) Welcher zusätzliche Betrag müsste von A bzw. B nach einem Jahr angeboten werden, um ein gleichwertiges Angebot zu erstellen?

**[]**

----------

##-2.054 Hermine ist begeisterte Motorradfahrerin und möchte eine Honda CBR 600 RR kaufen. Für ihre alte Maschine bekommt sie zwei Angebote:

* A bietet € 3.000,00 sofort, € 2.000,00 nach drei Monaten und € 1.000,00 in einem halben Jahr.
* B bietet jeweils € 2.000,00 nach zwei Monaten, nach vier Monaten und in einem halben Jahr.

a) Stellen Sie die beiden Angebote grafisch auf zwei Zeitachsen dar.

**[]**

b) Argumentieren Sie, welches Angebot für Hermine bei i\_(12) =1 % günstiger ist.

Berechnen Sie dazu die Barwerte der beiden Angebote und deren Differenz.

**[]**

c) Welcher zusätzliche Betrag müsste von A bzw. B nach einem Jahr angeboten werden, um ein gleichwertiges Angebot zu erstellen?

**[]**

----------

##-2.055 Eine Schuld von € 20.000,00 wird bei i\_2 =3 % durch drei Zahlungen getilgt:

die erste Zahlung € 6.000,00 nach einem halben Jahr, die zweite Zahlung € 7.000,00 nach 1,5 Jahren und die dritte Zahlung nach 2 Jahren.

a) Schätzen Sie die Höhe der dritten Zahlung, indem Sie die Verzinsung vernachlässigen.

Erklären Sie, ob die Höhe der Zahlung durch Berücksichtigung der Zinsen größer oder geringer wird.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe der dritten Zahlung.

c) Argumentieren Sie, wie sich die Höhe der Zahlung verändert, wenn der Zinssatz steigt.

**[]**

----------

##-2.056 Eine Schuld von € 25.000,00 wird zu einem Zinssatz von i\_4 =2 % durch eine erste Zahlung von € 10.000,00 nach 9 Monaten und durch zwei weitere gleich hohe Zahlungen nach 18 und 24 Monaten getilgt.

a) Berechnen Sie die Höhe dieser beiden Zahlungen.

**[]**

b) Argumentieren Sie, wie sich die Höhe der Zahlungen verändert, wenn der Zinssatz sinkt.

**[]**

----------

|Umrechnung äquivalenter Zinssätze:|

(1 +i\_m)^m =1 +i

(1 +i\_(12))^(12) =(1 +i\_4)^4 =(1 +i\_2)^2 =1 +i

q\_(12)^(12) =q\_4^4 =q\_2^2 =q

j-93 - Übungsaufgaben

##-2.057 Eine Schuld von € 12.000,00 wird bei i\_4 =2,5 % durch zwei Zahlungen nach einem halben und nach einem Jahr getilgt, wobei die zweite Zahlung doppelt so hoch ist wie die erste Zahlung.

a) Ermitteln Sie die Höhe der beiden Zahlungen.

**[]**

b) Stellen Sie den Zahlungsstrom und Ihren Bezugszeitpunkt auf einer Zeitachse grafisch dar.

**[]**

----------

##-2.058 Erklären Sie, was man unter äquivalenten Zinssätzen versteht.

Ermitteln Sie zu i =6 % die äquivalenten unterjährigen Zinssätze i\_2, i\_4 und i\_(12).

**[]**

----------

##-2.059 Rechnen Sie die äquivalenten Zinssätze um:

... | a) | b) | c) | d) | e) | f) | g)

i | **[]** | **[]** | **[]** | 8 % | **[]** | **[]** | **[]**

i\_2 | 2,5 % | **[]** | **[]** | **[]** | 4 % | **[]** | **[]**

i\_4 | **[]** | 2 % | **[]** | **[]** | **[]** | 3 % | **[]**

i\_(12) | **[]** | **[]** | 0,5 % | **[]** | **[]** | **[]** | 1 %

----------

##-2.060 Berechnen Sie, wie lange € 1.800,00 zu 1,75 % p. s. verzinst werden müssen, damit sie € 455,40 Zinsen tragen.

**[]**

----------

##-2.061 Anita braucht einen Kredit. Zwei Banken bieten folgende Angebote an.

Die Bank A verzinst den Kredit halbjährlich mit 4,6 %, die Bank B vierteljährlich mit 2 %.

Argumentieren Sie, bei welcher Bank Anita den für sie günstigeren Zinssatz bekommt.

**[]**

----------

2.062 Zur Tilgung einer Schuld wird bei i\_2 =0,75 % folgende Rechnung aufgestellt:

(5000)/(1,0075^(0,5)) +(8000)/(1,0075^(2,5)) =12833,30

a) Übertragen Sie die gegebene Gleichung in eine bruchfreie Form mit negativen Hochzahlen.

**[]**

b) Ermitteln Sie die Höhe der Schuld sowie jeweils Zeitpunkt und Höhe der Zahlungen.

**[]**

c) Stellen Sie die in der Rechnung vorkommenden Zahlungen auf einer Zeitachse dar.

**[]**

----------

##-2.063 Ein Kapital von € 5.000,00 wird drei Jahre angelegt.

Berechnen Sie den Endwert bei einer Verzinsung von

a) 4 % p. a.,

**[]**

b) 2 % p. s. und

**[]**

c) 1 % p. q.

**[]**

d) Berechnen Sie den Endwert bei einer stetigen Verzinsung mit 4 %.

**[]**

----------

##-2.064 Ein Kapital von € 100.000,00 wird zu i =6 % ein Jahr lang verzinst.

Berechnen Sie jeweils den Endwert, wenn

a) jährlich,

**[]**

b) halbjährlich,

**[]**

c) vierteljährlich,

**[]**

d) monatlich und

**[]**

e) stetig verzinst wird.

**[]**

j-94 - Zinsen und Zinseszinsen

##### \*\*-Ziele erreicht?

##-Z 2.1 Das Endkapital auf einem Sparbuch wird mit dem gegebenen Ausdruck ermittelt:

K =1000 \*(1 +(300)/(360) \*0,005 )

a) Lesen Sie aus dem Ausdruck die Höhe des Anfangskapitals sowie die Verzinsungsdauer und den Zinssatz ab.

**[]**

b) Kreuzen Sie die richtige Aussage an und begründen Sie Ihre Entscheidung:

Das Endkapital verdoppelt sich, wenn

**[]** der Zinssatz doppelt so hoch ist.

**[]** die Verzinsungsdauer doppelt so lang ist.

**[]** das Anfangskapital doppelt so hoch ist.

----------

##-Z 2.2 Sandra borgt sich von ihrer Freundin Karin € 9,50.

Zwei Wochen später gibt sie ihr dafür € 10,00 zurück.

a) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung des Jahreszinssatzes, mit dem die € 9,50 in diesem Fall mit einfachen Zinsen verzinst wurden.

**[]**

b) Berechnen Sie den Jahreszinssatz.

**[]**

c) Erklären Sie, ob der Jahreszinssatz nur halb so hoch wäre, wenn Sandra die € 10,00 erst nach vier Wochen bezahlt.

**[]**

----------

##-Z 2.3 Herr Auer kauft neue Küchengeräte um € 4.500,00. Bei Zahlung innerhalb von 10 Tagen gewährt ihm der Händler einen Skonto von 2 %, sonst Zahlung innerhalb von 30 Tagen ab Rechnungsdatum.

Zur Bezahlung am Ende der 10-Tagesfrist müsste Herr Auer sein Konto bei i =10 % (für 20 Tage) um € 4.000,00 überziehen.

a) Schätzen Sie anhand der nötigen Zinszahlungen ab, ob Herr Auer den Skonto ausnützen soll.

**[]**

b) Berechnen Sie, wie hoch der Überziehungszinssatz i des Kontos maximal sein darf, dass sich die Bezahlung am Ende der 10-Tagesfrist lohnt, falls das Konto um den gesamten zu bezahlenden Betrag überzogen werden muss.

**[]**

----------

##-Z 2.4 Mit dem Ausdruck E =K \*1,03 \*1,025^2 wird der Endwert E eines über einen Zeitraum von drei Jahren verzinsten Kapitals K berechnet.

a) Lesen Sie aus der Formel ab, wie lange jeweils und zu welchen Zinssätzen das Kapital verzinst wurde.

**[]**

b) Erklären Sie, ob man aus der Formel ablesen kann, in welcher Reihenfolge die unterschiedlichen Zinssätze angewendet wurden.

**[]**

----------

##-Z 2.5 Anton schuldet seinem Bruder Geld.

Er soll dies durch folgende Raten zurückzahlen:

€ 2.500,00 am 1. 1.2015,

€ 5.000,00 am 1. 1.2016 und

€ 5.000,00 am 1. 1.2017.

a) Stellen Sie die zu tätigenden Zahlungen auf einer Zeitachse dar.

**[]**

b) Anton bietet seinem Bruder an, an Stelle der drei vorgesehenen Zahlungen, am 1. 1.2016 einen Einmalbetrag von € 12.500,00 zu leisten.

Begründen Sie, ob der Bruder dieses Angebot annehmen soll.

**[]**

c) Berechnen Sie, welchen Betrag Anton am 1. 1.2014 von seinem Bruder geliehen hat.

Nehmen Sie dazu an, dass die beiden einen Zinssatz i =2 % vereinbart haben.

**[]**

----------

##-Z 2.6 Beata zahlt 3 Beträge beginnend am 1. 1.2015 auf ein Konto.

Der Endwert wird durch folgenden Ausdruck berechnet:

E =2500 \*q^(1,5) +2000 \*q +3000 \*q^(0,5)

q =1 +i

a) Lesen Sie aus dem Ausdruck ab, zu welchem Zeitpunkt Beata den Endwert berechnet.

**[]**

b) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

**[]**

j-95 - Ziele erreicht?

##-Z 2.7 Eine Bank bietet ein Sprungsparbuch mit 5-jähriger Laufzeit an.

Der Zinssatz beträgt in den ersten 3 Jahren 0,75 % p. a., im 4. Jahr 1,25 % p. a. und im 5. Jahr 2,25 % p. a.

Sabine rechnet die angegebene jährliche durchschnittliche Verzinsung in Höhe von 1,15 % p. a. nach:

z^- = ^(5)'w(0,75^3 \*1,25 \*2,25) -1 =0,035

a) Erklären Sie, welchen Fehler Sabine gemacht hat.

**[]**

b) Stellen Sie ihre Rechnung richtig.

**[]**

----------

##-Z 2.8 Folgende Zeitachsen stellen jeweils die Rückzahlung einer Schuld dar, die zum Zeitpunkt 0 aufgenommen wurde.

a) Nehmen Sie an, dass für beide Rückzahlungsvarianten der gleich hohe Zinssatz zu bezahlen ist.

Erklären Sie, mit welcher der Varianten eine höhere Schuld beglichen wird.

**[]**

b) Beide Zahlungsflüsse tilgen eine gleich hohe Schuld.

Erklären Sie, in welcher Variante ein geringerer Zinssatz zu bezahlen ist.

**[]**

j-96 - Rentenrechnung

# \*\*-6. SEMESTER

## \*\*-3 Rentenrechnung

Beim Begriff "Rente" denken Sie vermutlich an "Pension".

In der Alltagssprache ist mit dem Satz "Karl bezieht eine Rente." gemeint: "Karl ist im Ruhestand und bekommt eine staatliche Pension."

In der Finanzmathematik versteht man unter einer Rente einen regelmäßigen Zahlungsstrom, eine Folge von Zahlungen

* in gleicher Höhe und
* in gleichen Zeitabständen.

Viele Finanzgeschäfte lassen sich als regelmäßige Zahlungsströme beschreiben:

* Sparformen mit regelmäßigen Einzahlungen wie das Bausparen,
* Kredite mit gleich hohen Kreditrückzahlungen,
* Gehaltszahlungen mit gleich hohen Gehältern,
* Pensionszahlungen mit gleich hohen monatlichen Bezügen,
* Ratengeschäfte mit gleich hohen Raten,
* Leasinggeschäfte mit gleich hohen Leasingraten,
* Anleihen mit gleich hohen Kuponzahlungen
* usw.

Mithilfe der Zinsrechnung und der geometrischen Reihe lassen sich solche regelmäßige Zahlungsströme berechnen.

----------

Tipp: Eine |Rente| ist eine Folge von Zahlungen

* in |gleicher| Höhe (Raten),
* in |gleich| bleibenden Zeitabständen (Perioden).

----------

##### \*\*-Meine Ziele

Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

* den Zusammenhang zwischen geometrischen Reihen und der Rentenrechnung beschreiben,
* Zahlungsströme grafisch darstellen und gegebene grafische Darstellungen des Zahlungsstroms interpretieren,
* die charakteristischen Größen der Rentenrechnung berechnen, interpretieren und im Kontext deuten,
* Rentenumwandlungen durchführen und deren Ergebnisse interpretieren,
* den Begriff des Effektivzinssatzes erklären, mittels Technologie berechnen und das Ergebnis interpretieren.

----------

##### \*\*-Worum geht's hier?

|Endwert eines Sparbuchs|

David zahlt 5 Jahre lang jeweils zu Jahresbeginn € 1.000,00 auf ein Sparbuch ein, das mit 4 % p. a. verzinst wird.

Berechnen Sie das Guthaben am Ende des fünften Jahres.

Stellen Sie zunächst den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse grafisch dar.

1000 \*q =1040,00

1000 \*q^2 =1081,60

1000 \*q^3 =1124,86

1000 \*q^4 =1169,89

1000 \*q^5 =1216,65

=5632,97

Gesucht ist die Summe aller aufgezinsten Raten am Ende des fünften Jahres. Das Ende des fünften Jahres ist somit unser Bezugszeitpunkt.

----------

Tipp für das Erstellen einer Zeitachse:

Kennzeichnen Sie den Bezugszeitpunkt durch ein Fähnchen . Beginnen Sie Ihre Bewertung immer mit der Rate, die dem Bezugszeitpunkt am nächsten liegt.

j-97 - Rentenrechnung

Auf diesen Zeitpunkt müssen alle 5 Raten aufgezinst werden.

Der Wert der Summe aller aufgezinsten Raten am Bezugszeitpunkt heißt |Endwert| oder |Final Value FV|.

FV =1000 \*1,04 +1000 \*1,04^2 +1000 \*1,04^3 +1000 \*1,04^4 +1000 \*1,04^5 =

=1000 \*1,04 \*(1 +1,04 +1,04^2 +1,04^3 +1,04^4) =5632,98

oder mithilfe des Summenzeichens:

FV ='Si[t=1;5](1000 \*1,04^t) =5632,98

Nach 5 Jahren hat David € 5.632,98 auf seinem Sparbuch.

t in Jahren | Rate | aufgezinste Rate

0 | € 1.000,00 | € 1.216,65

1 | € 1.000,00 | € 1.169,86

2 | € 1.000,00 | € 1.124,86

3 | € 1.000,00 | € 1.081,60

4 | € 1.000,00 | € 1.040,00

FV =€ 5.632,98

----------

|Barwert eines Sparbuchs|

Jennifer möchte 5 Jahre lang jeweils zu Jahresbeginn € 1.000,00 von einem Sparbuch, das mit 4 % p. a. verzinst wird, abheben.

Berechnen Sie, welcher Betrag auf dem Sparbuch liegen muss, wenn nach Auszahlung der letzten Rate das gesamte Guthaben abgehoben sein soll.

-----

Beginnen Sie wieder mit der Darstellung des Zahlungsstroms auf einer Zeitachse. Gesucht ist die Summe aller abgezinsten Raten am Anfang des ersten Jahres. Der Beginn des ersten Jahres ist der Bezugszeitpunkt.

Auf diesen Bezugszeitpunkt werden alle 5 Raten abgezinst.

Der Wert der Summe aller abgezinsten Raten am Bezugszeitpunkt heißt |Barwert| oder |Present Value PV|.

PV =1000 +1000 \*1,04^(-1) +1000 \*1,04^(-2) +1000 \*1,04^(-3) +1000 \*1,04^(-4)

PV ='Si[t=0;4](1000 \*1,04^(-t)) =4629,90

Am Beginn der 5 Jahre muss Jennifer ein Guthaben von € 4.629,90 auf dem Sparbuch haben.

-----

t in Jahren | Rate | abgezinste Rate

0 | € 1.000,00 | € 1.000,00

1 | € 1.000,00 | € 961,54

2 | € 1.000,00 | € 924,56

3 | € 1.000,00 | € 889,00

4 | € 1.000,00 | € 854,00

FV =€ 4.629,90

-----

Es ist derselbe Zahlungsstrom wie bei David, diesmal ist aber der Wert der Summe aller abgezinsten Raten am Beginn des ersten Jahres gesucht.

Da der Zahlungsstrom schon bei David auf das Ende des fünften Jahres bewertet worden ist, kann das Guthaben, das Jennifer benötigt, auch durch Abzinsen von Davids Endwert berechnet werden:

PV =FV \*1,04^(-5) =5632,98 \*1,04^(-5) =4629,90

Abhängigkeit des Endwerts und des Barwerts vom Zinssatz:

* Wird |ohne Verzinsung| gerechnet, erhält man für den Bar- und den Endwert die |Summe der Raten|.

In beiden Beispielen sind dies € 5.000,00.

* Wird |mit Verzinsung| gerechnet, ist der |Barwert kleiner| als die Summe der Raten.

Für i =4 % erhält man € 4.629,90.

Eine |Erhöhung| des Zinssatzes i |verringert| den Barwert PV, da die Raten stärker abgezinst werden.

Für i =10 % erhält man € 4.169,87.

* Wird mit Verzinsung gerechnet, ist der Endwert größer als die Summe der Raten.

Für i =4 % erhält man € 5.632,98.

Eine |Erhöhung| des Zinssatzes |erhöht| den Endwert FV, da die Raten stärker aufgezinst werden.

Für i =10 % erhält man € 6.715,61.

j-98 - Rentenrechnung

### \*\*-3.1 Grundbegriffe

Tipp: Übliche Rentenperioden sind: Jahre, Semester, Quartale oder Monate.

-----

|Definition: Begriffe der Rentenrechnung|

* Eine |Rente| ist eine Folge von Zahlungen
* in gleicher Höhe, die
* in gleichen Zeitabständen fällig sind.

Die Zahlungen in gleicher Höhe heißen |Raten|.

Der Zeitraum zwischen zwei aufeinander folgenden Raten heißt |Rentenperiode|.

* Eine Rente heißt |vorschüssig|, wenn jede Rate am |Beginn| der zugehörigen Periode fällig ist.

Eine Rente heißt |nachschüssig|, wenn jede Rate am |Ende| der zugehörigen Periode fällig ist.

* Der |Rentenbeginn| ist der |Beginn| der |ersten| Rentenperiode.

Das |Rentenende| ist das |Ende| der |letzten| Rentenperiode.

Der Zeitraum zwischen Rentenbeginn und Rentenende heißt |Rentendauer| n.

* Der |Barwert B| oder |Present Value PV| einer Rente ist die Summe aller auf den Rentenbeginn abgezinsten Raten.

Der |Endwert E| oder |Final Value FV| einer Rente ist die Summe aller auf das Rentenende aufgezinsten Raten.

----------

Bei |vorschüssigen| Renten erfolgt die Zahlung der ersten Rate am Rentenbeginn, die letzte Ratenzahlung erfolgt eine Periode vor Rentenende.

Bei |nachschüssigen| Renten erfolgt die erste Ratenzahlung am Ende der ersten Rentenperiode, die Zahlung der letzten Rate erfolgt am Rentenende.

Ob eine Rente vor- oder nachschüssig gerechnet wird, entscheidet der Bezugszeitpunkt.

Bedenken Sie, dass es aber für die Buchhaltung einen Unterschied macht, ob eine Zahlung am Ende eines Jahres oder am Anfang des folgenden Jahres verbucht wird.

j-99 - Geometrische Reihe

Grundlegend für alle finanzmathematischen Überlegungen ist das

|Äquivalenzprinzip|

Die Leistung des Rentenbeziehers ist gleich der Gegenleistung des Rentenzahlers, beide bezogen auf denselben Zeitpunkt.

-----

Äquivalenzprinzip: Leistung =Gegenleistung

----------

### \*\*-3.2 Geometrische Reihe

Für eine größere Anzahl von Raten ist die im Einführungsbeispiel durchgeführte Berechnung aufwändig.

Für einen regelmäßigen Zahlungsstrom können mithilfe der sogenannten geometrischen Reihe allgemein gültige Summenformeln für die Rentenrechnung abgeleitet werden.

Eine |geometrische Folge| ist eine Aufeinanderfolge von Zahlen oder Termen a\_1, a\_2, a\_3, ... mit dem ersten Glied a\_1, wobei der |Quotient q| zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist:

q =(a\_2)/(a\_1), d. h. a\_2 =a\_1 \*q

q =(a\_3)/(a\_2), d. h. a\_3 =a\_2 \*q =a\_1 \*q^2

q =(a\_4)/(a\_3), d. h. a\_4 =a\_3 \*q =a\_1 \*q^3

usw.

Beispiel: geometrische Folge

3, 6, 12, 24, ... ist eine geometrische Folge mit

q =6/3 =(12)/6 =(24)/(12) =... =2 und a\_1 =3.

----------

|Geometrische Folge|

a\_1 erstes Glied

a\_2 =a\_1 \*q zweites Glied

a\_3 =a\_1 \*q^2 drittes Glied

a\_4 =a\_1 \*q^3 viertes Glied

.....

a\_n =a\_1 \*q^(n -1) n-tes Glied

q =(a\_2)/(a\_1) =(a\_3)/(a\_2) =... =(a\_n)/(a\_(n -1))

----------

|Definition: Geometrische Reihe|

Die Summe der ersten n Glieder einer geometrischen Folge

s\_n =a\_1 +a\_2 +a\_3 +... +a\_n =

=a\_1 +a\_1 \*q +a\_1 \*q^2 +... +a\_1 \*q^(n -1) =

=a\_1 \*(1 +q +q^2 +... +q^(n -1))

heißt n-tes Glied einer |geometrischen Reihe|.

-----

s\_n =a\_1 +a\_2 +a\_3 +... +a\_n

----------

Beispiel: Berechnen Sie die Summe der ersten 8 Glieder der geometrischen Folge

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384.

s\_8 =3 +6 +12 +24 +48 +96 +192 +384 =765

q =6/3 =(12)/6 =(24)/(12) =(384)/(192) =2

-----

Allgemein: Berechnen Sie die Summe der ersten n Glieder einer geometrischen Folge a\_1, a\_1 \*q, ...

s\_n =a\_1 +a\_1 \*q +a\_1 \*q^2 +a\_1 \*q^3 +... +a\_1 \*q^(n -1)

q =(a\_2)/(a\_1) =(a\_3)/(a\_2) =... =(a\_n)/(a\_(n -1))

j-100 - Rentenrechnung

Subtrahiert man von der Summe s\_n der ersten n Glieder einer geometrischen Folge das q-fache dieser Summe, so erhält man eine kompakte Formel zur Berechnung von s\_n:

s\_n =a\_1 +a\_1 \*q +a\_1 \*q^2 +... +a\_1 \*q^(n -2) +a\_1 \*q^(n -1)

s\_n \*q =a\_1 \*q +a\_1 \*q^2 +... +a\_1 \*q^(n -2) +a\_1 \*q^(n -1) +a\_1 \*q^n \*(-1)

-----

s\_n -s\_n \*q =a\_1 -a\_1 \*q^n

s\_n \*(1 -q) =a\_1 \*(1 -q^n)

s\_n =a\_1 \*(1 -q^n)/(1 -q)

----------

|Geometrische Reihe|

s\_n =a\_1 \*(q^n -1)/(q -1) <=> s\_n =a\_1 \*(a\_(n +1))/(a\_n)

a\_1 erstes Glied

q Quotient q \=1

s\_n Summe der ersten n Glieder

----------

Für q >1 verwendet man:

s\_n =a\_1 \*(q^n -1)/(q -1)

Für q <1 verwendet man:

s\_n =a\_1 \*(1 -q^n)/(1 -q)

----------

##-Beispiel 3.1: Geometrische Reihe

a) s\_8 =3 +6 +12 +24 +48 +96 +192 +384 =

=3 \*(1 +2 +2^2 +2^3 +2^4 +2^5 +2^6 +2^7) =3 \*(2^8 -1)/(2 -1) =765

a^1 =3; q =(a\_2)/(a\_1) =6/3 =2; n =8

-----

b) s\_(10) =1/2 +1/4 +1/8 +... +1/(2^(10))

=1/2 \*(1 +1/2 +1/4 +1/8 +... +1/(2^9)) =

=1/2 \*(1 -(1/2)^(10))/(1 -(1/2)) =(1023)/(1024) ~~0,999

a\_1 =1/2; q =(a\_2)/(a\_1) =1/4 /1/2 =1/2; n =10

Geometrische Reihen können auch mit dem Summenzeichen geschrieben und mit Technologie berechnet werden:

1/2 +1/4 +1/8 +... +1/(2^(10)) ='Si[n=1;10](1/(2^n)) ='Si[n=1;10](2^(-n))

-----

c) s\_n =x +x^2 +x^3 +... +x^n =

=x \*(1 +x +x^2 +... +x^(n -1)) =x \*(x^n -1)/(x -1)

a\_1 =x; q =(x^2)/x =x

x +x^2 +x^3 +... +x^n ='Si[t=1;n](x^t)

-----

d) s\_(11) =R +R \*q +R \*q^2 +R \*q^3 +... +R \*q^(10) =

=R \*(1 +q +q^2 +q^3 +... +q^(10)) =R \*(q^(11) -1)/(q -1)

a\_1 =R; n =11

R +R \*q +R \*q^2 +R \*q^3 +... +R \*q^(10) ='Si[t=0;10](R \*q^t)

----------

### \*\*-3.3 Ganzjährige Renten

#### \*\*-3.3.1 Endwert und Barwert ganzjähriger Renten

Eine |Rente| ist |ganzjährig|, wenn die |Rentenperiode| ein Jahr beträgt.

Die geometrische Reihe ermöglicht es, die Rentenrechnung (gleiche Raten, gleiche Perioden) deutlich zu vereinfachen.

Rentenaufgaben können mithilfe der geometrischen Reihe und mit Technologieunterstützung gelöst werden.

j-101 - Ganzjährige Renten

##-Beispiel 3.2: End- und Barwert einer nachschüssigen Jahresrente

a) Bernhard zahlt 5 Jahre lang jeweils |am Ende| des Jahres € 1.000,00 auf ein Sparbuch ein, das mit 4 % p. a. verzinst wird.

Berechnen Sie das Guthaben am Ende des fünften Jahres.

Gesucht ist der Endwert einer 5-jährigen nachschüssigen Rente:

|Lösung mit geometrischer Reihe:|

FV =1000 +1000 \*1,04 +1000 \*1,04^2 +1000 \*1,04^3 +1000 \*1,04^4 =

=1000 \*(1 +1,04 +1,04^2 +1,04^3 +1,04^4) =

=1000 \*(1,04^5 -1)/((1,04 -1) =1000 \*(1,04^5 -1)/((0,04) =5416,32

a =1000; q =(1000 \*1,04)/(1000) =1,04; n =5

Das Guthaben nach fünf Jahren beträgt € 5.416,32.

-----

|Lösung mit dem TVM-Solver:|

Geben Sie die Werte wie dargestellt in den TVM-Solver ein.

N =5 Anzahl der Raten: 5 Raten

I% =4 nomineller Jahreszinssatz

PV =0 Barwert am Beginn der Rente

PMT =-1000 Höhe der Jahresrate, Vorzeichen beachten

FV =5416.32 gesuchter Endwert

P/Y =1 eine Zahlung pro Jahr

C/Y =1 eine Zinsperiode pro Jahr

PMT: END BEGIN Markierung auf END, Rate nachschüssig, am Ende der Periode

Setzen Sie den Cursor hinter jene Größe, die berechnet werden soll, hier hinter FV=.

Drücken Sie die Tasten (ALPHA) [SOLVE]. Das Rechenergebnis wird durch ein schwarzes Quadrat im Solver gekennzeichnet.

-----

b) Kathrin möchte 5 Jahre lang jeweils am Ende des Jahres € 1.000,00 von einem Sparbuch, das mit 4 % p. a. verzinst wird, abheben.

Berechnen Sie, welcher Betrag auf dem Sparbuch liegen muss, wenn nach Auszahlung der letzten Rate das gesamte Guthaben abgehoben sein soll.

Gesucht ist der Barwert einer 5-jährigen nachschüssigen Rente:

Es ist derselbe Zahlungsstrom, der schon bei Bernhard auf das Ende des fünften Jahres bewertet worden ist.

Deshalb kann das Guthaben, das Kathrin benötigt, durch Abzinsen von Bernhards Endwert berechnet werden:

PV =FV \*1,04^(-5) =5416,32 \*1,04^(-5) =4451,82

----------

Tipp zum TVM-Solver: Geben Sie alle Zahlungen, die Sie erhalten, mit positivem Vorzeichen ein. Beträge, die Sie zahlen müssen, geben Sie mit negativem Vorzeichen (-) ein.

Der TVM-Solver wird als Black Box verwendet. Zeitaufwändige Berechnungen werden abgekürzt. Sie können sich auf das Wesentliche der Rentenrechnung konzentrieren.

Allerdings muss laut Lehrplan 2014 der Zusammenhang zwischen geometrischen Reihen und der Rentenrechnung von Schülerinnen und Schülern beschrieben werden können.

----------

Allgemein erhält man für nachschüssige Jahresrenten mit der Rentendauer n:

E\_(nach) =FV =R +R \*q +R \*q^2 +R \*q^3 +... +R \*q^(n -1) =

=R \*(1 +q +q^2 +q^3 +... +q^(n -1)) =R \*(q^n -1)/(q -1) =R \*(q^n -1)/i

B\_(nach) =PV =FV \*1/(q^n) =R \*(q^n -1)/(q -1) \*1/(q^n)

-----

Endwert einer nachschüssigen Rente:

E\_(nach) =R \*(q^n -1)/(q -1) \*1/(q^n)

-----

Barwert einer nachschüssigen Rente:

B\_(nach) = R \*(q^n -1)/(q -1) \*1/(q^n)

j-102 - Rentenrechnung

##-Beispiel 3.3: End- und Barwert einer vorschüssigen Jahresrente

a) David zahlt 5 Jahre lang jeweils |am Beginn| jedes Jahres € 1.000,00 auf ein Sparbuch ein, das mit 4 % p. a. verzinst wird.

Berechnen Sie das Guthaben am Ende des fünften Jahres.

Gesucht ist der Endwert einer 5-jährigen vorschüssigen Rente:

FV =1000 \*1,04 +1000 \*1,04^2 +1000 \*1,04^3 +1000 \*1,04^4 +1000 \*1,04^5 =

=1000 \*1,04 \*(1 +1,04 +1,04^2 +1,04^3 +1,04^4) =

1 045 \_1

=1000 \*1,04 \*(104^5 -1)/(1,04 -1) =1000 \*1,04 \*(104^5 -1)/(0,04) =5632,98

a\_1 =1000 \*1,04; q =(a\_2)/(a\_1) =(1000 -1,04)/(1000) =1,04; n =5

Das Guthaben nach fünf Jahren beträgt € 5.632,98.

Da alle Raten ein Jahr früher als bei Bernhard im vorigen Beispiel fällig sind, kann der vorschüssige Endwert auch durch Aufzinsen des nachschüssigen Endwerts ermittelt werden:

FV =5416,32 \*1,04 =5632,98

-----

b) Jennifer möchte 5 Jahre lang jeweils am Beginn des Jahres € 1.000,00 von einem Sparbuch, das mit 4 % p. a. verzinst wird, abheben.

Berechnen Sie, welcher Betrag auf dem Sparbuch liegen muss, wenn nach Auszahlung der letzten Rate das gesamte Guthaben abgehoben sein soll.

Gesucht ist der Barwert einer 5-jährigen vorschüssigen Rente:

Es ist derselbe Zahlungsstrom wie bei David, diesmal ist aber der Barwert gesucht. Da der Zahlungsstrom schon bei David auf das Ende des fünften Jahres bewertet worden ist, kann das Guthaben, das Jennifer benötigt, durch Abzinsen von Davids Endwert berechnet werden:

PV =FV \*1,04^(-5) =5632,98 \*1,04^(-5) =4629,90

----------

Allgemein erhält man für vorschüssige Jahresrenten mit der Rentendauer n:

E =FV =R \*q +R \*q^2 +R \*q^3 +... +R \*q^n =

=R \*q \*(1 +q +q^2 +... +q^(n -1)) =R \*q \*(q^n -1)/(q -1)

B\_(vor) =PV =FV \*1/(q^n) =R \*q \*(q^n -1)/(q -1) \*1/(q^n) =R \*(q^n -1)/(q -1) \*1/(q^(n -1))

----------

Barwert:

B =E \*1/(q^n)

B\_(vor) =B\_(nach) \*q

-----

Endwert:

E =B \*q^n

E\_(vor) =E\_(nach) \*q

----------

|Formeln zur Berechnung von Jahresrenten|

Barwert:

nachschüssig B\_(nach) =R \*(q^n -1)/(q -1) \*1/(q^n)

vorschüssig B\_(vor) =R \*(q^n -1)/(q -1) \*1/(q^(n -1))

-----

Endwert:

nachschüssig E\_(nach) =R \*(q^n -1)/(q -1)

vorschüssig E\_(vor) =R \*(q^n -1)/(q -1) \*q

-----

Beachten Sie: q =1 +i <=> q -1 =i

Statt q -1 kann im Nenner auch i verwendet werden.

j-103 - Ganzjährige Renten

In den Rentenformeln treten die fünf Variablen B, E, R, n und i auf. Daraus ergeben sich fünf Grundaufgaben der Rentenrechnung:

* Berechnung des Barwerts
* Berechnung des Endwerts
* Berechnung der Rate
* Berechnung der Anzahl der Raten (Rentendauer)
* Berechnung des Zinssatzes

----------

|Excel-Funktionen für die Rentenrechnung|

In Excel steht für jede der fünf Grundaufgaben jeweils eine Funktion zur Verfügung:

BW(Zins; Zzr; Rmz; [Zw]; [F]) BarWert

ZW(Zins; Zzr; Rmz; [Bw]; [F]) Zukünftiger Wert (Endwert)

RMZ(Zins; Zzr; Bw; [Zw]; [F]) RegelMäßige Zahlung (Rate)

ZZR(Zins; Rmz; Bw; [Zw]; [F]) ZahlungsZeitRäume (Rentendauer)

ZINS(Zzr; Rmz; Bw; [Zw]; [F]]) ZINSsatz

-----

BW Barwert

Zins äquivalenter Zinssatz der Rentenperiode

Zzr Rentendauer in Perioden

Rmz Rate

ZW Endwert

F Fälligkeit (nachschüssig/vorschüssig)

----------

Beachten Sie:

* Werte in eckigen Klammern sind optional. Wenn ein optionaler Wert nicht eingegeben wird, interpretiert Excel diesen Wert als null.
* Geben Sie bei F für die Fälligkeit ein:

0 für nachschüssig (Standardeinstellung)

1 für vorschüssig

* Excel rechnet mithilfe folgender Formel, bei der alle Zahlungen auf das Rentenende bewertet werden und die Summe aller aufgezinsten Zahlungen null ist:

BW \*(1 +Zins)^(Zzr) +Rmz \*(1 +Zins \*F) \*(((1 +Zins)^(Zzr) -1)/(Zins)) +Zw =0

für Zins \=0

(Rmz \*Zzr) +Bw +Zw =0

für Zins =0

Sie müssen deshalb Einzahlungen positiv und Auszahlungen negativ eingeben.

* Für RMZ =0 können die Funktionen auch für die Zinseszinsrechnung verwendet werden.

-----

A | B

Zins = | 4 %

Zzr = | 5

Rmz = | -100

ZW | 0

F = | 1

BW = | € 4.629,90

Der Faktor (1 +Zins \*F) ergibt für F =0 (nachschüssig) den Wert 1, für F =1 (vorschüssig) den Aufzinsungsfaktor q =1 +i.

----------

#### \*\*-3.3.2 Fünf Grundaufgaben der Rentenrechnung

##### \*\*-Berechnung von Bar- und Endwert

##-Beispiel 3.4: End- und Barwert einer nachschüssigen Rente

Eine nachschüssige Jahresrente mit einer Rate von € 12.000,00 ist 20 Jahre bei 5 % p. a. zu zahlen.

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

b) Berechnen Sie den Endwert der Rente.

c) Berechnen Sie den Barwert der Rente.

d) Erklären und begründen Sie, wie sich der Endwert und der Barwert verändern, wenn der Zinssatz erhöht wird.

e) Beschreiben Sie, was durch folgende Rechnung berechnet wird:

12000 \*(1 -1,06^(-25))/(0,06) =153400,27

j-104 - Rentenrechnung

##-Beispiel 3.4: End- und Barwert einer nachschüssigen Rente (Fortsetzung)

b) q =1,05

E\_(nach) =FV =R (q^n -1)/(q -1) =12000 \*(1,05^(20) -1)/(0,05) =396791,45

Der Endwert beträgt € 396.791,45.

-----

c) Berechnung des Barwerts mit Summenformel:

B\_(nach) =PV =R \*(q^n -1)/(q -1) \*1/(q^n) =12000 \*(1,05^(20) -1)/(0,05) \*1/(1,05^(20)) =149546.52

Berechnung des Barwerts durch Abzinsen des Endwerts:

B\_(nach) =PV =FV \*q^(-20) =396791,35 \*1,05^(-20) =149546,52

Der Barwert beträgt € 149.546,52.

-----

d) Wird der |Zinssatz größer|, dann wird der |Endwert größer|.

Begründung: Bei der Endwertberechnung werden die Raten bei einem höheren Zinssatz stärker aufgezinst.

Wird der |Zinssatz größer|, dann wird der |Barwert kleiner|.

Begründung: Bei der Barwertberechnung werden die Raten bei einem höheren Zinssatz stärker abgezinst.

-----

e) Der Barwert einer 25-jährigen nachschüssigen Rente mit der Rate € 12.000,00 bei einer Verzinsung von 6 % p. a. beträgt € 153.400,27.

----------

##### \*\*-Berechnung der Rate einer Rente

##-Beispiel 3.5: Berechnung der Rate einer Rente

David legt Anfang 2017 € 10.000,00 auf ein Sparbuch, das mit i =3 % verzinst ist.

Er möchte von diesem Sparbuch 6 Jahre lang jährlich einen Betrag R abheben. Die erste Abhebung soll 4 Jahre, nachdem David das Geld auf das Konto gelegt hat, erfolgen.

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

Wählen Sie einen geeigneten Bezugszeitpunkt zur Berechnung der Rate.

b) Berechnen Sie die Höhe der Rate.

Lösung:

a) Setzen Sie den Bezugszeitpunkt auf den Auszahlungstag der ersten Rate:

b) 1. Schritt: Der eingezahlte Betrag wird 4 Jahre auf den Bezugszeitpunkt aufgezinst.

PV =10000 \*1,03^4 =11255,09.

2. Schritt: Der aufgezinste Betrag ist der Barwert der zu bewertenden vorschüssigen Jahresrente.

Aus der Rentenformel wird durch Umformen die Rate berechnet.

B\_(vor) =R \*(q^n -1)/(q -1) \*1/(q^(n -1))

R =B\_(vor) \*(q -1)/(q^n -1) \*q^(n -1) =

=11255,09 \*(0,03)/(1,03^6 -1) \*1,03^5 =2017,15

David wird jährlich einen Betrag von € 2.017,15 erhalten.

----------

|Vorgangsweise:|

1. Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

2. Wählen Sie einen geeigneten Bezugszeitpunkt.

3. Bewerten Sie die Zahlungen auf diesen Bezugszeitpunkt.

j-105 - Ganzjährige Renten

##### \*\*-Berechnung von Rentendauer und Rentenrest

##-Beispiel 3.6: Berechnung von Rentendauer und Rentenrest

Laura hat ein Kapital von € 10.000,00 auf einem Sparbuch angelegt, das mit 4 % p. a. verzinst wird. Sie will jährlich nachschüssig jeweils eine Rate von € 1.000,00 von dem Sparbuch abheben.

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

b) Berechnen Sie, wie oft sie diese Rate abheben kann.

c) Berechnen Sie, welche Restzahlung X sie zugleich mit der letzten vollen Rate abheben kann.

d) Argumentieren Sie, wie sich die Restzahlung verändert, wenn sie später abgehoben wird.

Lösung:

a) Zahlungsstrom

1 -1000

2 - 1000

3 - 1000

4 - 1000

...

n - 1000 +X

Hinweis: Nach Abhebung von n Vollraten bleibt meistens ein Restbetrag, der Rentenrest, übrig.

b) Berechnung der Anzahl der Vollraten:

10000 =1000 \*(1,04^n -1)/(0,04) \*1/(1,04^n) |\*0,04 \*1,04^n |/1000

0,4 \*1,04^n =1,04^n -1 |+1 |-0,4 \*1,04^n

1 =0,6 \*1,04^n |ln

0 =ln(0,6) +n \*ln(1,04)

n =(ln(0,6))/(ln(1,04)) ~~13,024

Es ergeben sich 13 Vollraten à € 1.000,00 und dazu eine Restzahlung X, die noch zu berechnen ist.

-----

c) Berechnung des Rentenrests:

1. Schritt: Berechnung des Barwerts von 13 vollen Raten:

PV =1000 \*(1,04^(13) -1)/(0,04) \*1/(1,04^(13)) =9985,65

2. Schritt: Berechnung des Differenzbetrags D zwischen dem Sparbuchkapital und dem Barwert:

D =10000 -9985,65 =14,35

3. Schritt: Aufzinsen des Differenzbetrags D auf den Auszahlungszeitpunkt liefert den Rentenrest:

X =14,53 \*1,04^(13) =23,90

Mit dem GTR erhalten Sie den Rentenrest elegant als Future Value FV für n =13.

-----

d) Wird der Rentenrest später abgehoben, dann verzinst er sich länger.

Der Wert der Rentenrests wird deshalb höher.

-----

Hinweis: Mit den Nachkommastellen der Rentendauer können Sie die Höhe der Restrate gut abschätzen:

X =1000 \*0,024 =24,00

j-106 - Rentenrechnung

##### \*\*-Berechnung des Zinssatzes einer Rente

##-Beispiel 3.7: Berechnung des Zinssatzes einer Rente

Bettina legt am Anfang jedes Jahres € 1.000,00 auf ein Sparbuch. Nach 10 Jahren (am Ende das 10. Jahres) verfügt sie über ein Guthaben von € 12.500,00.

Ermitteln Sie den Zinssatz, mit dem das Sparbuch verzinst wird.

Das Guthaben von € 12.500,00 ist der vorschüssige Endwert:

E\_(vor) =FV =1000 \*(q^(10) -1)/(q -1) \*q

Um den Zinssatz i zu ermitteln, muss eine Gleichung höheren Grades gelöst werden. Die gegebene Gleichung ist algebraisch nicht lösbar.

Deshalb muss die Lösung durch ein Näherungsverfahren ermittelt werden.

Auch technologische Hilfsmittel verwenden zur Lösung der gegebenen Gleichung Näherungsverfahren.

Endwert einer vorschüssigen Rente:

E\_(vor) =R \*(q^n -1)/(q -1) \*q

-----

|Lösung mit Intervallschachtelung:|

Ermitteln Sie ein Intervall, in dem der gesuchte Zinssatz liegt, und verkleinern Sie die Schrittweite 'De i immer mehr.

So kann der Zinssatz beliebig genau berechnet werden:

'De i =1 %

i | 4 % | 5 %

FV | € 12.486,35 | € 13.206,79

Der Zinssatz liegt im Intervall [4 %; 5 %].

-----

'De i =0,1 %

i | 4,0 % | 4,1 %

FV | € 12.486,35 | € 12.556,47

Der Zinssatz liegt im Intervall [4,0 %; 4,1 %].

-----

'De i =0,01 %

i | 4,01 % | 4,02 %

FV | € 12.493,34 | € 12.500,34

Der Zinssatz liegt im Intervall [4,01 %; 4,02 %].

Der Zinssatz beträgt ca. 4,02 %.

-----

Intervallschachtelung:

i 'el ]4 %; 5 %[

i 'el ]4,0 %; 4,1 %[

i 'el ]4,01 %; 4,02 %[

Mit der Zielwertsuche in Excel kann die Intervallschachtelung in Sekundenbruchteilen durchgeführt werden:

-----

|Zielwertsuche in Excel:|

Geben Sie in B1 als Startwert für den Zinssatz 4 % ein.

Ermitteln Sie in B2 für diesen Zinssatz den Endwert.

Rufen Sie im Menü Daten Was-wäre-wenn-Analyse die Zielwertsuche auf.

Setzen Sie für die Zielzelle B2 und die veränderbare Zelle B1 den Zielwert auf 12500.

-----

|Lösung einer Gleichung höheren Grades mit Technologie (Solver):|

Die Endwertformel für vorschüssige Jahresrenten führt auf eine Gleichung höheren Grades:

12500 =1000 \*(1 +i) \*((1 +i)^(10) -1)/i |/1000 |\*i

12,5 \*i =(1 +i) \*((1 +i)^(10) -1)

Lösung mit Technologie: i =4,02 %

-----

|Lösung mit dem TVM-Solver oder mit der Excel-Funktion ZINS:|

Besonders bei aufwändigen Berechnungen zeigt sich der Vorteil des Technologieeinsatzes.

----------

Die gegebene Gleichung hat außer der sinnvollen Lösung i =0,0402 noch zwei weitere Lösungen: i =0 und i =-2,3662.

j-107 - Ganzjährige Renten

##-Beispiel 3.8: Berechnung des Zinssatzes einer Rente

Herr Max Muster legt 10 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres € 1.000,00 auf ein Sparbuch.

a) Die Bank garantiert ihm unmittelbar nach der 10. Einzahlung ein Guthaben von € 15.000,00.

Berechnen Sie den Zinssatz, zu dem die Bank verzinst.

b) Die Bank garantiert 5 Jahre nach der letzten Einzahlung ein Guthaben von € 20.000,00. Berechnen Sie den Zinssatz, zu dem die Bank verzinst.

Lösung:

a) Berechnen Sie den Zinssatz mit dem TVM-Solver oder mit der Excel-Funktion ZINS: i ~~8,73 %

Der TVM-Solver kann nur zur Berechnung des Zinssatzes verwendet werden, wenn das Endkapital am Rentenende gegeben ist.

Im gegebenen Fall muss mit der Endwertformel gerechnet werden.

Das Guthaben muss 5 Jahre auf den Endwert abgezinst werden.

Somit ist die folgende Gleichung mit Technologie zu lösen:

1000 \*((1 +i)^(10) -1)/i =20000 \*(1 +i)^(-5)

1000 \*((1 +i)^(10) -1)/i -20000 \*(1 +i)^(-5) =0

i ~~7,34 %

Das Sparbuch wird mit ca. 7,34 % verzinst.

-----

Endwert einer nachschüssigen Rente:

E\_(nach) =R \*((1 +i)^n -1)/i

----------

#### \*\*-3.3.3 Jahresrente bei unterjährigem Zinssatz

Ist ein unterjähriger Zinssatz im gegeben, dann rechnet man bei einer Jahresrente mit dem äquivalenten jährlichen Aufzinsungsfaktor.

----------

|Äquivalenter Jahreszinssatz|

q =1 +i =q\_m^m =(1 +i\_m)^m

äquivalenter jährlicher Aufzinsungsfaktor

-----

i =(1 +i\_m)^m -1

äquivalenter Jahreszinssatz

----------

Beachten Sie, dass der äquivalente jährliche Zinssatz wegen des Zinseszinseffekts immer etwas größer ist als der nominelle Jahreszinssatz.

(1 +i) =(1 +i\_2)^2 =(1 +i\_4)^4 =(1 +i\_(12))^(12)

----------

##-Beispiel 3.9: Äquivalenter und nomineller Jahreszinssatz

Berechnen Sie jeweils den nominellen Jahreszinssatz sowie den äquivalenten jährlichen Aufzinsungsfaktor und den äquivalenten Jahreszinssatz.

a) i\_2 =3 %:

nomineller Jahreszinssatz: 2 \*3 % =6 %

äquivalenter jährlicher Aufzinsungsfaktor: q =1,03^2 =1,0609

äquivalenter Jahreszinssatz: i =1,03^2 -1 =0,0609, d. h. i =6,09 %

b) i\_4 =1 %:

nomineller Jahreszinssatz: 4 \*1 % =4 %

äquivalenter jährlicher Aufzinsungsfaktor: q =1,01^4 =1,04060401

äquivalenter Jahreszinssatz: i =1,01^4 -1 ~~0,0406, d. h. i ~~4,06 %

j-108 - Rentenrechnung

##-Beispiel 3.10: Anzahl der Raten bei unterjähriger Verzinsung

Ein Kredit in der Höhe von € 50.000,00 ist durch nachschüssige Jahresraten in der Höhe von € 5.000,00 bei i\_2 =3 % zu begleichen.

a) Berechnen Sie, wie viele Vollraten dafür fällig sind.

b) Berechnen Sie

(1) die Restzahlung X\_1, die zugleich mit der letzten Vollrate fällig ist,

(2) die Restzahlung X\_2, die ein Jahr nach der letzten Vollrate fällig ist.

-----

Hinweis: Verwenden Sie beim TVM-Solver für I% immer den nominellen Jahreszinssatz:

I% =i\_m \*m

I% =6 (=3 \*2)

C/Y =2

-----

Lösung:

a) Zahlungsstrom: nachschüssige Jahresrente

Für die Jahresrente wird der äquivalente Jahreszinssatz benötigt: q\_2 =1,03

q =1,03^2 =1,0609; i =6,09 %

50000 =5000 \*(1,0609^n -1)/(0,0609) \*1/(1,0609^n) |/5000

0,609 \*1,0609^n =1,0609^n -1 |+1 |-0,609 \*1,0609^n

1 =0,391 \*1,0609^n |ln

0 =ln(0,391) +n \*ln(1,0609)

n =(ln(0,391))/(ln(1,0609)) ~~15,8844

Es sind 15 volle Jahresraten zu zahlen und 1 Restrate.

-----

b) Berechnen Sie den Differenzbetrag D zwischen der Kreditsumme und dem Barwert der 15 Jahresraten:

D =50000 -5000 \*(1,0609^(15) -1)/(0,0609) \*1/(1,0609^(15)) =50000 -48276,95 =1723,0509

(Um Rundungsfehler zu vermeiden, rechnen Sie mit allen verfügbaren Kommastellen dieses Zwischenergebnisses weiter.)

Ermitteln Sie durch Aufzinsen die Restzahlungen:

X\_1 =1723,0509 \*1,0609^(15) =4182,30

X\_2 =X\_1 \*1,0609 =4437,00

Die Restzahlung zugleich mit der letzten Rate beträgt € 4.182,30.

Die Restzahlung ein Jahr nach der letzten vollen Rate beträgt € 4.437,00.

----------

Mit dem TVM-Solver und mit Excel erhält man sehr einfach den Rentenrest am Rentenende.

Werte zu anderen Zeitpunkten werden dann durch entsprechendes Auf- oder Abzinsen berechnet.

### \*\*-3.4 Unterjährige Renten

Unterjährige Renten können wie Jahresrenten berechnet werden, wenn Rentenperiode und Verzinsungsperiode übereinstimmen.

Stimmen Rentenperiode und Zinsperiode nicht überein, dann muss der gegebene Zinssatz an die Rentenperiode |äquivalent| angepasst werden.

Die verwendete Methode der Berechnung von unterjährigen Renten wird |ISMA-Methode| (International Securities Market Association) oder |Internationale Methode| genannt und ist heute in vielen finanzmathematischen Anwendungen Standard.

j-109 - Unterjährige Renten

|Äquivalente Zinssätze|

p Anzahl der Raten pro Jahr (p =1, 2, 4, 12)

i\_m gegebener unterjähriger Zinssatz mit m Verzinsungsperioden pro Jahr (m =1, 2, 4, 12)

Umrechnung von i\_m in den äquivalenten Zinssatz i\_p:

q =1 +i =(1 +i\_m)^m

q\_p = ^(p)'w(q) = ^(p)'w((1 +i\_m)^m) =(1 +i\_m)^(m/p)

i\_p =(1 +i\_m)^(m/p) -1 äquivalenter, auf die Rentenperiode bezogener Zinssatz

----------

Hinweis: Äquivalente Zinssätze i\_m und i\_p ergeben bei gleichem Anfangskapital und gleicher Verzinsungsdauer dasselbe Endkapital.

i\_m ist gegeben.

i\_p ist zu berechnen.

----------

##-Beispiel 3.11: Pensionsvorsorge

Sarah sorgt privat für ihre Pension vor. Sie zahlt jeweils am Semesterende € 200,00 auf ein Pensionskonto ein:

erstmals am 30. 6. 201 7, zum letzten Mal am 31. 12. 2036.

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

b) Berechnen Sie den Betrag, den sie am 31. 12. 2036 angespart hat, wenn das Konto

(1) mit i\_2 =4 %,

(2) mit i\_4 =2 % verzinst wird.

c) Argumentieren Sie, warum bei der Variante (2) der Ansparbetrag größer sein muss.

Lösung:

a) Zahlungsstrom: nachschüssige Semesterrente

b)

(1) i\_2 =4 %; q\_2 =1,04 40 1

E\_(nach) =FV =200 \*(1 +q\_2 +q\_2^2 +... +q\_2^(39)) =200 \*(q\_2^(40) -1)/(q\_2 -1)

E\_(nach) =FV =200 \*(1,04^(40) -1)/(0,04) =19005,10

Sarah hat einen Betrag von € 19.005,10 angespart.

-----

(2) i\_4 =2 %; q\_2 =1,02^2 =1,0404; i\_2 =4,04 %

E\_(nach) =FV =200 \*(q\_2^(40) -1)/(q\_2 -1) =200 \*(1,0404^(40) -1)/(0,0404) =19185,34

Sarah hat einen Betrag von € 19.185,34 angespart.

c) Da der äquivalente Semesterzinssatz bei der Variante (2) höher ist und die Raten für den Endwert aufgezinst werden, muss der Endwert bei der Variante (2) höher sein.

----------

Hinweis: Verwenden Sie beim TVM-Solver für I% immer den nominellen Jahreszinssatz:

I% =i\_m \*m

(1) I% =8 (=4 \*2); C/Y =2

(2) I% =8 (=2 \*4); C/Y =4

Es gibt zwei Raten pro Jahr: P/Y =2

----------

##-Beispiel 3.12: Kredit mit monatlichen Raten

Robert ist verpflichtet, zur Tilgung eines Kredits 5 Jahre lang monatlich vorschüssig € 1.000,00 an ein Bankinstitut zu zahlen. i\_2 =4 %

Berechnen Sie die Höhe der Einmalzahlung X, mit der Robert diese Verpflichtung sofort tilgen kann.

Lösung:

Der gesuchte Betrag X ist der Barwert einer vorschüssigen Monatsrente, die 66-mal fällig ist:

q\_(12) =q\_2^(1/6) = ^(6)'w(1,04) ~~1,006558

X =B\_(vor) =PV =1000 \*(q\_(12)^(68) -1)(q\_(12) -1) \*1/(q\_(12)^(65)) =53782,65

Robert müsste sofort € 53.782,65 bezahlen, um seine Verpflichtung zu tilgen.

----------

Hinweis: Wenn Sie einen Taschenrechner verwenden, müssen Sie den berechneten äquivalenten Aufzinsungsfaktor unbedingt speichern (Taste STO), um große Rundungsfehler zu vermeiden.

j-110 - Rentenrechnung

##-Beispiel 3.13: Eigentumswohnung

Veronikas Eltern möchten ihrer Tochter zu ihrem 19. Geburtstag einen Betrag von € 200.000,00 zum Kauf einer Eigentumswohnung schenken.

a) Berechnen Sie die Höhe der monatlichen vorschüssigen Zahlungen, die

(1) bei i =6 % und

(2) bei i\_2 =3 %

ab der Geburt der Tochter auf ein Sparbuch einzulegen sind, um dieses Ziel zu erreichen.

b) Erklären Sie, warum die Zahlungen bei der Variante (2) niedriger sein müssen als bei der Variante (1).

Lösung:

a) Der Betrag von € 200.000,00 ist der Endwert einer vorschüssigen Monatsrente.

(1) i =6 %:

q\_(12) =q^(1/(12)) =1,06^(1/(12)) = ^(12)'w(1,06) ~~1,004867551

Rentendauer: 19 \*12 =228 Monate

200000 =R \*(q\_(12)^(228) -1)/(q\_(12) -1) \*q\_(12)

R =200000 \*(q\_(12) -1)/(q\_(12)^(228) -1) \*1/(q\_(12)) =478,28

Die Eltern müssen monatlich € 478,28 zahlen.

-----

(2) i\_2 =3 %:

q\_(12) =q\_2^(1/6) =1,03^(1/6) = ^(6)'w(1,03) ~~1,004938622

R =200000 \*(q\_(12) -1)/(q\_(12)^(228) -1) \*1/(q\_(12)) =473,72

Die Eltern müssen monatlich € 473,72 zahlen.

b) Da bei der Semesterverzinsung in Variante (2) die Zahlungen stärker aufgezinst werden, muss die monatliche Rate bei Variante (2) niedriger sein.

----------

|Unterjährige Renten (ISMA-Methode)|

n Rentendauer in Jahren

p Anzahl der Raten pro Jahr (p =1, 2, 4, 12)

N =n \*p Anzahl der Raten

i\_m gegebener unterjähriger Zinssatz mit m Verzinsungsperioden pro Jahr (m =1, 2, 4, 12)

Umrechnung von i\_m in den äquivalenten Zinssatz i\_p:

q =(1 +i\_m)^m

q\_p = ^(p)'w(q) =(1 +i\_m)^(m/p)

i\_p =(1 +i\_m)^(m/p) -1 =q\_p -1

-----

|Barwert:|

nachschüssig: B\_(nach) =R \*(q\_p^N -1)/(q\_p -1) \*1/(q\_p^N)

vorschüssig: B\_(vor) =R \*(q\_p^N -1)/(q\_p -1) \*1/(q\_p^(N -1))

-----

|Endwert:|

nachschüssig: E\_(nach) =R \*(q\_p^N -1)/(q\_p -1)

vorschüssig: E\_(vor) =R \*(q\_p^N -1)/(q\_p -1) \*q\_p

----------

Statt q\_p -1 kann im Nenner auch i\_p verwendet werden.

-----

Hinweis: Äquivalente Zinssätze i\_m und i\_p ergeben bei gleichem Anfangskapital und gleicher Verzinsungsdauer dasselbe Endkapital.

i\_m ist gegeben.

i\_p ist zu berechnen.

i\_p =(1 +i\_m)^(m/p) -1

-----

ISMA steht für International Securities Market Association. Diese Vereinigung von Banken erarbeitet Berechnungsstandards für Finanzgeschäfte.

Für Rentengeschäfte wird empfohlen, den Zinssatz äquivalent an die Rentenperiode anzupassen.

j-111 - Rentenkonvertierung

### \*\*-3.5 Rentenkonvertierung

Im Finanz- und Versicherungswesen muss oft eine Rente in eine äquivalente Rente umgewandelt werden. Dies bezeichnet man als Rentenkonvertierung.

convertere: lateinisch für umwenden, verändern

Die Konvertierung ist die Überführung einer Rente in eine gleichwertige andere Rente.

----------

##-Beispiel 3.14: Private Pensionsvorsorge

Brigitta legt 30 Jahre lang jeweils am Anfang des Jahres € 1.000,00 auf ein Pensionskonto, das mit i =5 % verzinst wird.

Nach Ablauf der 30 Jahre tritt sie ihre Pension an und lässt sich den angesparten Betrag jeweils am Anfang des Jahres 20 Jahre lang (auf diese Zeitspanne schätzt sie ihre Lebenserwartung nach Pensionsantritt) als private Zusatzpension auszahlen.

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

b) Berechnen Sie die Höhe der Rate X der privaten Zusatzpension.

c) Erklären Sie, warum die Rate bei einer Verzinsung von 2 % p. a. niedriger sein muss als die bei einer Verzinsung von 5 % p. a.

Lösung:

a) Zahlungsstrom

b) Der Endwert der 30-jährigen vorschüssigen Ansparrente ist der Barwert der 20-jährigen vorschüssigen Auszahlungsrente:

Ansparrente: E\_(vor) =FV =1000 \*(1,05^(30) -1)/(0,05) \*1,05 =69760,79

Auszahlungsrente: 69760,79 =X \*(1,05^(20) -1)/(0,05) \*1/(1,05^(19))

X =5 331,23

Direkte Berechnung von X:

1000 \*(1,05^(30) -1)/(0,05) \*1,05 =X \*(1,05^(20) -1)/(0,05) \*1/(1,05^(19))

X =1000 \*(1,05^(30) -1)/(1,05^(20) -1) \*1,05^(20) =5331,23

Brigitta könnte somit 20 Jahre lang einen jährlichen Betrag von € 5.331,23 erhalten.

c) Eine Abnahme des Zinssatzes auf i =2 % führt zu einer deutlichen Verringerung der privaten Zusatzpension, da die eingezahlten Beträge weniger stark aufgezinst werden. Durch die lange Verzinsungsdauer ist der Zinseszinseffekt besonders stark.

----------

|Rentenumwandlung|

Die Umwandlung der Zahlungsart einer Rente in eine andere Zahlungsart heißt Rentenumwandlung, Rentenkonvertierung oder in speziellen Fällen Umschuldung.

Bei der Rentenumwandlung ist der Wert der einen Zahlungsart gleich dem Wert der anderen Zahlungsart, bezogen auf denselben Bezugszeitpunkt.

Das bedeutet, dass bei der Rentenkonvertierung meist der Wert eines gegebenen Zahlungsstromes an einem bestimmten Zeitpunkt berechnet werden muss.

Dieser berechnete Wert wird dann im zweiten Schritt in den gewünschten Zahlungsstrom umgewandelt.

j-112 - Rentenrechnung

##-Beispiel 3.15: Umwandlung einer Jahres- in eine Quartalsrente

Eine jährlich nachschüssig zahlbare Rente a € 1.000,00 soll bei i =4 % in eine vorschüssige Quartalsrente bei gleich bleibender Rentendauer umgewandelt werden. Berechnen Sie die Rate der Quartalsrente.

Lösung:

Für die Berechnung genügt es, ein Jahr zu betrachten.

Die Jahresrate € 1.000,00 ist der Endwert der vorschüssigen Quartalsrente mit der Rate X.

q\_4 = ^(4)'w(1,04) ~~1,009853407;

i\_4 = ^(4)'w(1,04) -1 ~~0,00985

1000 =X \*(q\_4^4 -1)/(q\_4 -1) \*q\_4

X =1000 \*(q\_4 -1)/((q\_4^4 -1) \*q\_4) =243,93

Die Rate der Quartalsrente beträgt € 243,93.

-----

Finance-Solver des TI-Nspire

E\_(vor) =R \*(q\_p^N -1)/(q\_p -1) \*q\_p

----------

##-Beispiel 3.16: Kreditumschuldung

Herr Mutig erhält von seiner Bank einen Kredit in der Höhe von € 70.000,00.

Die Tilgung der Schuld soll durch 10 nachschüssige Jahresraten erfolgen.

Der Zinssatz beträgt i =6 %.

a) Berechnen Sie die Höhe der Kreditraten.

b) Wegen finanzieller Schwierigkeiten möchte Herr Mutig die Höhe seiner jährlichen Ratenzahlungen ab dem 4. Jahr verringern.

Unmittelbar nach Zahlung der dritten Rate (Beginn des 4. Jahres) verlängert er die Tilgungsdauer auf insgesamt 15 Jahre (Umschuldung).

Berechnen Sie die Höhe der neuen Raten nach der Änderung der Tilgungsdauer.

Lösung:

a) 70000 =R \*(1,06^(10) -1)/(0,06) \*1/(1,06^(10))

R =70000 \*(0,06)/(1,06^(10)) \*1,06^(10) =9510,76

b) Der Barwert W der noch zu zahlenden 7 Raten zu Beginn des vierten Jahres entspricht der noch offenen Restschuld und ist gleich dem Barwert der 12 neuen Raten X:

9510,76 \*(1,06^7 -1)/(0,06) \*1/(1,06^7) =X \*(1,06^(12) -1)/(0,06) \*1/(1,06^(12))

X =9510,76 \*(1,06^7 -1)/(1,06^(12) -1) \*1,06^5 =6332,74

Die neuen Raten betragen € 6.332,74.

j-113 - Effektivverzinsung

##-Beispiel 3.17: Kreditumschuldung mit Technologie

Eine Schuld von € 50.000,00 ist durch nachschüssige Monatsraten in 5 Jahren zu tilgen. Der Zinssatz beträgt 6 % p. a.

a) Berechnen Sie die Höhe der Kreditraten.

b) Am Beginn des fünften Jahres wird die Tilgungsdauer auf insgesamt 10 Jahre verlängert. Berechnen Sie die Höhe der neuen Monatsraten.

Lösung:

a) Aus dem gegebenen Barwert PV =€ 50.000,00 werden die Raten der Rente berechnet. Die Höhe der Kreditrate beträgt € 962,95.

b) Zum Zeitpunkt der Rentenumwandlung sind noch 12 Monatsraten für das 5. Jahr zu bezahlen.

Die Restschuld am Beginn des 5. Jahres entspricht dem Barwert der noch zu bezahlenden 12 Monatsraten a € 962,95.

Die Restschuld am Beginn des 5. Jahres beträgt € 11.197,94.

Aus dieser Restschuld werden nun die Monatsraten für die restlichen 6 Jahre (72 Monate) berechnet.

Die neuen Monatsraten betragen € 184,74.

----------

### \*\*-3.6 Effektivverzinsung

|Aus dem Verbraucherkreditgesetz VKrG 2010|

I. Grundgleichung zur Darstellung der Gleichheit zwischen Kredit-Auszahlungsbeträgen einerseits

und Rückzahlungen (Tilgung und Kreditkosten) andererseits

(I) Die nachstehende Gleichung zur Ermittlung des effektiven Jahreszinses drückt auf jährlicher Basis die rechnerische Gleichheit zwischen der Summe der Gegenwartswerte der in Anspruch genommenen Kredit-Auszahlungsbeträge einerseits und der Summe der Gegenwartswerte der Rückzahlungen (Tilgung und Kosten) andererseits aus:

'Si[k=1;m](C\_k) \*(1 +X)^(-t\_k) ='Si[l=1;m'](D\_l) \*(1 +X)^(-s\_l)

Dabei ist

* X der effektive Jahreszins;
* m die laufende Nummer des letzten Kredit-Auszahlungsbetrags;
* k die laufende Nummer eines Kredit-Auszahlungsbetrags, wobei 1 <k <m;
* Ck die Höhe des Kredit-Auszahlungsbetrags mit der Nummer k;
* tk der in Jahren oder Jahresbruchteilen ausgedrückte Zeitraum zwischen der ersten Kreditauszahlung und dem Zeitpunkt der einzelnen nachfolgenden in Anspruch genommenen Kredit Auszahlungsbeträge, wobei tl =0;
* m' die laufende Nummer der letzten Tilgungs- oder Kostenzahlung;
* l die laufende Nummer einer Tilgungs- oder Kostenzahlung;
* Dl der Betrag einer Tilgungs- oder Kostenzahlung;
* sl der in Jahren oder Jahresbruchteilen ausgedrückte Zeitraum zwischen dem Zeitpunkt der Inanspruchnahme des ersten Kredit-Auszahlungsbetrags und dem Zeitpunkt jeder einzelnen Tilgungs- oder Kostenzahlung.

(2) Bei der Berechnung ist Folgendes zu berücksichtigen:

a) Die von beiden Seiten zu unterschiedlichen Zeitpunkten gezahlten Beträge sind nicht notwendigerweise gleich groß und werden nicht notwendigerweise in gleichen Zeitabständen entrichtet.

b) Anfangszeitpunkt ist der Tag der Auszahlung des ersten Kreditbetrags.

c) Der Zeitraum zwischen diesen Zeitpunkten wird in Jahren oder Jahresbruchteilen ausgedrückt. Zugrunde gelegt werden für ein Jahr 365 Tage (bzw. für ein Schaltjahr 366 Tage), 52 Wochen oder zwölf Standardmonate. Ein Standardmonat hat 30,41666 Tage (d. h. 365/12), unabhängig davon, ob es sich um ein Schaltjahr handelt oder nicht.

Quelle: www.ris.bka.gv.at, BGBl. I Nr. 28 vom 20. Mai 2010 (Screenshot).

----------

Tipp: Für Finanzgeschäfte muss gelten, dass für gegebene Zahlungsströme Leistung gleich Gegenleistung ist. Der Effektivzinssatz ermöglicht einen Vergleich unterschiedlicher Zahlungsströme.

Den Originaltext des Verbraucherkreditgesetzes finden Sie auf der Übungs-CD-ROM.

j-114 - Rentenrechnung

|Definition: Effektivzinssatz|

Der Effektivzinssatz ist derjenige dekursive Jahreszinssatz, bei dessen Anwendung Leistung und Gegenleistung äquivalent sind.

----------

Tipp: Grundlage für die Berechnung des Effektivzinssatzes ist das Verbraucherkreditgesetz VKrG.

-----

In der Formel des VKrG werden alle Zahlungen D\_l auf den Zeitpunkt der ersten Kreditauszahlung abgezinst. Die Formel ist sehr allgemein gehalten und ist auch auf mehrere Kreditauszahlungen anwendbar.

In den meisten praktischen Fällen handelt es sich bei Krediten aber um eine Kreditzahlung C\_1 (Leistung), die durch mehrere (oft gleich hohe) Rückzahlungsbeträge DI in oft gleichen Zeitabständen (Gegenleistung) getilgt wird:

C\_1 =D\_1 \*(1 +i)^(-s\_1) +D\_2 \*(1 +i)^(-s\_2) +... +D\_(m') \*(1 +i)^(-sm') ='Si[l=1;m'](D\_l) \*(1 +i)^(-s\_l)

Mit dem Effektivzinssatz können insbesondere Finanzgeschäfte wie Kredite, Ratengeschäfte und Leasinggeschäfte bewertet werden.

----------

Hinweis: Um den Effektivzinssatz i zu ermitteln, muss eine Gleichung höheren Grades nach der Variablen i gelöst werden.

Derartige Berechnungen sind meist rechenintensiv, können aber mit modernen Technologien problemlos durchgeführt werden.

----------

#### \*\*-3.6.1 Kredit

Bei jedem Verbraucherkredit muss an auffallender Stelle die Effektivverzinsung vom Kreditinstitut angegeben werden.

##-Beispiel 3.18: Effektivverzinsung eines Kredits ohne Gebühren

Eine Kreditschuld von € 100,00 (Leistung L) soll durch zwei nachschüssige Jahresraten zu je € 60,00 (Gegenleistung GL) getilgt werden.

Die Bearbeitungs- und Kontoführungsgebühren werden nicht berücksichtigt.

a) Stellen Sie die Äquivalenzgleichung für das Kreditgeschäft auf.

b) Berechnen Sie die Effektivverzinsung dieses Kredits.

Lösung:

Äquivalenzgleichung:

100 =60 \*(1 +i)^(-1) +60 \*(1 +i)^(-2)

100 =(60)/(1 +i) +(60)/((1 +i)^t) oder 100 ='Si[t=1;2]( (60)/((1 +i)^t))

b) Lösung der Äquivalenzgleichung mit Technologie:

i ~~13,07 %

Die Effektivverzinsung beträgt 13,07 %.

j-115 - Effektivverzinsung

##-Beispiel 3.19: Effektivverzinsung eines Kredits mit Gebühren

Eine Kreditschuld von € 1.000,00 soll durch zwei nachschüssige Jahresraten zu je € 600,00 getilgt werden. Die Bearbeitungsgebühr beträgt 2 % der Kreditschuld.

Für die Kontoführung müssen € 5,00 pro Jahr im Voraus bezahlt werden.

a) Stellen Sie die Äquivalenzgleichung für das Kreditgeschäft auf.

b) Berechnen Sie die Effektivverzinsung dieses Kredits.

Lösung:

Äquivalenzgleichung:

Bearbeitungsgebühr: € 20,00

Kontoführungsgebühr: € 5,00

1000 =20 +5 +605 \*(1 +i)^(-1) +600 \*(1 +i)^(-2)

975 -(605)/(1 +i) -(600)/((1 +i)^2) =0

b) Lösung der Äquivalenzgleichung mit Technologie: i ~~15,38 %

Die Effektivverzinsung beträgt 15,38 %.

-----

Lösung mit einer Barwerttabelle in Excel:

Geben Sie für den Zinssatz i als Startwert 10 % ein.

----------

##-Beispiel 3.20: Effektivverzinsung eines Bankkredits

Der Kreditrechner einer Bank ermittelt für die Kreditsumme € 10.000,00 und für die Laufzeit vier Jahre eine monatliche Kreditrate von € 241,40.

a) Stellen Sie die Äquivalenzgleichung für das Kreditgeschäft auf.

b) Berechnen Sie die Effektivverzinsung dieses Kredits.

Lösung:

a) Äquivalenzgleichung:

10000 =241,4 \*(1 +i)^(-1/(12)) +241,4 \*(1 +i)^(-2/(12)) +... +241,4 \*(1 +i)^(-(48)/(12))

10000 ='Si[t=1;48](241,4 \*(1 +i)^(-t/(12))

10000 -241,4 \*(q\_(12)^(48) -1)(q\_(12) -1) \*1/(q\_(12)^(48)) =0

für q\_(12) =(1 +i)^(1/(12))

b) Mit Technologieunterstützung erhält man: i ~~7,67 %

j-116 - Rentenrechnung

#### \*\*-3.6.2 Ratengeschäft

"Jetzt kaufen - später zahlen!"

Viele Versandhäuser, Elektrofachgeschäfte, Baumärkte und Möbelhäuser bieten ihren Kunden für die Anschaffung von Konsumgütern Ratenzahlungen an.

Der Kunde muss nach Konsumentenschutzgesetz § 20 lediglich eine Anzahlung von mindestens 10 % des Barzahlungspreises oder, wenn dieser € 220,00 übersteigt, von mindestens 20 % des Barzahlungspreises leisten.

Mit Ratenzahlungen wird es Kunden ermöglicht, dass sie Güter kaufen, die sie sich bei Barzahlung nicht leisten könnten.

Wie "teuer" Ratenzahlungen sind, kann mithilfe des Effektivzinssatzes beurteilt werden. Oft ist sogar eine Kontoüberziehung günstiger als Ratenzahlungen.

----------

##-Beispiel 3.21: Ratenzahlung

Das Versandhaus Neckermann bietet seinen Kunden Ratenzahlung an (www.neckermann.at):

Für eine Ware im Wert von € 499,00 muss eine Anzahlung von € 99,80 geleistet werden. Der Rest kann etwa in drei Monatsraten zu je € 137,48 bezahlt werden.

a) Überprüfen Sie den angegebenen Effektivzinssatz von 21,7 %.

b) Vergleichen Sie die Ratenzahlungsvariante mit einem Kontokorrentkredit von 1 % monatlich.

Lösung:

Äquivalenzgleichung:

499 =99,8 +137,48 \*(1 +i)^(-1/(12)) +137,48 \*(1 +i)^(-2/(12)) +137,48 \*(1 +i)^(-3/(12))

399,2 -137,48 \*(q\_(12)^3 -1)/(q\_(12) -1) \*1/(q\_(12)^3) =0

für q\_(12) =(1 +i)^(1/(12))

Mit Technologieunterstützung erhält man:

q\_(12) =1,0165

i =q\_(12)^(12) -1 =21,6897 %, der berechnete Effektivzinssatz stimmt mit dem angegebenen überein.

Da es sich bei den Ratenzahlungen um einen regelmäßigen Zahlungsstrom handelt, kann der Effektivzinssatz beim GTR mit dem TVM-Solver und bei EXCEL mit der Funktion ZINS ermittelt werden.

b) Ein Überziehungszinssatz für Girokonten von 1 % monatlich entspricht einem effektiven Jahreszinssatz von i =1,01^(12) -1 ~~12,7 %.

Dieser Kontokorrentkredit ist somit günstiger als das Ratengeschäft.

----------

Tipp: Beim Ratengeschäft wird das Dubiosenrisiko (Zahlungsausfallsrisiko) in den hohen Zinssatz eingepreist.

Aus Sicht des Versandhauses ist das Ausfallsrisiko bei Ratengeschäften extrem hoch.

j-117 - Effektivverzinsung

#### \*\*-3.6.3 Leasing

Leasing ist die langfristige Vermietung von Wirtschaftsgütern wie Fahrzeugen, Immobilien oder Geräten. Man unterscheidet zwischen |Full-Pay-out-Leasing|, bei dem der Leasingnehmer die Anschaffungskosten zur Gänze durch die Leasingraten abbezahlt, und |Restwertleasing|, bei dem am Ende der Leasingdauer ein Restwert verbleibt. Der Leasingnehmer kann bei dieser Variante entscheiden, ob er das Leasingobjekt zurückgibt oder ob er den Restwert bezahlt und das Objekt in sein Eigentum übernimmt oder ob er das Objekt weiterleast.

Weit verbreitet ist das Kfz-Leasing. In der Regel muss eine Anzahlung geleistet werden. Während der Nutzungsdauer, die bei drei bis sieben Jahren liegt, muss monatlich eine Leasingrate als Miete bezahlt werden. Am Ende der Nutzungsdauer fällt ein Restwert an, der der Eurotax-Bewertung des Pkw entspricht. Der Kunde hat die Möglichkeit, einen Anschlussvertrag auf Basis des Restwertes abzuschließen (Vertragsverlängerung), das Auto zum Restwert zu kaufen oder an den Leasinggeber zurückzustellen.

Beim |Depotleasing| wird der Restwert exklusive USt bereits bei Vertragsbeginn als Depot (Einmalkaution) hinterlegt. Die Kunden haben den Vorteil, dass am Ende der Laufzeit anstelle des gesamten Restwertes nur mehr die Umsatzsteuer auf den vereinbarten Restwert zu bezahlen ist. Diese Leasingform wird dann gewählt, wenn geplant ist, das Fahrzeug am Ende der Laufzeit zu kaufen. Das Depotmodell weist eine sehr geringe Gesamtbelastung aus.

----------

##-Beispiel 3.22: Restwertleasing

Ein Kfz-Händler bietet für einen Mittelklasse-Pkw folgendes Leasinggeschäft an:

Kassapreis € 21.790,00

Anzahlung € 2.148,00 bei Vertragsabschluss zu zahlen

Restwert € 5.980,00 gleichzeitig mit der letzten Rate zu zahlen

60 nachschüssige Monatsraten à € 369,00 erstmals einen Monat nach Vertragsabschluss

a) Berechnen Sie die Effektivverzinsung des Leasingangebots.

Äquivalenzgleichung:

21790 =2148 +369 \*(1 +i)^(-1/(12)) +... +369 \*(1 +i)^(-(60)/(12)) +5980 \*(1 +i)^(-(60)/(12))

19642 ='Si[t=1;60](369 \*(1 +i)^(-t/(12)) +5980 \*(1 +i)^(-(60)/(12))

Mit Technologieunterstützung erhält man: i ~~0,1318 Der Effektivzinssatz beträgt ca. 13,2 %.

Da es sich bei den Ratenzahlungen um einen regelmäßigen Zahlungsstrom handelt, kann der Effektivzinssatz beim GTR mit dem TVM-Solver und bei EXCEL mit der Funktion ZINS ermittelt werden.

-----

b) Firmen können beim Leasing Steuervorteile nutzen.

Berechnen Sie die Effektivverzinsung, wenn der Leasingnehmer die Leasingraten steuerlich mit 30 % abschreiben kann.

Der Leasingnehmer bezahlt effektiv monatlich € 369,00 \*0,7 =€ 258,30.

Mit Technologie erhält man die Lösung i =2,84 %.

Für Firmen, welche die Leasingraten steuerlich abschreiben können, ist dies eine günstige Möglichkeit der Fremdfinanzierung.

j-118 - Rentenrechnung

##-Beispiel 3.23: Restwertleasing oder Kredit

Herr Mayr beabsichtigt, einen Pkw der gehobenen Mittelklasse zu kaufen.

Der Kaufpreis des Fahrzeuges beträgt € 46.000,00. Da er die nötigen finanziellen Mittel nicht zur Verfügung hat, bietet ihm seine Hausbank zwei Finanzierungsmöglichkeiten zur Auswahl.

Argumentieren Sie, für welche Finanzierungsvariante sich Herr Mayr entscheiden soll.

a) Finanzierung durch Restwertleasing mit folgenden Konditionen:

Kaufpreis € 46.000,00

Anzahlung € 11.000,00 bei Vertragsabschluss zu zahlen

48 Monatsraten à € 800,00 erstmals einen Monat nach Vertragsabschluss zu zahlen

Restwert € 9.000,00 zahlbar gleichzeitig mit der letzten Monatsrate

PV =46000 -11000 =35000

35000 ='Si[t=1;48](800 \*(1 +i)^(-t/(12))) +9000 \*(1 +i)^(-(48)/(12))

Mit Technologieunterstützung erhält man als Lösung dieser Gleichung den Effektivzinssatz 14,08 %.

-----

b) Bankkredit:

Auszahlungsbetrag € 46.000,00

48 Monatsraten a € 1.180,00 erstmals einen Monat nach Kreditauszahlung

46000 =1180 \*(1 +i)^(-1/(12)) +1180 \*(1 +i)^(-2/(12)) +... +1180 \*(1 +i)^(-(48)/(12))

46000 ='Si[t=1;48](1180 \*(1 +i)^(-t/(12)))

Mit Technologieunterstützung erhält man den Effektivzinssatz 11,13 %.

Der Bankkredit hat die kleinere Effektivverzinsung und ist somit günstiger. Unberücksichtigt bleiben hier allerdings eventuelle steuerliche Vorteile des Leasings.

----------

##### \*\*-Übungsaufgaben

##-3.001 Berechnen Sie mithilfe der Rentenformeln von der gegebenen Rente mit der Rate R, dem Jahreszinssatz i und der Rentendauer n jeweils den Endwert und den Barwert.

Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

Markieren Sie die Bewertungszeitpunkte für den Endwert und den Barwert.

a) Nachschüssige Rente: R =€ 100,00; i =3 %; n =5 Jahre

**[]**

b) Vorschüssige Rente: R =€ 100,00; i =3 %; n =5 Jahre

**[]**

c) Nachschüssige Rente: R =€ 1.000,00; i =4 %; n =20 Jahre

**[]**

d) Vorschüssige Rente: R =€ 1.000,00; i =0,5 %; n =20 Jahre

**[]**

----------

##-3.002

a) Berechnen Sie den Endwert und den Barwert einer 27-mal nachschüssig zahlbaren Jahresrente mit einer Rate von € 2.000,00 für den Zinssatz 6 % p. a.

**[]**

b) Argumentieren Sie, wie sich der Endwert und der Barwert verändern, wenn der Zinssatz steigt.

**[]**

----------

E\_(nach) =R \*(q^n -1)/(q -1)

B\_(nach) =E\_(nach) \*1/(q^n) =R \*(q^n -1)/(q -1) \*1/(q^n)

B\_(vor) =B\_(nach) \*q

E\_(vor) =E\_(nach) \*q

p. a. (per anno): italienisch für jährliche Verzinsung

j-119 - Übungsaufgaben

##-3.003

a) Berechnen Sie den Endwert und den Barwert einer 12-mal vorschüssig zahlbaren Jahresrente mit einer Rate von € 1.000,00 für den Zinssatz 5 % p. a.

**[]**

b) Argumentieren Sie, wie sich der Endwert und der Barwert verändern, wenn der Zinssatz sinkt.

**[]**

----------

Tipp:

Für i >0 gilt:

Der Barwert ist immer kleiner als die Summe aller Raten.

Der Endwert ist immer größer als die Summe aller Raten.

----------

##-3.004 Lisa legt am Anfang eines Jahres einen Betrag X auf ein Sparkonto, das mit 4,5 % p. a. verzinst wird. Sie will 14-mal jeweils am Ende des Jahres € 1.000,00 von diesem Sparkonto abheben.

a) Erklären Sie, welche Größe der Rentenrechnung dem Betrag X entspricht.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe des Betrags X.

**[]**

----------

##-3.005 Lisa legt heute einen Betrag X auf ein Sparkonto, das mit 4,5 % p. a. verzinst wird. Sie möchte 14-mal jährliche Zahlungen in der Höhe von € 1.000,00 abheben. Die erste Zahlung erfolgt 7 Jahre nach Einlage des Betrags.

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe des Betrags.

**[]**

----------

Tipp: Die Wahl des Bezugszeitpunktes entscheidet, ob eine Rente als vor- oder nachschüssig gerechnet wird.

----------

##-3.006 In der Grafik ist der Zahlungsstrom einer nachschüssigen Rente dargestellt.

a) Markieren Sie in der Grafik die Bewertungszeitpunkte für den

Barwert und den Endwert der nachschüssigen Rente.

**[]**

b) Erstellen Sie mithilfe der geometrischen Reihe eine Formel, mit der der Zahlungsstrom

(1) auf den Zeitpunkt t =7,

(2) auf t =8,

(3) auf t =0 und

(4) auf t =10 bewertet wird.

**[]**

----------

##-3.007 In der Grafik ist der Zahlungsstrom einer vorschüssigen Rente dargestellt.

a) Markieren Sie in der Grafik die Bewertungszeitpunkte für den Barwert und den Endwert der vorschüssigen Rente.

**[]**

b) Erklären Sie, wie Sie ausgehend vom vorschüssigen Barwert B\_(vor), den Zahlungsstrom

(1) auf den Zeitpunkt t =0 und

(2) auf den Zeitpunkt t =8 bewerten können.

**[]**

-----

B\_(vor) =R \*^(q^n -1)/(q -1) \*1/(q^(n -1))

----------

##-3.008 Hasret hat Anspruch auf eine achtmal vorschüssig zahlbare Rente von € 1.000,00 jährlich. Die erste Ratenzahlung ist in 5 Jahren fällig. i =5 %

a) Sie will dafür sofort eine einmalige Zahlung.

Berechnen Sie die Höhe dieser Einmalzahlung.

**[]**

b) Hasret will anstelle der Jahresrente eine Einmalzahlung in der Höhe von € 8.248,88.

Ermitteln Sie, wann Hasret diese Zahlung erhalten kann.

Geben Sie die Zeit in Jahren ab Rentenbeginn an.

**[]**

----------

##-3.009 Herr Ottokar ist Waldbesitzer. Aus seinem Fichtenwald erwartet er für die kommenden Jahre folgende Erträge:

Vom Ende des 4. Jahres bis zum Ende des 8. Jahres je € 10.000,00 und vom Ende des 10. Jahres bis zum Ende des 15. Jahres je € 12.000,00.

Für die anderen Jahre plant Herr Ottokar den Wald ruhen zu lassen.

Herr Ottokar kalkuliert mit einem Zinssatz von i =4 %.

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse grafisch dar.

**[]**

b) Berechnen Sie den Wert aller Einnahmen aus heutiger Sicht.

**[]**

j-120 - Rentenrechnung

##-3.0 10 Ein Tiroler Schotterhändler verkauft eines seiner Grundstücke.

Zwei Angebote gehen ein:

A bietet € 400.000,00 sofort und zusätzlich 10 Jahresraten zu je € 160.000,00. Die erste Ratenzahlung erfolgt in einem Jahr.

B bietet 1,8 Mio. Euro nach einem Jahr.

Argumentieren Sie mittels Berechnung der Barwerte, welches Angebot für den Schotterhändler bei i =6,5 % am ertragreichsten ist.

**[]**

----------

##-3.011 Herr Ottokar will in den nächsten 10 Jahren jeweils am Jahresbeginn einen Betrag von € 12.000,00 sparen (insgesamt 10 Raten).

Seine Bank bietet ihm mehrere Anlagealternativen an:

(1) 6 % Zinsen. Zusätzlich erhält er ein Jahr nach jeder Sparrate eine Bonuszahlung in der Höhe von 4 % der Sparrate.

(Die Bonuszahlung erfolgt zehnmal.)

**[]**

(2) 7 % Zinsen. Zusätzlich erhält Herr Ottokar mit der letzten Rate einen Bonus in der Höhe von 20 % der letzten Rate.

**[]**

(3) 7,5 % Zinsen (ohne weitere Bonusleistungen).

Entscheiden Sie, welche Anlagealternative am ertragreichsten ist, wenn das Endvermögen nach zehn Jahren möglichst groß sein soll.

Begründen Sie Ihre Entscheidung mittels Berechnung der Endwerte der drei Alternativen.

**[]**

----------

##-3.012 Die Einzahlungen auf ein Sparkonto werden durch folgende Rechnung bewertet:

750 \*(1,03^4 -1)/(1,03 -1) =3137,72

a) Beschreiben Sie in Worten die Bedeutung aller in der Gleichung vorkommenden Zahlen.

Was wird durch diese Rechnung ermittelt?

**[]**

b) Stellen Sie den zugehörigen Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar. Markieren Sie den Zeitpunkt, zu dem der Zahlungsstrom bewertet wird.

**[]**

----------

##-3.013 Die Zahlungen eines Pachtvertrags für eine Garage werden durch folgende Rechnung bewertet:

600 \*(1,04^5 -1)/(1,04 -1) \*1/(1,04^4) =2777,94

a) Beschreiben Sie in Worten die Bedeutung aller in der Gleichung vorkommenden Zahlen.

Was wird durch diese Rechnung ermittelt?

**[]**

b) Stellen Sie den zugehörigen Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar. Markieren Sie den Zeitpunkt, zu dem der Zahlungsstrom bewertet wird.

**[]**

----------

##-3.014 Lukas bekommt zu Beginn eines Jahres einen Betrag in der Höhe von € 5.000,00, der auf einem Sparkonto mit i =3 % angelegt ist.

Am Ende dieses und der vier folgenden Jahre will er jeweils € 1.000,00 auf das Konto einzahlen.

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse grafisch dar.

**[]**

b) Erklären Sie, warum der Kontostand unmittelbar nach der letzten Einzahlung größer als € 10.000,00 sein muss.

**[]**

c) Berechnen Sie den Kontostand unmittelbar nach der letzten Einzahlung.

**[]**

Ein Zahlungsstrom wird durch folgende Rechnung bewertet:

10000 \*1,025^4 +2000 \*(1,025^4 -1)/(1,025 -1) =19343,16

d) Beschreiben Sie in Worten die Bedeutung aller in der Gleichung vorkommenden Zahlen.

**[]**

j-121 - Übungsaufgaben

##-3.015 Lena bekommt zu Beginn eines Jahres einen Betrag in der Höhe von € 5.000,00, der auf einem Sparkonto mit i =3 % angelegt ist.

Am Ende dieses und der vier folgenden Jahre will sie jeweils € 1.000,00 von dem Konto abheben.

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse grafisch dar.

**[]**

b) Erklären Sie, warum der Kontostand unmittelbar nach der letzten Abhebung positiv sein muss.

**[]**

c) Berechnen Sie den Kontostand unmittelbar nach der letzten Abhebung.

**[]**

Ein Zahlungsstrom wird durch folgende Rechnung bewertet:

10000 \*1,025^4 -2000 \*(1,05^4 -1)/(1,025 -1) =2733,10

d) Beschreiben Sie in Worten die Bedeutung aller in der Gleichung vorkommenden Zahlen.

**[]**

----------

##-3.016 In der Literatur zur Rentenrechnung gibt es verschiedene Darstellungsformen für die Formeln von Bar- und Endwert.

Zeigen Sie, dass folgende Formeln äquivalent sind:

a) B\_(nach) =R \*(q^n -1)/(q^n -1) und

B\_(nach) =R \*(1 -q^(-n))/i

**[]**

b) B\_(vor) =R \*(q^n -1)/i \*1/(q^(n -1)) und

B\_(vor) =R \*(1 -q^(-n))/i \*q

**[]**

----------

##### \*\*-Ratenberechnung

##-3.017 Daniel hat einen Kredit in der Höhe von € 10.000,00 bei einer Verzinsung von 3,5 % p. a. aufgenommen.

Den Kredit muss er durch 5 nachschüssige Jahresraten tilgen.

a) Erklären Sie, warum diese Jahresraten größer als € 2.000,00 sein müssen.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe dieser Jahresraten.

**[]**

----------

##-3.018 Julia hat € 5.000,00 von einer Tante geerbt. Das Geld ist auf einem Sparkonto angelegt, das mit 2,5 % p. a. verzinst wird.

Sie möchte den Betrag durch 5 gleich hohe jährliche Raten abheben.

Die erste Rate möchte sie sofort abheben.

a) Erklären Sie, warum diese Raten größer als € 1.000,00 sein müssen.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe dieser Raten.

**[]**

----------

##-3.019 Am 1. 1. 2016 wurden € 80.000,00 zu i =5 % angelegt. Das gesamte Guthaben soll in 16 gleich hohen Jahresraten abgehoben werden.

Die erste Abhebung erfolgt am 1. 1.2022.

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse grafisch dar.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe der Rate.

**[]**

----------

##-3.020 Engin zahlt heute € 20.000,00 auf ein Pensionskonto ein, das mit i =4 % verzinst wird. Er will dafür eine in drei Jahren beginnende 12-mal nachschüssig zahlbare Jahresrente erhalten.

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse grafisch dar.

**[]**

b) Ermitteln Sie die Höhe der Rate dieser Jahresrente.

**[]**

----------

Hinweis: Um ohne Technologie die Rate einer Rente berechnen zu können, muss die Barwertformel

B\_(nach) =R \*(q^n -1)/(q -1) \*1/(q^n) nach R umgestellt werden:

R =B\_(nach) \*(q -1)/(q^n -1) \*q^n

----------

##### \*\*-Anzahl der Raten

##-3.021 Eine Schuld von € 50.000,00 soll durch jährliche nachschüssige Raten von je € 5.000,00 getilgt werden. i =7 %

a) Ermitteln Sie die Restschuld nach Zahlung der 10. Rate.

**[]**

b) Ermitteln Sie die Anzahl der Vollraten.

**[]**

c) Ermitteln Sie die Höhe der Restzahlung, die zugleich mit der letzten vollen Rate fällig ist.

**[]**

d) Ermitteln Sie die Höhe der Restzahlung, die ein Jahr nach der letzten vollen Rate fällig ist.

**[]**

----------

Hinweis: Um ohne Technologie die Rentendauer berechnen zu können, muss die Barwertformel

B\_(nach) =R \*(q^n -1)/(q -1) \*1/(q^n) nach n

umgestellt werden. Dabei ist eine Exponentialgleichung zu lösen.

Eine Rentendauer lässt sich leicht mit technologischen Hilfsmitteln wie GTR oder Excel ermitteln.

Rente | Excel-Funktion

n | ZZR()

R | RMZ()

i | ZINS()

PV | BW()

FV | ZW()

j-122 - Rentenrechnung

##-3.022 Stefanie hat € 30.000,00 geerbt, die sie zu einem Zinssatz von i =5 % auf ein Bankkonto legt. Sie möchte von ihrem Guthaben jährlich einen Betrag von € 2.000,00 abheben.

Die erste Abhebung erfolgt ein Jahr nach Anlage des Kapitals.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Vollraten, die Stefanie erhalten kann.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe des Restbetrages zugleich mit der letzten Vollrate.

**[]**

c) Ermitteln Sie die Höhe des Restbetrages ein Jahr nach der letzten Vollrate.

**[]**

d) Berechnen Sie die Höhe des Restbetrages auf dem Konto unmittelbar nach der 10. Vollrate.

**[]**

----------

##-3.023 Kerstin legt heute € 30.000,00 auf ein Bankkonto, das mit i =5 % verzinst wird. Sie will dafür eine in fünf Jahren beginnende vorschüssige Jahresrente zu je € 6.000,00.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Vollraten, die Kerstin bekommt.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, die ein Jahr nach der letzten Vollrate fällig ist.

**[]**

----------

##-3.024 Michelle hat heute ein Guthaben in der Höhe von € 40.000,00, das mit 5 % p. a. verzinst wird. Sie will dafür in drei Jahren einen Einmalbetrag von € 30.000,00 und eine in fünf Jahren beginnende vorschüssige Rente mit einer Rate von € 2.000,00 im Jahr.

a) Ermitteln Sie, wie viele Vollraten Michelle bekommt.

**[]**

b) Ermitteln Sie die Höhe der Restzahlung, die zugleich mit der letzten Vollrate fällig ist.

**[]**

----------

##-3.025 Manuel hat einen Betrag in der Höhe von € 100.000,00 geerbt, der auf einem Konto mit einer Verzinsung von 3 % p. a. angelegt ist.

Er hebt von diesem Konto sofort und dann in jährlichen Abständen jeweils € 5.000,00 ab.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Vollraten.

**[]**

b) Erhöht man den Zinssatz auf 6 %, ist die Berechnung der Anzahl der Vollraten nicht mehr möglich.

Begründen Sie, warum das so ist.

**[]**

----------

##### \*\*-Zinssatz von Renten

##-3.026 Sandra will jeweils am Ende eines jeden Jahres € 1.000,00 auf ein Sparbuch legen, um nach 10 Jahren ein Guthaben von € 15.000,00 zu haben. Ermitteln Sie den Zinssatz, den dieses Sparbuch haben muss.

**[]**

----------

##-3.027 Eine Schuld von € 13.534,00 wird durch 16 vorschüssige Jahresraten von je € 1.000,00 getilgt.

Berechnen Sie den Jahreszinssatz.

**[]**

----------

##-3.028 Florian hat € 16.947,00 Schulden bei einer Bank.

Laut Kreditvertrag tilgt er diese Schuld durch 30 nachschüssige Jahresraten von je € 1.000,00.

Berechnen Sie den Jahreszinssatz.

**[]**

----------

Hinweis: Um den Zinssatz berechnen zu können, muss die Barwertformel

B =R nach i

B\_(nach) =R \*(1 +i)^n -1)/i \*1/((1 +i)^n) nach i

umgestellt werden. Dabei ist eine Gleichung höheren Grades zu lösen, was nur näherungsweise möglich ist.

Zinssätze lassen sich leicht mit technologischen Hilfsmitteln wie GTR oder Excel ermitteln.

----------

##### \*\*-Unterjährige Renten

##-3.029 Berechnen Sie End- und Barwert einer 19-mal vorschüssig zahlbaren Semesterrente von je € 3.000,00. i\_2 =4 %.

**[]**

----------

##-3.030 Berechnen Sie End- und Barwert einer 24-mal nachschüssig zahlbaren Monatsrente von je € 1.000,00. i\_(12) =0,5 %.

**[]**

----------

##-3.031 Die Eltern von Lisa haben 15 Jahre hindurch immer zu Beginn jedes Quartals € 1.000,00 für ihre Tochter auf ein Sparkonto gelegt.

a) Berechnen Sie, über welchen Betrag Lisa 3 Monate nach der letzten Einzahlung verfügen kann, wenn

(1) mit i\_4 =1,75 % und

(2) mit i =7 % verzinst wird.

**[]**

----------

Tipp: Unterjährige Renten können wie Jahresrenten berechnet werden, wenn Rentenperiode und Verzinsungsperiode übereinstimmen.

Stimmen Rentenperiode und Zinsperiode nicht überein, dann muss ohne Technologieeinsatz der gegebene Zinssatz an die Rentenperiode äquivalent angepasst werden.

q =1 +i =(1 +i\_m)^m

j-123 - Übungsaufgaben

b) Argumentieren Sie, warum der Wert bei (1) höher ist als bei (2), obwohl die nominellen Jahreszinssätze gleich sind.

**[]**

----------

##-3.032 Stefanie hat ein Guthaben von € 15.000,00 auf einem Sparkonto. Sie will sofort beginnend 23-mal am Anfang jedes Quartals einen gleich bleibenden Betrag abheben, sodass das Guthaben damit aufgebraucht wird.

a) Berechnen Sie die Höhe dieses Betrags, wenn

(1) mit i\_4 =4 % und

(2) mit i =16 % verzinst wird.

**[]**

b) Argumentieren Sie, warum der Betrag bei (1) höher ist als bei (2), obwohl die nominellen Jahreszinssätze gleich sind.

**[]**

----------

Tipp: Äquivalente Zinssätze i\_m und i\_p ergeben bei gleichem Anfangskapital und gleicher Verzinsungsdauer dasselbe Endkapital. im ist gegeben.

i\_m ist zu berechnen.

i\_p =(1 +i\_m)^(m/p) -1

----------

##-3.033 Lucas ist 18 Jahre alt und hat zu rauchen begonnen.

Jeden Monat gibt er ca. € 40,00 für seine Glimmstängel aus.

Ermitteln Sie, welchen Betrag Lucas in 50 Jahren ansparen könnte, wenn er den Betrag von € 40,00 am Ende eines jeden Monats auf ein Sparkonto mit i =3,5 % einzahlen würde.

**[]**

----------

##-3.034 Frau Fuchs spielt leidenschaftlich Lotto.

Jeden Monat gibt sie für ihre Spielsucht ca. € 200,00 aus.

Berechnen Sie, welchen Betrag sie in 40 Jahren ansparen könnte, wenn sie ihre monatlichen Ausgaben für Lotto am Anfang eines jeden Monats auf ein Sparkonto mit i =4,5 % legen würde.

**[]**

----------

##-3.035 Frau König hat im Lotto gewonnen und legt € 100.000,00 auf ein mit i =4,25 % verzinstes Bankkonto. Dieses Guthaben möchte Sie durch 40 Quartalsraten aufbrauchen. Die erste Rate möchte sie 3 Monate nach Einzahlung des Guthabens abheben.

Ermitteln Sie, wie hoch die Quartalsraten sind.

**[]**

----------

##-3.036 Eine Schuld von € 30.000,00 wird durch nachschüssige Semesterraten von je € 2.000,00 getilgt.

Ermitteln Sie, wie viele Vollraten zu zahlen sind und wie hoch die Restrate ist, die zugleich mit der letzten Vollrate zu zahlen ist. i\_2 =3,5 %

**[]**

----------

##-3.037 Katharina legt heute € 20.000,00 auf ein Sparkonto.

Sie will dafür eine in 3 Jahren beginnende vorschüssig zahlbare Semesterrente von je € 4.000,00. i\_2 =3 %

a) Berechnen Sie, wie oft sie die vollen Raten beziehen kann.

**[]**

b) Ermitteln Sie die Höhe der Restzahlung, die zugleich mit der letzten Rate fällig ist.

**[]**

c) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, die zugleich mit der dritten Rate fällig ist.

**[]**

----------

##-3.038 Ein Kapital von € 80.000,00 ist durch eine sofort beginnende nachschüssige Semesterrente aufzubrauchen.

Die Höhe der Semesterraten beträgt € 8.000,00. i =5 %

a) Berechnen Sie, wie oft die vollen Raten bezogen werden können.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, die zugleich mit der letzten vollen Rate fällig ist.

**[]**

c) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung ein Jahr nach der letzten Vollrate.

**[]**

----------

##-3.039 Jaqueline legt € 20.000,00 auf ein Bankkonto, das mit 4 % p. a. verzinst wird.

a) Berechnen Sie, wie viele Semesterraten zu je € 5.000,00 sie beziehen kann, wenn die erste Ratenzahlung in 6 Monaten erfolgt.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, die zugleich mit der letzten Rate fällig ist.

**[]**

c) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, die zugleich mit der dritten Rate fällig ist.

**[]**

j-124 - Rentenrechnung

##### \*\*-Rentenkonvertierung

Aufgrund der demografischen Entwicklung kann in Zukunft die Alterspension in Österreich nicht mehr allein vom Staat getragen werden.

Das 3-Säulen-Modell teilt die Verantwortung für Pensionszahlung unter dem Staat (Säule 1), dem Betrieb (Säule 2) und der Privatperson (Säule 3) auf.

Durch die Wirtschaftskrise seit 2008 und den damit verbundenen Rückgang der Zinsen kommt dieses Modell allerdings ins Wanken.

----------

##-3.040 Sarah legt 40 Jahre lang jeweils am Ende eines jeden Jahres € 1.000,00 auf ein Pensionskonto ein, das mit 4 % p. a. verzinst wird.

Nach Ablauf der 40 Jahre tritt sie ihre Pension an und lässt sich den angesparten Betrag jeweils am Ende eines jeden Jahres, 25 Jahre lang (auf diese Zeitspanne schätzt sie ihre Lebenserwartung nach Pensionsantritt) als Zusatzpension auszahlen.

Ermitteln Sie die Höhe der jährlichen Raten.

**[]**

----------

##-3.041 Eine 35-jährige Managerin verpflichtet sich, 30 Jahre lang jeweils am Anfang jeden Jahres € 10.000,00 in eine private Pensionsversicherung einzuzahlen, die mit i =4,5 % verzinst.

a) Berechnen Sie die Höhe des Endwerts dieser Zahlungen.

**[]**

b) Ein Jahr nach der letzten vollen Rate bekommt sie das Geld jährlich vorschüssig 20-mal ausbezahlt.

Berechnen Sie die Höhe dieser Jahresrate.

**[]**

c) Berechnen Sie, wie oft die Managerin die Rate bekommt, wenn sie sich jährlich vorschüssig € 50.000,00 auszahlen lässt.

Wie hoch ist die Restrate ein Jahr nach der letzten vollen Rate?

**[]**

d) Diese Pensionsraten sind stark vom Zinssatz abhängig.

Rechnen Sie das Beispiel komplett mit dem Zinssatz

(1) i =2 % und

**[]**

(2) i =6 %.

**[]**

Erklären Sie, warum Sie bei unterschiedlichen Zinssätzen sehr unterschiedliche Werte erhalten.

----------

##-3.042 Martin legt 40 Jahre lang jeweils am Ende eines jeden Monats € 100,00 auf ein Bankkonto ein, das mit i =4 % p. a. verzinst wird.

Nach Ablauf der 40 Jahre tritt er seine Pension an und lässt sich den angesparten Betrag jeweils am Ende eines jeden Monats, 25 Jahre lang als Zusatzpension auszahlen.

Berechnen Sie die Höhe der monatlichen Raten.

**[]**

----------

##-3.043 Martin legt 40 Jahre lang jeweils am Ende eines jeden Monats einen Betrag X auf ein Bankkonto ein, das mit 4 % p. a. verzinst wird.

Nach Ablauf der 40 Jahre tritt er seine Pension an und plant, sich den angesparten Betrag jeweils am Ende eines jeden Monats, 25 Jahre lang als Zusatzpension auszahlen zu lassen. Die Höhe der monatlichen Zusatzpension soll € 2.000,00 sein.

Berechnen Sie die Höhe der einzuzahlenden Monatsrate X.

**[]**

----------

##-3.044

a) Michael ist 16 Jahre alt. Er plant nach Abschluss der BHS und des Wehrdienstes mit 20 Jahren arbeiten zu gehen. Nach der derzeitigen Gesetzeslage muss er bis zum Ende seines 65. Lebensjahres arbeiten. Aus der Sterbetafel kann er entnehmen, dass er an seinem 16. Geburtstag noch eine Lebenserwartung von ca. 62 Jahren (Spalte: Fernere Lebenserwartung) hat.

Laut Statistik rechnet er also damit, ein Alter von 78 Jahren zu erreichen.

|Sterbetafel 2010/2012 männlich|

{{Abkürzungen für die folgende Tabelle:

x - Genaues Alter (am x-ten Geburtstag) in Jahren

q(x) Sterbewahrscheinlichkeit im Altersintervall x bis x +1

l(x) - Überlebende im Alter x

d(x) - Gestorbene im Altersintervall x bis x +1

L(x) - Von den Überlebenden im Alter x bis x +1 noch zu durchlebende Jahre

T(x) - Von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durchlebende Jahre

e(x) - Fernere Lebenserwartung im Alter x in Jahren}}

x | q(x) | l(x) | d(x)

0 | 0,0039491 | 100.000 | 395

1 | 0,0002682 | 99.605 | 27

2 | 0,0002139 | 99.578 | 21

3 | 0,0001654 | 99.557 | 16

4 | 0,0001243 | 99.541 | 12

5 | 0,0000914 | 99.528 | 9

6 | 0,0000731 | 99.519 | 7

7 | 0,0000691 | 99.512 | 7

8 | 0,0000702 | 99.505 | 7

9 | 0,0000711 | 99.498 | 7

10 | 0,0000735 | 99.491 | 7

11 | 0,0000831 | 99.484 | 8

12 | 0,0001026 | 99.475 | 10

13 | 0,0001357 | 99.465 | 14

14 | 0,0001912 | 99.452 | 19

15 | 0,0002696 | 99.433 | 27

16 | 0,0003673 | 99.406 | 37

-----

x | L(x) | T(x) | e(x)

0 | 99.650 | 7.795.068 | 77,95

1 | 99.592 | 7.695.417 | 77,26

2 | 99.568 | 7.595.826 | 76,28

3 | 99.549 | 7.496.258 | 75,30

4 | 99.534 | 7.396.709 | 74,31

5 | 99.524 | 7.297.175 | 73,32

6 | 99.515 | 7.197.651 | 72,32

7 | 99.508 | 7.098.135 | 71,33

8 | 99.501 | 6.998.627 | 70,33

9 | 99.494 | 6.899.126 | 69,34

10 | 99.487 | 6.799.631 | 68,34

11 | 99.479 | 6.700.144 | 67,35

12 | 99.470 | 6.600.664 | 66,35

13 | 99.458 | 6.501.194 | 65,36

14 | 99.442 | 6.401.736 | 64,37

15 | 99.419 | 6.302.294 | 63,38

16 | 99.388 | 6.202.874 | 62,40

-----

Die vollständige Sterbetafel finden Sie auf der Übungs-CD-ROM.

j-125 - Übungsaufgaben

Berechnen Sie die Höhe des Betrags, den Michael ab seinem 20. Geburtstag monatlich vorschüssig bis zum Ende seines 65. Lebensjahres (45 Jahre) an eine Pensionskassa zahlen muss, um ab seinem 65. Geburtstag 13 Jahre lang, monatlich vorschüssig, € 3.000,00 als Zusatzpension zu erhalten.

Der Kalkulationszinssatz sei i =4 %.

-----

b) Clara, die Freundin Michaels, ist ebenfalls 16 Jahre alt. Auch sie besucht eine BHS und hat vor, nach der Reifeprüfung, also mit 19 Jahren, arbeiten zu gehen. Aus der Sterbetafel kann sie entnehmen, dass sie an ihrem 16. Geburtstag noch eine Lebenserwartung von ca. 68 Jahren (Spalte: Fernere Lebenserwartung) hat.

Laut Statistik kann sie also damit rechnen, ein Alter von ca. 84 Jahren zu erreichen.

Ermitteln Sie, welchen Betrag Clara ab ihrem 19. Geburtstag, monatlich vorschüssig, bis zum Ende ihres 65. Lebensjahres 46 Jahre an eine Pensionskassa zahlen muss, um ab ihrem 65. Geburtstag 19 Jahre lang bis zum Ende ihres 84. Lebensjahres, monatlich vorschüssig, € 3.000,00 als Zusatzpension zu erhalten. Der Kalkulationszinssatz sei i =4 %.

-----

c) Argumentieren Sie, warum die monatliche Zahlung von Clara höher als die Zahlungen Michaels ist.

Ist dies auch im derzeitigen Pensionssystem so geregelt, dass Frauen länger Pensionsbeiträge einzahlen müssen und/oder auch höhere Beiträge zu zahlen haben?

-----

|Sterbetafel weibliches Geschlecht|

{{Abkürzungen für die folgende Tabelle:

e(x) - Fernere Lebenserwartung im Alter x in Jahren

x - Genaues Alter (am x-ten Geburtstag) in Jahren}}

e(x) | x

83,25 | 0

82,51 | 1

81,53 | 2

80,54 | 3

79,55 | 4

78,56 | 5

77,57 | 6

76,57 | 7

75,58 | 8

74,58 | 9

73.59 | 10

72,59 | 11

71,60 | 12

70,60 | 13

69,61 | 14

68,62 | 15

67,63 | 16

66,64 | 17

65,65 | 18

64,67 | 19

63,68 | 20

----------

##-3.045 Frau Berger (sie feiert heute ihren 20. Geburtstag) hat Angst um ihre Altersversorgung. Sie rechnet mit einer Lebenserwartung von 90 Jahren (sie hofft jedenfalls, so alt zu werden).

Sie plant, an ihrem 60. Geburtstag in den Ruhestand zu gehen.

Berechnen Sie, welchen Betrag X Frau Berger ab ihrem 20. Geburtstag monatlich nachschüssig auf ein Bankkonto einzahlen muss, wenn sie ab ihrem 60. Geburtstag einen monatlichen Betrag (nachschüssig) von € 1.600,00 bis zum 90. Geburtstag abheben möchte.

a) Rechnen Sie mit i =2 %.

b) Rechnen Sie mit i =3 %.

c) Rechnen Sie mit i =10 %.

d) Vergleichen Sie die Ergebnisse und beantworten Sie die folgenden Fragen:

* Wie hängen die Ergebnisse vom angenommenen Zinssatz ab?
* Was folgern Sie aus den Ergebnissen?
* Vergleichen Sie mit den derzeitigen Zinssätzen für längerfristige Veranlagungen und diskutieren Sie über die Auswirkungen von Zinssatzsenkungen auf die private Altersversorgung.
* Überlegen Sie, mit welcher Problematik die Pensionsversicherungen, neben den niedrigen Zinssätzen, derzeit zu kämpfen haben.

j-126 - Rentenrechnung

##-3.046 Onkel Franz möchte Florian für die Zeit seiner Schullaufbahn unterstützen, indem er ihm 5 Jahre nachschüssig jährlich € 2.000,00 auf ein Konto überweist, das mit 2,5 % p. a. verzinst wird.

Florian hätte stattdessen lieber nach einem Jahr beginnend achtmal halbjährlich vorschüssig einen Betrag R.

a) Stellen Sie die Zahlungen auf einer Zeitachse grafisch dar.

**[]**

b) Ermitteln Sie die Höhe dieses Betrages R.

**[]**

----------

##-3.047 Ein Kredit muss durch nachschüssige Quartalsraten von € 1.500,00 getilgt werden bei i\_4 =2 %. Der Kunde möchte stattdessen aber lieber bei gleicher Laufzeit mit monatlich vorschüssigen Raten tilgen.

a) Erklären Sie, warum die Monatsraten kleiner als € 500,00 sein müssen.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe der Monatsrate.

**[]**

----------

##-3.048 Eine Erbschaft soll durch eine in 5 Jahren beginnende 18-mal vorschüssig zahlbare Quartalsrente von je € 1.000,00 ausbezahlt werden. Der Erbe will stattdessen eine in zwei Jahren beginnende zehnmal vorschüssig zahlbare Jahresrente.

a) Schätzen Sie die Höhe der Jahresrate, indem Sie ohne Verzinsung rechnen.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe der Jahresrate bei einer Verzinsung von 4 % p. a.

**[]**

----------

3.049 Für ein Grundstück bietet der Käufer an, 20 Semester vorschüssig € 4.000,00 zu bezahlen. Der Verkäufer möchte stattdessen eine vorschüssige Monatsrente, die nach zwei Jahren beginnt und durch acht Jahre läuft.

a) Schätzen Sie die Höhe der Monatsrate, indem Sie ohne Verzinsung rechnen.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe der Monatsrate bei einer Verzinsung von 1,5 % p. q.

**[]**

c) Erklären Sie, wie sich die Monatsrate verändert, wenn die Monatsrente später als nach zwei Jahren beginnt.

**[]**

----------

##-3.050 Marco hat Anspruch auf zwei Beträge, nämlich € 10.000,00 heute und € 10.000,00 in vier Jahren. Er will dafür eine in 3 Jahren und 3 Monaten beginnende nachschüssige Quartalsrente von je € 4.000,00. i =5 %

a) Berechnen Sie, wie oft er die Quartalsrente beziehen kann.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, die am Tage der letzten Vollrate fällig ist.

**[]**

----------

##-3.051 Christina hat Anspruch auf eine sofort beginnende 16-mal nachschüssig zahlbare Rente von je € 1.000,00 jährlich bei einer Verzinsung von 5 % p. a. Sie will stattdessen eine doppelt so hohe sofort beginnende nachschüssig fällige Semesterrente beziehen.

a) Ermitteln Sie, wie oft sie die doppelte Semesterrate beziehen kann.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, die zugleich mit der letzten Vollrate fällig ist.

**[]**

----------

3.052 Simon muss eine Schuld durch 12 nachschüssige Semesterraten von je € 1.000,00 bei 3 % p. s. zurückzahlen.

Da er anfangs in Zahlungsschwierigkeiten ist, bezahlt er die ersten vier Semesterraten nicht.

Berechnen Sie, um wie viel dadurch die restlichen Raten gleichmäßig erhöht werden müssen.

----------

Hinweis: Stellen Sie die Zahlungen auf einer Zeitachse grafisch dar. Wählen Sie einen geeigneten Zeitpunkt zur Bewertung der Zahlungsströme.

j-127 - Übungsaufgaben

##-3.053 Herr Bauer hat das Anrecht auf eine zehnmal nachschüssig zahlbare Semesterrente von je € 3.000,00. Er hebt die ersten drei Raten nicht ab.

a) Berechnen Sie, um welchen Betrag dafür die restlichen Raten gleichmäßig erhöht werden, wenn

(1) mit i\_2 =3 %,

**[]**

(2) mit i\_4 =1,5 % verzinst wird.

**[]**

b) Erklären Sie, warum Sie bei (1) und (2) unterschiedliche Werte erhalten, obwohl die nominellen Jahreszinssätze gleich sind.

**[]**

----------

##-3.054 Beim Kauf eines Grundstückes wurde vertraglich festgelegt, dass der Käufer zehn Jahre lang sofort beginnend jeweils am Monatsende € 2.000,00 an den Verkäufer zu zahlen hat.

Nachdem der Käufer sechs Jahre lang seinen Verpflichtungen nachgekommen ist, sollen die noch ausständigen Beträge durch einen Einmalbetrag am Ende der zehnjährigen Laufzeit beglichen werden. i =7 %

a) Ermitteln Sie den Kaufpreis des Grundstückes.

**[]**

b) Berechnen Sie die Höhe des Einmalbetrages.

**[]**

----------

##-3.055 Zu ihrem zwanzigsten Geburtstag möchte sich Birgit ein neues Auto kaufen. Die Finanzierung des Autokaufs erfolgt durch einen Kredit.

Der Kassapreis ist € 50.000,00, die Anzahlung beträgt € 10.000,00.

Die Restschuld ist durch nachschüssige Monatsraten bei i =8 % in fünf Jahren zu tilgen.

a) Berechnen Sie die Höhe der Monatsrate.

**[]**

b) Wegen finanzieller Schwierigkeiten verlängert Birgit am Beginn des dritten Jahres die Tilgungsdauer auf insgesamt zehn Jahre.

Bei der Umschuldung (am Beginn des dritten Jahres) erhöht die Bank den Zinssatz auf i =8,5 %.

**[]**

----------

##-3.056 Um den Ausbau ihres Einfamilienhauses finanzieren zu können, nimmt Familie Bauer einen Bankkredit in Höhe von € 25.000,00 bei einer Laufzeit von zehn Jahren und der Verzinsung von 8 % p. a. auf.

a) Zunächst wird der Kredit durch monatliche nachschüssige Raten zurückgezahlt. Berechnen Sie die Höhe dieser Raten.

**[]**

b) Wegen finanzieller Schwierigkeiten will die Familie nach Ablauf von zwei Jahren eine Umschuldung erreichen.

Es stehen zwei Varianten zur Auswahl:

Variante 1:

Im dritten und vierten Jahr erfolgt keine Ratenzahlung zur Kredittilgung und die Gesamtdauer der Zahlungen bleibt bei zehn Jahren. Dadurch erhöhen sich die noch ausständigen monatlichen Zahlungen.

Berechnen Sie die Höhe der ausständigen nachschüssigen Monatsraten bei 8 % p. a.

Variante 2:

Am Beginn des dritten Jahres wird die Tilgungsdauer auf insgesamt zwanzig Jahre verlängert. Der Zinssatz wird bei der Umschuldung von der Bank ab dem dritten Jahr auf i =8,5 % erhöht.

Ermitteln Sie die Höhe der neuen nachschüssigen Monatsraten.

**[]**

j-128 - Rentenrechnung

##### \*\*-Effektivverzinsung

##-3.057 Eine Schuld von € 10.000,00 wird durch zwei nachschüssige Jahresraten in der Höhe von € 5.850,00 getilgt.

a) Stellen Sie die Zahlungen auf einer Zeitachse dar.

**[]**

b) Erstellen Sie die Äquivalenzgleichung.

**[]**

c) Berechnen Sie den Effektivzinssatz.

**[]**

----------

##-3.058 Eine Schuld von € 10.000,00 wird durch zwei nachschüssige Jahresraten in der Höhe von € 5.850,00 getilgt.

Sofort bei Kreditauszahlung fallen 1,5 % Bearbeitungsgebühr an. Jeweils im Voraus sind € 8,00 jährliche Kontoführungsgebühren zu zahlen.

a) Stellen Sie die Zahlungen auf einer Zeitachse dar.

**[]**

b) Erstellen Sie die Äquivalenzgleichung.

**[]**

c) Berechnen Sie den Effektivzinssatz.

**[]**

----------

Teilzahlung bei Elektrofachmärkten, Versandhäusern, Baumärkten ist teuer. Die effektiven Zinsen betragen von 8,9 % bis zu 20,54 %. Sogar die ohnehin schon teure Kontoüberziehung ist im Vergleich zur Teilzahlung bei Elektrofachmärkten und Versandhäusern günstiger. Die Banken verrechnen Nominalzinsen zwischen 8,25 % und 13,25 %.

(Quelle: www.arbeiterkammer.at)

----------

##-3.059 Die motorbezogene Versicherungssteuer für ein Kraftfahrzeug wird abhängig von der Leistung des Kfz in kW berechnet.

Die Steuer kann entweder einmal jährlich vorschüssig oder halbjährlich, vierteljährlich oder monatlich vorschüssig bezahlt werden.

Bei unterjähriger Bezahlung werden folgende Zuschläge verrechnet: halbjährlich +6 %, vierteljährlich +8 % und monatlich +10 %

a) Erklären Sie anhand der Tabelle (Beträge in Euro, Quelle: www.vvo.at), wie die Zuschläge berechnet werden:

kw: 34

jährlich: 74,40

halbjährlich: 39,43

vierteljährlich: 20,09

monatlich: 6,82

b) Berechnen Sie, welcher Effektivverzinsung die unterjährigen Zahlungsweisen entsprechen.

**[]**

----------

##-3.060 Ein Versandhaus bietet seinen Kunden die Möglichkeit, Waren durch Teilbeträge (nachschüssige Monatsraten) zu bezahlen.

(siehe Tabelle)

Ein Kunde bestellt eine Ware mit dem Bestellwert € 75,00 und möchte mit drei Teilbeträgen bezahlen.

{{Abkürzungen für die folgende Tabelle:

(1) - Bestellwert €

(2) - Anzahlung €

(3) - Restbetrag €

(4) - 3 Teilbeträge €

(5) - 6 Teilbeträge €}}

(1) | (2) | (3) | (4) | (5)

75,00 | 7,50 | 67,50 | 23,12 | -

150,00 | 15,00 | 135,00 | 46,24 | 23,59

250,00 | 50,00 | 200,00 | 68,50 | 34,95

400,00 | 80,00 | 320,00 | 109,60 | 55,92

600,00 | 120,00 | 480,00 | 164,40 | 83,88

a) Stellen Sie die Zahlungen auf einer Zeitachse dar.

**[]**

b) Erstellen Sie die Äquivalenzgleichung.

**[]**

c) Berechnen Sie die Effektivverzinsung dieses Ratengeschäfts.

**[]**

----------

Unternehmen | Effektiver Zinssatz bei Ratenkauf

Bauhaus | 8,90 %

Hornbach | 8,90 %

Obi | 9,76 % 1)

Media Markt | 20,54 % 1)

Saturn | 18,79 % 1)

Neckermann | 19,56 %

Otto Versand | 20,27 %

Universal Versand | 20,27 %

1) Zinssatz nicht angegeben, Berechnung durch AK Wien

----------

##-3.061 Ein Versandhaus bietet einen TV-Großbildprojektor zu einem Kaufpreis von € 20.000,00 auf Teilzahlungsbasis.

Es werden folgende Teilzahlungsbedingungen vereinbart:

€ 4.000,00 Anzahlung; 36 Monatsraten zu je € 569,00 (nachschüssig, erste Rate ein Monat nach Kauf)

Berechnen Sie den Effektivzinssatz.

Kaufpr. | Anz. | 4 MR | 6 MR

1000,00 | 100,00 | 233,00 | -

2000,00 | 200,00 | 466,00 | 315,00

3000,00 | 300,00 | 699,00 | 472,00

5000,00 | 1000,00 | 1035,00 | 700,00

10000,00 | 2000,00 | 2070,00 | 1399,00

20000,00 | 4000,00 | 4141,00 | 2799,00

30000,00 | 6000,00 | 6211,00 | 4198,00

40000,00 | 8000,00 | 8281,00 | 5597,00

50000,00 | 10000,00 | 10352,00 | 6996,00

-----

Kaufpr. | Anz. | 9 MR | 12 MR

2000,00 | 200,00 | 214,00 | -

3000,00 | 300,00 | 321,00 | 246,00

5000,00 | 1000,00 | 476,00 | 364,00

10000,00 | 2000,00 | 952,00 | 729,00

20000,00 | 4000,00 | 1904,00 | 1458,00

30000,00 | 6000,00 | 2857,00 | 2186,00

40000,00 | 8000,00 | 3809,00 | 2915,00

50000,00 | 10000,00 | 4761,00 | 3644,00

-----

Kaufpr. | Anz. | 18 MR | 24 MR

5000,00 | 1000,00 | 253,00 | -

10000,00 | 2000,00 | 506,00 | 395,00

20000,00 | 4000,00 | 1012,00 | 789,00

30000,00 | 6000,00 | 1518,00 | 1184,00

40000,00 | 8000,00 | 2023,00 | 1579,00

50000,00 | 10000,00 | 2529,00 | 1974,00

-----

Kaufpr. | Anz. | 30 MR | 36 MR

10000,00 | 2000,00 | 328,00 | 284,00

20000,00 | 4000,00 | 657,00 | 569,00

30000,00 | 6000,00 | 985,00 | 853,00

40000,00 | 8000,00 | 1314,00 | 1138,00

50000,00 | 10000,00 | 1642,00 | 1422,00

-----

Kaufpr. | Anz. | 48 MR | 60 MR

10000,00 | 2000,00 | 230,00 | -

20000,00 | 4000,00 | 460,00 | 396,00

30000,00 | 6000,00 | 690,00 | 594,00

40000,00 | 8000,00 | 920,00 | 792,00

50000,00 | 10000,00 | 1150,00 | 990,00

Teilzahlungstabelle zu den Übungsaufgaben 3.061 und 3.062

j-129 - Übungsaufgaben

##-3.062 Eine Wohnzimmereinrichtung zu einem Kaufpreis von € 30.000,00 wird auf Teilzahlungsbasis angeboten.

Es werden folgende Teilzahlungsbedingungen vereinbart:

€ 6.000,00 Anzahlung; 60 Monatsraten zu je € 594,00 (nachschüssig, erste Rate ein Monat nach Kauf).

Berechnen Sie den Effektivzinssatz.

**[]**

----------

##-3.063 Eine Waschmaschine kostet € 1.200,00 (inkl. 20 % USt).

Der Händler bietet folgende Teilzahlungskonditionen:

25 % des Kassapreises als Anzahlung,

8 nachschüssige Monatsraten zu je € 125,00.

Berechnen Sie, welcher Effektivverzinsung dies entspricht.

**[]**

----------

##-3.064 Angebot eines Großmarktes:

26 Zoll Computer-Monitor zum Preis von € 599,00

Teilzahlung möglich: € 120,00 Anzahlung; 24 nachschüssige Monatsraten a € 23,00

Berechnen Sie den Effektivzinssatz.

**[]**

----------

##-3.065 Der Kreditrechner einer Bank ermittelt für die Kreditsumme € 10.000,00 und für die Laufzeit von vier Jahren eine monatliche nachschüssige Kreditrate von € 224,85.

Berechnen Sie, wie hoch die Effektivverzinsung ist,

a) wenn keine Gebühren und Steuern berücksichtigt werden.

**[]**

b) wenn 2 % Bearbeitungsgebühr vom Kreditbetrag sofort von der Kreditsumme abgezogen werden.

**[]**

(Eine allfällige Kontoführungsgebühr wird vernachlässigt.)

----------

##-3.066 Für einen Wohnungssanierungskredit über € 20.000,00 für fünf Jahre ermittelt ein Kreditrechner einer Bank eine monatliche nachschüssige Kreditrate von € 378,41.

Berechnen Sie die Höhe der Effektivverzinsung.

**[]**

-----

Das empfohlene WohnbankDarlehen in Euro

Produkt:

Kredithöhe: EUR 20.000,00

Kreditrate (monatlich): EUR 378,41

Laufzeit: 5 Jahre

----------

##-3.067 Leasingangebot für einen Opel Astra mit dem Listenpreis € 21.830,00:

€ 6.000,00 Anzahlung; zusätzlich € 96,00 Bearbeitungsgebühr und € 118,20 gesetzliche Vertragsgebühr;

60 Monatsraten (nachschüssig) a € 264,41; Restwert € 7.000,00

Berechnen Sie die Effektivverzinsung.

**[]**

-----

Leasingkonditionen

Laufzeit 60 Monate

Kilometer pro Jahr 15.000

Anzahlung 6.000,00 E U R

Restwert 7.000,00 EUR

Bearbeitungsgebühr (einmalig) 96,00 EUR

Gesetzliche Vertragsgebühr 118,20 EUR

Leasingrate inkl. Versicherung 264.41 EUR

----------

##-3.068 Eine Bank bietet einen Pkw mit einem Kaufpreis von € 25.000,00 als Kfz-Leasing mit einer Eigenleistung von € 5.000,00 an. Der Restwert beträgt € 10.000,00 bei 48 nachschüssigen Monatsraten von je € 282,00.

a) Berechnen Sie den Effektivzinssatz.

Ein Bankberater bietet dem Kunden an, die Anzahlung von € 5.000,00 auf € 3.000,00 zu verringern und dafür den Restwert von € 10.000,00 auf € 12.000,00 zu erhöhen.

**[]**

b) Erklären Sie, warum sich bei dieser Variante eine kleinere Effektivverzinsung ergibt.

**[]**

----------

##-3.069 In einer Broschüre des Verbandes österreichischer Leasing-Gesellschaften (www.leasingverband.at) sind Kfz-Leasingmodelle mit und ohne Anzahlung für 36 und 48 Monate durchgerechnet.

Überprüfen Sie, ob es bei den verschiedenen Varianten unterschiedliche Effektivzinssätze gibt.

**[]**

-----

Kaufpreis 20.000 | 20.000

Leasingdauer in Monaten 48 | 36

Restwert 6.400 | 8.000

Leasingentgelt/Monat ohne Anzahlung 355 | 409

Anzahlung 5.000 | 5.000

Leasingentgelt/Monat mit Anzahlung 237 | 256

----------

##-3.070 Kfz-Leasing (Angaben siehe Tabelle in der Randspalte):

Berechnen Sie die Effektivverzinsung ohne Berücksichtigung von Steuervorteilen. Die Leasingrate ist monatlich nachschüssig fällig. (Eigenmittel =Anzahlung)

a) Erstellen Sie die Äquivalenzgleichung.

**[]**

b) Berechnen Sie den Effektivzinssatz.

**[]**

-----

Kaufpreis 140000 EUR

Eigenmittel 18000 EUR

Laufzeit 48 Monate

Restzahlung 110000 EUR

Ihre Leasingrate 1541,60 EUR

j-130 - Rentenrechnung

##-3.071 Kredit oder Leasing?

Frau Müller möchte ein Auto kaufen.

Zwei Finanzierungsmöglichkeiten stehen zur Auswahl:

* Restwertleasing:

€ 23.000,00 Kaufpreis; € 6.900,00 Anzahlung; 48 Monatsraten a € 350,00; € 5.000,00 Restwert

* Bankkredit:

Auszahlungsbetrag von € 23.000,00; 48 Monatsraten a € 580,00 (erste Rate einen Monat nach Kreditauszahlung)

Begründen Sie, für welche Finanzierungsform sich Frau Müller entscheiden soll, indem Sie die Effektivverzinsung der beiden Varianten vergleichen.

----------

3.072 Herr Müller möchte einen neuen Firmen-Lkw leasen.

Der Kaufpreis beträgt € 95.000,00.

Der Händler bietet ihm folgendes Leasingangebot:

Anzahlung: € 10.000,00 Laufzeit: 48 Monate

Leasingrate: € 1.600,00 monatlich nachschüssig Restwert: € 20.000,00

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

**[]**

b) Erstellen Sie die Äquivalenzgleichung des Zahlungsstroms.

**[]**

c) Berechnen Sie den Effektivzinssatz für dieses Leasingangebot.

**[]**

d) Berechnen Sie die Leasingrate, wenn für dieses Leasingangebot die Effektivverzinsung 4 % p. a. betragen soll.

**[]**

e) Argumentieren Sie, warum die Leasingrate bei einem Zinssatz von 4 % p. a. niedriger ist als bei 5,56 % p. a.

**[]**

----------

##### \*\*-Ziele erreicht?

##-Z 3.1 Familie Klüger hat für ihre neue Eigentumswohnung Wohnbauförderung erhalten. In den ersten 10 Jahren der Rückzahlung sind am Ende jeden Quartals € 131,75 zu bezahlen. Die Rate lässt Familie Klüger von einem Sparkonto abbuchen, auf das sie monatlich vorschüssig € 50,00 legt.

a) Stellen Sie die Einzahlungen und Abbuchungen dieses Kontos auf einer Zeitachse dar.

Markieren Sie die Bewertungszeitpunkte für Bar- und Endwert der beiden Renten.

**[]**

b) Familie Klüger möchte, sobald genügend Geld am Sparkonto liegt, ein Quartal mit den monatlichen Zahlungen aussetzen.

Schätzen Sie ab, wann dies frühestens möglich sein wird.

Begründen Sie Ihre Schätzung.

**[]**

c) Berechnen Sie, welcher Betrag nach 10 Jahren am Konto liegt, wenn Familie Klüger die monatlichen und quartalsmäßigen Zahlungen durchgängig leistet. i =1,5 %

**[]**

d) Beschreiben Sie, welcher Betrag X mit der folgenden Gleichung berechnet wird.

X \*q^(10) -131,75 \*(q\_4^(40) -1)/(q\_4 -1) =0

----------

##-Z 3.2 Im Rahmen einer Erbschaft soll Anton von seinem Bruder € 30.000,00 erhalten. Es wird vereinbart, dass dieser Betrag in halbjährlichen, nachschüssigen Raten zu je € 5.000,00 gezahlt wird. i\_2 =1 %

a) Berechnen Sie, wie viele volle Raten Anton erhält.

Ermitteln Sie Höhe der Restzahlung, die ein halbes Jahr nach der letzten Vollrate bezahlt wird.

**[]**

j-131 - Ziele erreicht?

b) Anton behauptet, mit seinem Bruder einen Jahreszinssatz von 2 % vereinbart zu haben.

Erklären Sie, warum diese Behauptung nicht ganz stimmt.

**[]**

c) Der Bruder überlegt, Anton das Geld in 10 nachschüssigen, gleich hohen Jahresraten zu geben.

Argumentieren Sie, ob diese Raten höher oder geringer als € 3.000,00 sein müssen.

**[]**

d) Der unten stehende Ausdruck entspricht dem tatsächlichen Zahlungsverlauf.

30000 =1300 \*(q\_4^(20) -1)/(q\_4 -1) +5643,42 \*q\_4^(-12)

Beschreiben Sie den Zahlungsverlauf in Worten und stellen Sie diesen auf einer Zeitgerade dar.

**[]**

----------

##-Z 3.3 Der Barwert einer Rente beträgt € 25.000,00.

a) Auf der Zeitachse sind die Auszahlungen dieser Rente dargestellt:

(1) Fassen Sie die Zahlungen als zwei nachschüssige Renten auf und markieren Sie die Bewertungszeitpunkte der zugehörigen Bar- und Endwerte.

**[]**

(2) Berechnen Sie die Höhe der Raten R bei i =3 %, wenn das gesamte zur Verfügung stehende Kapital ausbezahlt werden soll.

**[]**

b) Die Rente soll durch einen Einmalbetrag in Höhe von € 24.000,00 ersetzt werden. Argumentieren Sie, ob der Zeitpunkt dieser Zahlung vor oder nach dem Bewertungszeitpunkt des Barwerts liegt.

**[]**

----------

##-Z 3.4 Herr Freundlich erhält für den Kauf eines Neuwagens folgendes Leasingangebot:

Kaufpreis: € 25.000,00

Anzahlung: € 7.000,00

Laufzeit: 60 Monate

Restzahlung: € 5.000,00

Monatliche Rate: € 257,68

a) Die Raten werden nachschüssig bezahlt.

Erstellen Sie die zugehörige Äquivalenzgleichung.

Berechnen Sie den Effektivzinssatz.

**[]**

b) Erklären Sie, ob der Effektivzinssatz bei vorschüssigen Monatsraten geringer oder höher als bei nachschüssigen Raten wäre.

**[]**

c) Herr Freundlich ist mit dem Leasingangebot sehr zufrieden, möchte aber gern eine Anzahlung von € 5.000,00 und dafür eine Restzahlung von € 7.000,00 leisten.

Argumentieren Sie mithilfe des Effektivzinssatzes, ob sich dadurch die Einnahmen des Leasinggebers verringern.

**[]**

----------

##-Z 3.5 Ein Elektrohändler bietet seinen Kunden die Möglichkeit der Ratenzahlung. Für ein Gerät mit Kaufpreis € 979,00 werden 36 nachschüssige Monatsraten zu je € 33,04 verrechnet.

Es wird ein Effektivzinssatz von 13,9 % angegeben.

a) Kontrollieren Sie durch Berechnung den angegebenen Effektivzinssatz.

Zusätzlich entstehen zu Beginn der Ratenzahlung Kosten in Höhe von 5 % Bearbeitungsgebühr und 1,2 % Kontoeröffnungsgebühr.

Diese sind im angegebenen Effektivzinssatz nicht enthalten.

**[]**

b) Erstellen Sie die Äquivalenzgleichung zur Berechnung des tatsächlichen Effektivzinssatzes und berechnen Sie diesen.

**[]**

j-132 - Schuldtilgung

## \*\*-4 Schuldtilgung

|Schulden| können auf vielfältige Weise zurückbezahlt (getilgt) werden.

Häufig wird ein gewährter Kredit in Form von regelmäßigen, gleich hohen Raten (Annuitäten) getilgt. Den Rückzahlungsverlauf kann man mithilfe eines |Tilgungsplanes| tabellarisch darstellen.

----------

|Tilgungsplan|

§ 10. (1) Bei einem Kreditvertrag mit fester Laufzeit hat der Kreditgeber dem Verbraucher auf dessen Verlangen kostenlos und zu jedem beliebigen Zeitpunkt während der Gesamtlaufzeit des Kreditvertrags eine Aufstellung in Form eines Tilgungsplans zur Verfügung zu stellen.

(2) Aus dem Tilgungsplan muss hervorgehen, welche Zahlungen in welchen Zeitabständen zu leisten sind und welche Bedingungen für diese Zahlungen gelten. In dem Plan sind die einzelnen periodischen Rückzahlungen nach der Kredittilgung, den nach dem Sollzinssatz berechneten Zinsen und allfälligen zusätzlichen Kosten aufzuschlüsseln. Im Fall eines Kreditvertrags, bei dem kein fester Zinssatz vereinbart wurde oder die zusätzlichen Kosten geändert werden können, ist im Tilgungsplan klar und prägnant anzugeben, dass die Daten im Tilgungsplan nur bis zur nächsten Änderung des Sollzinssatzes oder der zusätzlichen Kosten gemäß dem Kreditvertrag Gültigkeit haben. (Quelle: Verbraucherkreditgesetz - VKrG)

----------

##### \*\*-Meine Ziele

Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

* die Annuitätenschuld als eine Möglichkeit der Schuldtilgung beschreiben und diese auf wirtschaftliche Aufgabenstellungen anwenden,
* den Tilgungsplan einer Annuitätenschuld erstellen und interpretieren,
* Schuldkonvertierungen durchführen und deren Ergebnisse interpretieren.

----------

##### \*\*-Worum geht's hier?

Markus nimmt einen Kredit auf, um ein Motorrad kaufen zu können. Die Kreditsumme von 10000 Euro soll bei 5 % p. a. in 4 Jahren durch jährliche Zahlungen beglichen werden. Markus bezahlt nach einem Jahr 3000 Euro, nach zwei Jahren 4000 Euro und nach drei Jahren 2000 Euro.

Berechnen Sie, wie hoch die letzte Zahlung nach vier Jahren ist.

|Lösung mit Zinsrechnung|

10000 =3000 \*1,05^(-1) +4000 \*1,05^(-2) +2000 \*1,05^(-3) +A\_4 \*1,05^(-4)

A\_4 =2172,19

-----

|Lösung mit Tilgungsplan in Form einer Tabelle|

Die Annuitäten teilen sich auf Zinsanteil und Tilgungsanteil auf.

Dies kann in Tabellenform zusammengestellt werden.

Zeile | Zinsanteil | Tilgungsanteil

1 | 500,00 | 2.500,00

2 | 375,00 | 3.625,00

3 | 193,75 | 1.806,25

4 | 103,44 | 2.068,75

Summe | 1.172,19 | 10.000,00

-----

Zeile | Annuität | Restschuld

0 | - | 10.000,00

1 | 3.000,00 | 7.500,00

2 | 4.000,00 | 3.875,00

3 | 2.000,00 | 2.068,75

4 | 2.172,19 | 0,00

Summe | 11.172,19 | -

-----

Tipp: Die |Annuität| ist der pro Zahlungsperiode zu zahlende Betrag des Schuldners.

Annuität =Zinsanteil +Tilgungsanteil

Diese Aufteilung der Annuität ist aus steuerlichen Gründen wichtig. Nur die |Zinsen| sind steuerlich absetzbar.

----------

### \*\*-4.1 Grundbegriffe

Die Schuldtilgung beschäftigt sich mit den finanzmathematischen Vorgängen, die bei der Tilgung (Rückzahlung) einer aufgenommenen Schuld auftreten. Unter einem Tilgungsplan versteht man eine tabellarische Darstellung der zeitlichen Vorgänge einer Schuldrückzahlung bis hin zur restlosen Tilgung der Schuld.

j-133 - Grundbegriffe

Auch für die Schuldtilgung gilt das |Äquivalenzprinzip| der Finanzmathematik:

Die Leistungen des Gläubigers (Geldgebers) sind gleich den Gegenleistungen des Schuldners, bezogen auf denselben Zeitpunkt.

* Die Leistung des Gläubigers ist die Bereitstellung des Kapitals.
* Die Gegenleistungen des Schuldners sind die Rückzahlungen in Form von Annuitäten. Durch die Annuitäten werden die Zinsen bezahlt und auch die Schuld getilgt (Tilgung).

----------

|Äquivalenzprinzip|

Leistung =Gegenleistung, bezogen auf denselben Zeitpunkt

Hinweis: Geldbeträge werden im Tilgungsplan kaufmännisch auf zwei Nachkommastellen gerundet.

----------

##-Beispiel 4.1: Schuldtilgung

Herr König hat einen Kredit in der Höhe von K\_0 =€ 50.000,00 bei i =4 % aufgenommen.

Die Schuld soll in 5 Jahren getilgt werden. Zur Schuldtilgung werden folgende jährliche, nachschüssige Rückzahlungen (Annuitäten) vereinbart:

A\_1 =€ 10.000,00 nach einem Jahr

A\_2 =€ 8.000,00 nach zwei Jahren

A\_3 =€ 10.000,00 nach drei Jahren

A\_4 =€ 15.000,00 nach vier Jahren

A\_5 =? nach fünf Jahren

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse grafisch dar.

b) Berechnen Sie, wie hoch die Annuität A\_5 sein muss, dass die Schuld vollständig getilgt wird.

c) Ermitteln Sie mithilfe eines Tilgungsplans die Höhe der Annuität A\_5.

Lösung:

b) Äquivalenzgleichung zur Berechnung von A\_5:

50000 =10000 \*1,04^(-1) +8000 \*1,04^(-2) +10000 \*1,04^(-3) +15000 \*1,04^(-4) +A\_5 \*1,04^(-5)

A\_5 =(50000 -10000 \*1,04^(-1) -8000 \*1,04^(-2) -10000 \*1,04^(-3) -15000 \*1,04^(-4)) \*1,04^5

A\_5 =€ 13.719,15

c) Der Tilgungsplan ist eine tabellarische Aufstellung, die für das Ende eines jeden Jahres der Schuldtilgung die fälligen Zinsen, die Tilgung, die Annuität und die noch offene Restschuld enthält.

Die nullte Zeile enthält nur die Anfangsschuld.

Die eigentliche Berechnung beginnt mit der ersten Zeile (Ende des ersten Jahres).

Zinsanteil: Z\_1 =K\_0 \*i

Z\_1 =50000 \*0,04 =2000

Tilgungsanteil: T\_1 =A\_1 -Z\_1

T\_1 =10000 - 2000 =8000

Restschuld: K\_1 =K\_0 -T\_1

K\_1 =50000 -8000 =42000

In gleicher Weise werden auch die zweite, dritte und vierte Zeile des

Tilgungsplanes von Zeile zu Zeile fortschreitend berechnet.

Da nach 5 Jahren die Restschuld K\_5 =0 sein soll, muss mit der letzten Tilgung die Restschuld des vierten Jahres getilgt werden.

Für die fünfte und letzte Zeile gilt:

T\_5 =K\_4 =13191,49

Z\_5 =13191,49 \*0,04 =527,66

----------

annus: lateinisch für Jahr

Topp: Obwohl sich das Wort Annuität aus dem lateinischen Wort "annus" ableitet, ist es auch üblich, unterjährige Rückzahlungen als Annuitäten zu bezeichnen.

j-134 - Schuldtilgung

Allgemeine Formeln:

Z\_h =K\_(h -1) \*i

T\_h =A\_h -Z\_h

K\_h =K\_(h -1) -T\_h für 1 <=h <=n

----

Letzte Zeile:

T\_n =K\_(n -1)

K\_n =0

-----

##-Beispiel 4.1: Schuldtilgung (Fortsetzung)

Mit der letzten Annuität ist der fünfte Tilgungsanteil samt Zinsanteil für das letzte Jahr zu zahlen.

A\_5 =Z\_5 +T\_5 =527,66 +13191,49 =13719,15

Zeile h: 0

Zinsanteil: -

Tilgungsanteil T\_h: -

Annuität: -

Restschuld: 50000,00

-----

Zeile h: 1

Zinsanteil: 2000,00 (50000,00 \*0,04)

Tilgungsanteil T\_h: 8000,00 (10000,00 -2000,00)

Annuität: 10000,00

Restschuld: 42000,00 (50000,00 -8000,00)

-----

Zeile h: 2

Zinsanteil: 1680,00 (42000,00 \*0,04)

Tilgungsanteil T\_h: 6320,00 (8000,00 -1680,00)

Annuität: 8000,00

Restschuld: 35680,00 (42000,00 -6320,00)

-----

Zeile h: 3

Zinsanteil: 1427,20 (35680,00 \*0,04)

Tilgungsanteil T\_h: 8572,80 (10000,00 -1427,20)

Annuität: 10000,00

Restschuld: 27107,20 (35680,00 -8572,80)

-----

Zeile h: 4

Zinsanteil: 1084,29 (27107,20 \*0,04)

Tilgungsanteil T\_h: 13915,71 (15000,00 -1084,29)

Annuität: 15000,00

Restschuld: 13191,49 (27107,20 -13915,71)

-----

Zeile h: 5

Zinsanteil: 527,66 (13191,49 \*0,04)

Tilgungsanteil T\_h: 13191,49 (=K\_4)

Annuität: 13719,15 (527,66 +13191,49)

Restschuld: 0,00

-----

Spaltensumme (Kontrolle) h: 6719,15

Spaltensumme (Kontrolle) T\_h: 50000,00

Spaltensumme (Kontrolle) Annuität: 56719,15

-----

Somit gilt: A\_5 =€ 13.719,15

Die Richtigkeit des Tilgungsplanes kann anhand folgender Zusammenhänge überprüft werden:

Die Summe der Tilgungsanteile ist gleich dem Schuldkapital K\_0:

'Si[h=1;5](Th) =50000,00

Da in jeder Zeile die Annuität gleich der Summe von Zinsanteil und Tilgungsanteil ist, ist auch die Summe aller Annuitäten gleich der Summe aller Zinsanteile, vermehrt um die Summe der Tilgungsanteile.

'Si[h=1;5](Zh) +'Si[h=1;5](Th) ='Si[h=1;5](Ah)

6719,15 +50000,00 =56719,15

----------

|Formeln zum Überprüfen eines Tilgungsplanes:|

'Si[h=1;n](Th) =K\_0

'Si[h=1;n](Zh) +'Si[h=1;n](Th) ='Si[h=1;n](Ah)

----------

|Begriffe der Schuldtilgung|

* Der |Tilgungsplan| ist eine tabellarische Aufstellung, die für jede Zahlungsperiode die |Zeilennummer h|, die |Zinsen| von der betreffenden |Restschuld|, die |Tilgung|, die |Annuität| und die Restschuld enthält.

Jede Zeile eines Tilgungsplanes ist ein Zahlungsauszug für die betreffende Zahlungsperiode.

* Die |Annuität A\_h| ist die Gesamterfordernis, die der Schuldner in der jeweiligen Zahlungsperiode zu leisten hat.
* Der |Tilgungsanteil T\_h| ist der Betrag, um den die Schuld in der Zahlungsperiode h vermindert wird.
* Die |Restschuld K\_h| ist die um die bisher geleistete Tilgung verminderte Schuld (Schuldrest) nach h Zahlungsperioden.
* Die |Tilgungsdauer n| ist die Anzahl der Zahlungsperioden.

----------

Es gilt:

Zinsanteil +Tilgungsanteil =Annuität

-----

Hinweis: 0 <=h <=n

n Tilgungsdauer

j-135 - Grundbegriffe

|Kopfleiste:|

Zeile: h

Zinsanteil: Z\_h

Tilgungsanteil: T\_h

Annuität: A\_h

Restschuld: K\_h

Für einen Tilgungsplan mit nachschüssiger Tilgung und dekursiver Verzinsung gilt allgemein:

* Die Zeilennummer h bezieht sich auf das Ende der h-ten Zahlungsperiode.
* Die Restschuld K\_h sowie die Größen Z\_h, T\_h und \_Ah sind am Ende der h-ten Zahlungsperiode fällig.

----------

|Formeln zur Berechnung von Tilgungsplänen|

Zur Berechnung der Werte jeder Zeile eines Tilgungsplanes bei nachschüssiger Tilgung und dekursiver Verzinsung gelten allgemein folgende Formeln:

Z\_h =K\_(h -1) \*i

T\_h =A\_h -Z\_h

K\_h =K\_(h -1) -T\_h für 1 <=h <=n

-----

Letzte Zeile:

T\_n =K\_(n -1)

K\_n =0

----------

##-Beispiel 4.2: Schuldtilgung

Frau Summer hat in den letzten 6 Semestern eine Schuld in Semesterraten bei gleichbleibendem Zinssatz i\_2 laut folgendem Tilgungsplan zurückbezahlt.

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

0 | - | - | - | 10000,00

1 | 300,00 | 1700,00 | 2000,00 | 8300,00

2 | 249,00 | -249,00 | 0,00 | 8549,00

3 | 256,47 | 1743,53 | 2000,00 | 6805,47

4 | 204,16 | 2795,84 | 3000,00 | 4009,63

5 | 120,29 | 1879,71 | 2000,00 | 2129,92

6 | 63,90 | 2129,92 | 2193,82 | 0,00

a) Lesen Sie aus dem Tilgungsplan die Höhe der ursprünglichen Schuld von Frau Summer ab.

b) Stellen Sie den Zahlungsstrom der Rückzahlungen auf einer Zeitachse dar.

c) Berechnen Sie den zugrunde liegenden Zinssatz.

d) Interpretieren Sie die Beträge für das 2. Semester.

e) Argumentieren Sie, ob die letzte Zeile des Tilgungsplans unverändert bleiben würde, wenn Frau Summer im 2. Semester € 2.000,00 zurückbezahlt hätte, dafür aber im 5. Semester keine Zahlung geleistet hätte.

Lösung:

a) Die ursprüngliche Schuld ist der Betrag K\_0, also € 10.000,00.

b) {{Grafik: Nicht darstellbar.}}

c) Es gilt: Z\_i =K\_(i -1) \*i\_2 und damit zum Beispiel

i\_2 =(Z\_1)/(K\_0) =(300)/(10000) =0,03

i\_2 =3 %

j-136 - Schuldtilgung

##-Beispiel 4.2: Schuldtilgung (Fortsetzung)

d) Frau Summer zahlt im 2. Semester keine Annuität.

Es fallen Zinsen in der Höhe von € 249,00 an.

Dadurch ergibt sich ein |negativer| Tilgungsanteil von € 249,00.

T\_2 =A\_2 -Z\_2 =0 -249 =-249

Die Restschuld erhöht sich um € 249,00 auf € 8.549,00.

e) Die letzte Zeile würde sich ändern, da durch die Zahlung im 2. Semester die Restschuld K\_2 vermindert wird und in weiterer Folge die halbjährlichen Zinsanteile geringer, die Tilgungsanteile höher und dadurch die verbleibende Restschuld jeweils geringer werden. Die im 6. Semester zu bezahlenden Zinsen wären dadurch geringer als im gegebenen Tilgungsplan.

----------

### \*\*-4.2 Annuitätenschuld

Eine vor allem für die Schaffung von Wohnraum häufig angewandte Form der Schuldtilgung ist die Annuitätenschuld. Dabei wird während der gesamten Kreditlaufzeit eine gleich hohe, jährliche Annuität bezahlt.

-----

Hinweis: In der Praxis erfolgen die Zahlungen zur Tilgung einer Annuitätenschuld meist monatlich, die Zinsabrechnung quartalsmäßig.

----------

#### \*\*-4.2.1 Tilgungsplan einer Annuitätenschuld ohne Rest

Bei einer Annuitätenschuld ohne Rest bezahlt der Schuldner während der gesamten Laufzeit gleich hohe, nachschüssige Annuitäten. Diese Form der Kreditrückzahlung entspricht einer nachschüssigen Rente.

Die Berechnung der Annuitätenhöhe kann mithilfe des GTR, mithilfe der Excelfunktion RMZ oder mit der Barwertformel für nachschüssige Renten erfolgen.

-----

Es ist vorteilhaft, die Annuität auf mehr als zwei Nachkommastellen zu berechnen und auch den gesamten Tilgungsplan mit einer Genauigkeit von mehr als zwei Nachkommastellen zu rechnen.

Angeschrieben werden die Beträge im Tilgungsplan allerdings kaufmännisch auf zwei Nachkommastellen gerundet.

----------

|Jährliche Annuitätenschuld ohne Rest|

Bei der |Annuitätenschuld ohne Rest| bezahlt der Schuldner in jedem der n Jahre die gleich hohe Annuität A =K\_0 \*(q^n \*(q -1))/(q^n -1)

----------

Barwert einer nachschüssigen Jahresrente:

B\_(nach) =R \*(q^n -1)/(q -1) \*1/(q^n)

K\_0 =A \*(q^n -1)/(q -1) \*1/(q^n)

A =K\_0 \*(q^n \*(q -1))/(q^n -1)

----------

##-Beispiel 4.3: Tilgungsplan einer jährlichen Annuitätenschuld ohne Rest

Eine Schuld von € 100.000,00 ist in 4 Jahren als jährliche Annuitätenschuld ohne Rest zu tilgen. i =5 %

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

b) Berechnen Sie die Höhe der Annuität.

c) Erstellen Sie den Tilgungsplan.

d) Untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen den Tilgungsanteilen.

Lösung:

b) A =K\_0 \*(q^4 \*(q -1))/(q^4 -1) =100000 \*(1,05^4 \*0,05)/(1,05^4 -1) =28201,18329

Die Annuität beträgt € 28.201,18.

j-137 - Annuitätenschuld

c) Tilgungsplan in Excel:

Annuitätenschuld ohne Rest

Kredithöhe K\_0: € 100.000,00

Zinssatz i: 5 %

Tilgungsdauer n: 4

Annuität A: € 28.201,18

{{Abkürzungen für die folgende Tabelle:

h - Zeile

Z\_h - Zinsanteil

T\_h - Tilgungsanteil

A\_h - Annuität

K\_n - Restschuld}}

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_n

0 | - | - | - | 100.000,00

1 | 5.000,00 | 23.201,18 | 28.201,18 | 76.798,82

2 | 3.839,94 | 24.361,24 | 28.201,18 | 52.437,57

3 | 2.621,88 | 25.579,30 | 28.201,18 | 26.858,27

4 | 1.342,91 | 26.858,27 | 28.201,18 | 0,00

'Si | 12.804,73 | 100.000,00 | 112.804,73 | -

-----

Z\_h =K\_(h -1) \*i

T\_h =A\_h -Z\_h

K\_h =K\_(h -1) -T\_h für 1 <=h <=n

-----

Letzte Zeile:

T\_n =K\_(n -1)

K\_n =0

----------

Annuitätenschuld ohne Rest

Kredithöhe K\_0: 100000

Zinssatz i: 0,05

Tilgungsdauer n: 4

Annuität A: =RMZ(B4;B5;-B3)

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_n

0 | - | - | - | =B3

1 | =E9\*$B$4 | =D10-B10 | =$S$6 =E9-C10

2 | =E10\*$B$4 | =D11-B11 | =$B$6 =E10-C11

3 | =E11\*$B$4 | =D12-B12 | =$B$G =E11-C12

4 | =E12\*$B$4 | =D13-B13 | =$B$6 =E12-C13

'Si | =SUMME(B10:B13) | =SUMME(C10:C13) | SUMME(D10:D13) | -

d) Bildet man den Quotienten aufeinanderfolgender Tilgungsanteile, ergibt sich ein interessanter Zusammenhang:

(T\_2)/(T\_1) =(24361,24)/(23201,18) ~~1,05 <=> T\_2 ~~T\_1 \*1,05

Analoges gilt auch für die anderen Zeilen des Tilgungsplanes:

(T\_3)/(T\_2) =1,05 <=> T\_3 =T\_2 \*1,05 und (T\_4)/(T\_3) =1,05 <=> T\_4 =T\_3 \*1,05

----------

Allgemein gelten bei einer Annuitätenschuld ohne Rest folgende |Zusammenhänge|:

Da in jeder Zeile, also auch in der ersten, die Summe von Zinsanteil und Tilgungsanteil gleich der Annuität ist, folgt für die erste Tilgung:

T\_1 =A -K\_0 \*i

K\_0 \*i +T\_1 =A und (K\_0 -T\_1) \*i +T\_2 =A

K\_0 \*i +T\_1 =(K\_0 -T\_1) \*i +T\_2 |-K\_0 \*i

T\_1 =-T\_1 \*i +T\_2

T\_2 =T\_1 \*(1 +i)

T\_2 =T\_1 \*q

In gleicher Weise erhält man:

T\_3 =T\_2 \*q =T\_1 \*q^2

T\_h =T\_h -1 \*q =T\_1 \*q^(h -1) 1 <=h <=n

Die |Tilgungsanteile| lauten der Reihe nach:

T\_1, T\_1 \*q, T\_1 \*q^2, T\_1 \*q^3, ..., T\_1 \*q^(n -1)

j-138 - Schuldtilgung

Die |Schuldreste| lauten der Reihe nach:

K\_1 =K\_0 -T\_1

K\_2 =K\_0 -T\_1 -T\_2

K\_3 =K\_0 -T\_1 -T\_2 -T\_3

...

K\_h =K\_0 -T\_1 -T\_2 -... -T\_h

=K\_0 -T\_1 \*(1 +q +... +q^(h -1))

K\_h =K\_0 -T\_1 \*(q^h -1)/(q -1)

-----

Die Restschuld K\_h entspricht dem Future Value FV und kann daher auch mit dem TVM-Solver des GTR oder mit der Excel-Funktion ZW berechnet werden

-----

Restschuld am Ende der h-ten

Zahlungsperiode:

K\_h =K\_0 -T\_1 \*(q^h -1)/(q -1)

----------

##-Beispiel 4.4: Berechnung einzelner Zeilen eines Tilgungsplans

Eine Schuld von € 100.000,00 ist in 20 Jahren als jährliche Annuitätenschuld ohne Rest zu tilgen, i =5 %

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar

b) Ermitteln Sie die nullte, die erste, die zweite, die 13. und die letzte Zeile des Tilgungsplanes

Lösung:

b) Berechnung der Annuität:

A =K\_0 \*(q^(20) \*(q -1))/(q^(20) -1) =100000 \*(1,05^(20) \*0,05)/(1,05^(20) -1) =8024,25872

Daraus werden analog zum vorigen Beispiel die erste und die zweite Zeile berechnet.

Die Grundlage für die Berechnung der 13. Zeile ist K\_(12), da bei dekursiver Verzinsung die Zinsen von der Restschuld der Vorzeile genommen werden.

K\_(12) =K\_0 -T\_1 \*(q^(12) -1)/(q -1) =100000 -3024,25872 \*(1,05^(12) -1)/(0,05) =51862,49

Daraus wird die 13. Zeile berechnet.

Für die Berechnung der letzten Zeile benötigen Sie K\_(19) =7642,15.

T\_(20) =K\_(19) =7642,15

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

0 | - | - | - | 100000,00

1 | 500,00 | 3024,26 | 8024,26 | 96975,74

2 | 4848,79 | 3175,47 | 8024,26 | 93800,27

... | ... | ... | ... | ...

12 | ... | ... | ... | 51862,49

13 | 2593,12 | 543 1,13 | 8024,26 | 46431,36

... | ... | ... | ... | ...

19 | ... | ... | ... 7642,15

20 | 382, 11 | 7642, 15 | 8024,26 | 0,00

j-139 - Annuitätenschuld

##-Beispiel 4.5: Rekonstruktion der Anfangswerte eines Tilgungsplanes

Von einem Tilgungsplan einer jährliche Annuitätenschuld ist die 6. Zeile bekannt.

h: 6

Z\_h: 962,90

T\_h: 1725,73

A\_h: 2688,63

K\_h: 30370,94

Berechnen Sie

a) die Höhe des Zinssatzes i sowie

b) die Anfangsschuld K\_0

(1) ohne Technologie und

(2) mit Technologie.

Lösung:

a) Mithilfe des Tilgungsanteils T\_6 und der Restschuld K\_6 kann die Restschuld K\_5 berechnet werden:

K\_5 =K\_6 +T\_6 =30370,94 +1725,73 =32096,67

Es gilt: Z\_6 =K\_5 \*i und damit i =(Z\_6)/(K\_5) ~~0,03 =3 %

-----

b) (1) Die Restschuld K\_6 ist gleich der Differenz zwischen dem Endwert einer Rente

mit der Rate € 2.688,63 und der um 6 Jahre aufgezinsten Anfangsschuld K\_0.

K\_6 =K\_0 \*q^6 -A \*(q^6 1)/(q -1)

K\_0 =(K\_6 +A \*(q^6 -1)/(q -i)) \*1/(q^6)

K\_0 =(30370,94 +2688,63 \*(1,03^6 -1)/(0,03)) ~~40000

Die Anfangsschuld beträgt € 40.000,00.

(2) Die Anfangsschuld kann mit Technologie als Barwert berechnet werden.

----------

##-Beispiel 4.6: Aufteilung der Annuitäten auf Zinsanteile und Tilgungsanteile

Die Grafik zeigt die Aufteilung der Annuitäten einer Annuitätenschuld ohne Rest auf die zu bezahlenden Zins- und Tilgungsanteile.

Interpretieren Sie die Höhe der Gesamtsäulen, der blauen und der roten Anteile im Sachzusammenhang.

Lösung:

Die Höhe der Gesamtsäulen entspricht den zu bezahlenden Annuitäten.

Der rote Teil der Säulen stellt die zu bezahlenden Zinsen und der blaue Teil stellt die jeweiligen Tilgungsanteile dar.

Da die Zinsen eines Jahres immer von der Restschuld des Vorjahres berechnet werden und die Restschuld von Jahr zu Jahr sinkt, nimmt auch der Zinsanteil mit jedem Jahr ab. Gleichzeitig steigt der Tilgungsanteil.

j-140 - Schuldtilgung

#### \*\*-4.2.2 Tilgungsplan einer Annuitätenschuld mit Rest

|Annuitätenschuld mit Rest|

Bei der Annuitätenschuld mit Rest bezahlt der Schuldner N Zahlungsperioden |gleich hohe Annuitäten A| und in der letzten Periode N +1 eine Schlusszahlung A\_(N +1), die kleiner ist als die zuvor entrichteten Annuitäten.

----------

Die Annuität A ist meist ein runder Betrag, der einem gegebenen Prozentsatz des Schuldkapitals K\_0 entspricht. Die Schlusszahlung entspricht dem Rentenrest, den Sie aus der Rentenrechnung kennen.

Sind das Schuldkapital K\_0, die jährliche Annuität A und der Zinssatz i gegeben, so erhält

man aus K\_0 =A \*(q^n -1)/(q -1) \*1/(q^n) einen Wert für n, der allerdings im Allgemeinen keine ganze Anzahl von Jahren ist.

N ist die nächst kleinere ganze Zahl der errechneten Dauer n.

N ist die Anzahl der vollen Annuitäten A.

Zum Termin N +1 ist die Schlusszahlung A\_(N +1) (der Rentenrest) fällig.

Für die ersten N Zeilen des Tilgungsplanes gelten dieselben Formeln wie für die Annuitätenschuld ohne Rest.

-----

N Anzahl der vollen Annuitäten A

A\_(N +1) Schlusszahlung

A\_(N +1) <A

-----

Für die letzten beiden Zeilen gilt:

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

N | ... | ... | A | K\_N

N +1 | K\_N \*i | K\_N | K\_N \*(1 +i) | 0

-----

A\_(N +1) =KN \*0 +i)

##-Beispiel 4.7: Annuitätenschuld mit Rest

Eine Schuld von € 50.000,00 ist als Annuitätenschuld mit jährlichen Annuitäten von € 8.000,00 zu tilgen. i =9 %

Erstellen Sie einen Tilgungsplan.

Annuitätenschuld mit Rest

Kredithöhe K\_0: € 50.000,00

Zinssatz i: 9 %

Annuität A: € 8.000,00

Tilgungsdauern: 9,59

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

0 | - | - | - | 50.000,00

1 | 4.500,00 | 3.500,00 | 8.000,00 | 46.500,00

2 | 4.185,00 | 3.815,00 | 8.000,00 | 42.685,00

3 | 3.841,65 | 4.158,35 | 8.000,00 | 38.526,65

4 | 3.467,40 | 4.532,60 | 8.000,00 | 33.994,05

5 | 3.059,46 | 4.940,54 | 8.000,00 | 29.053,51

6 | 2.614,82 | 5.385,18 | 8.000,00 | 23.668,33

7 | 2.130,15 | 5.869,85 | 8.000,00 | 17.798,48

8 | 1.601,86 | 6.398,14 | 8.000,00 | 11.400,34

9 | 1.026,03 | 6.973,97 | 8.000,00 | 4.426,;

10 | 398,37 | 4.426,37 | 4.824,75 | 0,00

Rentenrest nach 10 Jahren:

A\_(10) =4426,37 \*1,09

A\_(10) =4824,75

j-141 - Annuitätenschuld

#### \*\*-4.2.3 Konversion einer Schuld

|Definition: Konversion einer Schuld|

Die |Konversion (Konvertierung) einer Schuld| ist die Änderung der Tilgungsbedingungen während der Laufzeit des Tilgungsplanes.

Der Tilgungsplan wird zunächst nach den ursprünglich vereinbarten Bedingungen aufgestellt.

Durch die Konversion wird der Tilgungsplan unterbrochen und es gilt folgende

|Konversionsregel|

Der letzte Schuldrest des alten Tilgungsplanes ist das neue Schuldkapital für den neuen Tilgungsplan.

-----

convertere: lateinisch für umwandeln

----------

##-Beispiel 4.8: Schuldtilgung mit Konversion

Der gegebene Tilgungsplan beschreibt die Tilgung einer jährlichen Annuitätenschuld:

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

0 | - | - | - | 50.000,00

1 | 1.500,00 | 4.500,00 | 6.000,00 | 45.500,00

2 | 1.365,00 | 4.635,00 | 6.000,00 | 40.865,00

3 | 1.225,95 | 6.774,05 | 8.000,00 | 34.090,95

4 | 1.022,73 | 4.977,27 | 6.000,00 | 29.113,68

5 | 873,41 | -873,41 | 0,00 | 29.987,09

6 | 899,61 | 5.700,39 | 6.600,00 | 24.286,70

7 | 728,60 | 5.871,40 | 6.600,00 | 18.415,30

8 | 828,69 | 5.771,31 | 6.600,00 | 12.643,99

9 | 568,98 | 6.031,02 | 6.600,00 | 6.612,97

10 | 297,58 | 6.302,42 | 6.600,00 | 310,55

11 | - | - | - | -

a) Beschreiben Sie den Zahlungsverlauf in Worten.

Berücksichtigen Sie dabei insbesondere die Vorgänge, die zur 3., 5., 6. und 8. Zeile geführt haben.

b) Berechnen Sie die letzte Zeile des Tilgungsplanes, sodass die Schuld vollständig beglichen ist.

Lösung:

a) Eine Schuld in Höhe von € 50.000,00 soll durch Annuitäten der Höhe € 6.000,00 beglichen werden.

Im 3. Jahr erfolgt eine Sonderzahlung in Höhe von € 2.000,00.

Im 5. Jahr wird nichts zurückbezahlt und dafür die Annuität ab dem 6. Jahr auf € 6.600,00 erhöht.

Im 8. Jahr wird der Zinssatz erhöht. (Bei gleichbleibendem Zinssatz müssten die Zinsen im 8. Jahr geringer als jene des 7. Jahres sein).

b) Der Zinssatz kann aus der Restschuld K\_9 und den zu bezahlenden Zinsen Z\_(10) bestimmt werden:

Z\_(10) =K\_9 \*i, also i =(Z\_(10))/(K\_9) ~~0,045

11

13,95 (=310,55 \*0,045)

310,55 (=K\_(10))

324,50 (=Z\_(11) +K\_(10))

0

j-142 - Schuldtilgung

##### \*\*-Übungsaufgaben

##-4.001 Ein Darlehen von € 100.000,00 soll nach acht Jahren bei i =6 % beglichen sein.

a) Berechnen Sie, welche Einmalzahlung am Ende der acht Jahre zu entrichten ist.

**[]**

b) Das Darlehen wird durch eine Reihe von Zahlungen getilgt, die auf der Zeitachse dargestellt sind.

Erstellen Sie einen dazu passenden Tilgungsplan.

**[]**

c) Der Schuldner möchte das Darlehen durch acht jährlich nachschüssige Annuitäten von € 12.500,00 tilgen. Argumentieren Sie, ob dadurch das Darlehen tatsächlich vollständig beglichen wird.

**[]**

----------

##-4.002 Der Tilgungsplan zeigt die Rückzahlung eines Darlehens bei gleichbleibendem Zinssatz i.

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

0 | - | - | - | 100.000,00

1 | 4.500,00 | 15.500,00 | 20.000,00 | 84.500,00

2 | 3.802,50 | 11.197,50 | 15.000,00 | 73.302,50

3 | 3.298,61 | -3.298,61 | 0,00 | 76.601,11

4 | 3.447,05 | 16.552,95 | 20.000,00 | 60.048,16

5 | 2.702,17 | 17.297,83 | 20.000,00 | 42.750,33

6 | 1.923,76 | -1.923,76 | 0,00 | 44.674,09

7 | 2.010,33 | 22.989,67 | 25.000,00 | 21.684,43

8 | - | - | - | -

a) Lesen Sie ab, wie hoch die ursprüngliche Schuld war und welche Annuitäten bezahlt wurden.

**[]**

b) Berechnen Sie den Zinssatz i und die Höhe der letzten Annuität, sodass das Darlehen am Ende des achten Jahres vollständig getilgt ist.

**[]**

c) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

**[]**

----------

##-4.003 Zur Gründung eines Betriebes wird ein Kredit in der Höhe von € 100.000,00 aufgenommen.

Der Kredit soll in 5 Jahren bei i =9 % getilgt werden.

Die nachschüssigen Annuitäten betragen:

A\_1 =€ 30.000,00;

A\_2 =€ 20.000,00;

A\_3 =€ 0,00;

A\_4 =€ 50.000,00;

A\_5 =?

Erstellen Sie den Tilgungsplan.

**[]**

----------

##-4.004 Zur Gründung eines Betriebes wird ein Kredit in der Höhe von € 10.000,00 aufgenommen.

Der Kredit soll in 5 Jahren bei i =3 % getilgt werden.

Die nachschüssigen Annuitäten betragen:

A\_1 =€ 1.000,00;

A\_2 =€ 3.000,00;

A\_3 =€ 0,00;

A\_4 =€ 3.000,00;

A\_5 =?

Erstellen Sie den Tilgungsplan.

**[]**

----------

##-4.005 Eine Schuld von € 200.000,00 soll durch sieben gleich große, nachschüssig zahlbare jährliche Annuitäten getilgt werden.

a) Erstellen Sie den zugehörigen Tilgungsplan bei i =9 %.

**[]**

b) Erklären Sie, wie sich die Annuitäten verändern würden, wenn der Zinssatz i kleiner als 9 % wäre.

**[]**

j-143 - Übungsaufgaben

##-4.006 Eine Schuld von € 100.000,00 soll durch 37 gleich große, nachschüssig zahlbare halbjährliche Annuitäten zurückgezahlt werden.

Es sind die 1., 2., 15. und die letzte Zeile des Tilgungsplanes zu berechnen. i\_2 =2 %

**[]**

----------

4.007 Ein Darlehen von € 100.000,00 soll bei i =7 % in sechs Jahren getilgt werden. Die nachschüssigen jährlichen Annuitäten betragen für die ersten fünf Jahre je 15 % des Kapitals.

Stellen Sie den ganzen Tilgungsplan auf und überprüfen Sie ihn.

**[]**

----------

##-4.008 Frau Niggler hat sich bei einem Bekannten € 25.000,00 zu i =2,5 % geliehen. Sie möchte ihre Schulden durch jährlich nachschüssige Annuitäten in Höhe von € 625,00 begleichen.

a) Erstellen Sie die ersten 2 Zeilen des zugehörigen Tilgungsplans.

**[]**

b) Erklären Sie, warum Frau Niggler mit dieser Vereinbarung ihre Schulden nicht begleichen kann.

**[]**

c) Berechnen Sie, welcher Zinssatz i für die Laufzeit des Kredits vereinbart werden müsste, damit Frau Niggler die Schuld in 50 Jahren beglichen hätte.

**[]**

----------

4.009 Vom Tilgungsplan einer nachschüssigen Annuitätenschuld mit dekursiver Verzinsung ist eine Zeile gegeben.

Ergänzen Sie die fehlenden Werte.

Berechnen Sie jeweils den Darlehensbetrag K\_0, den Zinssatz i und die Tilgungsdauer n.

- | h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

a) | 20 | 20264,77 | 37565,33 | 57830,10 | 469 053,91

b) | 4 16 946,72 207 680,39 215 987,63

c) | 10 18 859,34 89 941,10 400 401,80

d) | 9 11 398,94 12 329,09 11 854,93

----------

##-4.010 Die folgenden Kapitalien sind durch nachschüssige Annuitäten zurückzuzahlen:

a) K\_0 =€ 10.000,00; monatliche Annuität A =€ 400,00; i\_(12) =0,25 % Berechnen Sie Z\_8 und den letzten Tilgungsanteil.

**[]**

b) K\_0 =€ 100.000,00; jährliche Annuität A =€ 15.000,00; i =4 % Berechnen Sie K\_3 und die Schlussannuität.

**[]**

c) K\_0 =€ 1.000.000,00; jährliche Annuität A =€ 100.000,00; i =4,5 % Berechnen Sie die letzte Tilgung.

**[]**

----------

##-4.011 Ein Darlehen soll durch gleich hohe, nachschüssige jährliche Annuitäten getilgt werden.

Die drei Diagramme zeigen jeweils die Aufteilung der bezahlten Annuitäten auf die Tilgungsanteile und die zu bezahlenden Zinsanteile.

{{Grafik: Nicht darstellbar.}}

j-144 - Schuldtilgung

a) Begründen Sie, welches Diagramm eine Annuitätenschuld beschreibt.

**[]**

b) Erklären Sie, warum das Darlehen durch die Zahlungen, die den beiden anderen Diagrammen zu Grunde liegen, jeweils nicht getilgt wird.

**[]**

----------

##-4.012 Von einem Tilgungsplan einer nachschüssigen Annuitätenschuld (mit Rest) mit dekursiver Verzinsung ist eine Zeile gegeben.

Berechnen Sie den Darlehensbetrag K\_0, den Zinssatz i und die Tilgungsdauer n.

h: 14

Z\_h: 17525,46

T\_h: 32474,54

A\_h: 50000,00

K\_h: 233 062,73

Die 0., 1. und letzte Zeile des Tilgungsplanes sind anzugeben.

----------

##-4.013 Vom Tilgungsplan einer nachschüssigen Annuitätenschuld mit nachschüssiger Verzinsung ist die folgende Zeile bekannt.

Berechnen Sie das Schuldkapital, den Zinssatz und die Anzahl der vollen Annuitäten.

- | h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

a) | 6 | 1616,82 | 13383,18 | 15000,00 | 27037,28

b) | 3 | 457,28 | 4542,72 | 5000,00 | 6889,28

----------

##-4.014 Der Tilgungsplan beschreibt den tatsächlichen Rückzahlungsverlauf einer Annuitätenschuld mit Konvertierung.

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

0 | - | - | - | 25.000,00

1 | 500,00 | 2.000,00 | 2.500,00 | 23.000,00

2 | 460,00 | 2.040,00 | 2.500,00 | 20.960,00

3 | 419,20 | 2.080,00 | 2.500,00 | 18.879,20

4 | 377,58 | 4.622,42 | 5.000,00 | 14.256,78

5 | 285,14 | 2.214,86 | 2.500,00 | 12.041,92

6 | 240,84 | -240,84 | **[]** | 12.282,76

7 | 245,66 | 3.254,34 | 3.500,00 | 9.028,41

8 | 270,85 | 3.229,15 | 3.500,00 | 5.799,27

9 1 73,98 | 3.326,02 | 3.500,00 | 2.473,24

10 | 74,20 | **[]** | **[]** | **[]**

j-145 - Übungsaufgaben

a) Beschreiben Sie in Worten den Verlauf der Rückzahlung, soweit dieser aus dem Tilgungsplan ersichtlich ist.

Berücksichtigen Sie dabei insbesondere die Höhe der ursprünglichen Schuld und die Besonderheiten in der 4. und 6. Zeile.

Ergänzen Sie im Tilgungsplan die Annuität in Zeile 6.

**[]**

b) Erklären Sie, was im 8. Jahr der Rückzahlung passiert ist.

**[]**

c) Berechnen Sie die letzte Zeile des Tilgungsplans.

**[]**

d) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

**[]**

----------

##-4.015 Der Tilgungsplan beschreibt eine Annuitätenschuld mit Konvertierung.

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

0 | - | - | - | 30.000,00

1 | 450,00 | 2.350,00 | 2.800,00 | 27.650,00

2 | 414,75 | 2.385,25 | 2.800,00 | 25.264,75

3 | 378,97 | 2.421,03 | 2.800,00 | 22.843,72

4 | 342,66 | 342,66 | **[]** | 22.843,72

5 | 342,66 | 342,66 | **[]** | 22.843,72

6 | 342,66 | 4.657,34 | 5.000,00 | 18.186,38

7 | 272,80 | 3.027,20 | 3.300,00 | 15.159,17

8 | 227,39 | 3.072,61 | 3.300,00 | 12.086,56

9 | 181,30 | 3.118,70 | 3.300,00 | 8.967,86

10 | 134,52 | 3.165,48 | 3.300,00 | 5.802,38

11 | 87,04 | 3.212,96 | 3.300,00 | 2.589,41

12 | **[]** | **[]** | **[]** | **[]**

a) Beschreiben Sie in Worten den Verlauf der Rückzahlung, soweit dieser aus dem Tilgungsplan ersichtlich ist.

Berücksichtigen Sie dabei insbesondere die Höhe der ursprünglichen Schuld und die Besonderheiten in der 4. bis 6. Zeile.

Ergänzen Sie im Tilgungsplan T\_4 und T\_5.

**[]**

b) Berechnen Sie die letzte Zeile des Tilgungsplans.

**[]**

c) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

**[]**

d) Argumentieren Sie, wie sich der Tilgungsplan ändern würde, wenn man ab der 7. Zeile wieder die ursprüngliche Annuität in Höhe von € 2.800,00 bezahlen würde.

**[]**

j-146 - Schuldtilgung

##### \*\*-Ziele erreicht?

##-Z 4.1 Eine Schuld wurde in den letzten 5 Jahren in jährlichen Raten bei gleichbleibendem Zinssatz i laut folgendem Tilgungsplan zurückbezahlt.

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

0 | - | - | - | 10000,00

1 | 400,00 | 2100,00 | 2500,00 | 7900,00

2 | 316,00 | 2184,00 | 2500,00 | 5716,00

3 | 228,64 | -28,64 | 200,00 | 5744,64

4 | 229,79 | 4770,21 | 5000,00 | 974,43

5 | 38,98 | 974,43 | 1013,40 | 0,00

a) Lesen Sie aus dem Tilgungsplan die Höhe der ursprünglichen Schuld ab.

b) Stellen Sie den Zahlungsstrom der Rückzahlungen auf einer Zeitachse dar.

**[]**

c) Berechnen Sie den zugrunde liegenden Zinssatz.

**[]**

d) Interpretieren Sie die Beträge für das 3. Jahr.

**[]**

e) Erklären Sie, welche Annuität im 4. Jahr geleistet hätte werden müssen, damit die Schuld nach 4 Jahren vollständig getilgt geworden wäre.

**[]**

----------

##-Z 4.2 Von einem Tilgungsplan einer Annuitätenschuld ist die Zeile für das 4. Jahr bekannt.

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

4 | 386,38 | 1413,62 | 1800,00 | 9625,95

a) Berechnen Sie die Höhe des Zinssatzes i sowie die Anfangsschuld K\_0.

**[]**

b) Im 5. Jahr kann der Schuldner nichts bezahlen.

Erklären Sie, ob dieses Versäumnis durch eine Zahlung von € 3.600,00 im 6. Jahr vollständig ausgeglichen wird.

**[]**

c) Berechnen Sie die gesamte Tilgungsdauer, wenn bei gleichbleibender Annuität ab dem 5. Jahr i =2,8 % verrechnet wird.

**[]**

d) Die letzte Zeile des Tilgungsplans lautet:

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

- | 42,92 | 1532,88 | 1575,80 | 0,00

Interpretieren Sie die Beträge dieser Zeile.

j-147 - Investitionsrechnung

## \*\*-5 Investitionsrechnung

Eine Investition ist die Anlage finanzieller Mittel in (materiellen oder immateriellen) Objekten und Projekten, die versprechen, für den Investor längerfristig von Nutzen zu sein.

Investitionsvarianten unterscheiden sich oft in vielen Merkmalen. Aufgabe der Investitionsrechnung ist es, diese Merkmale verschiedener Investitionsmöglichkeiten zu jeweils einer einzigen Kennzahl (z. B. Kapitalwert) zu verarbeiten. Der Vergleich dieser |Kennzahlen| soll sinnvolle Aussagen auf die geeignetste (gewinnbringendste) Investition zulassen.

In diesem Kapitel werden Sie einige Verfahren der |dynamischen Investitions-rechnung| kennenlernen. Bei diesen Verfahren werden die unterschiedlichen Zeitpunkte der Zahlungen durch Anwendung der Zinseszinsrechnung berücksichtigt.

Bei den folgenden Überlegungen werden die Inflationsrate sowie Steuern und Gebühren vernachlässigt. Zukünftige Einnahmen und Ausgaben können nur geschätzt werden. Diese werden im Allgemeinen jährlich nachschüssig verrechnet. Die besprochenen Methoden sind als Entscheidungshilfe zu sehen.

-----

Eine Investition in Wissen bringt immer noch die besten Zinsen.

BENJAMIN FRANKLIN, 1706 BIS 1790, EINER DER GRÜNDERVÄTER DER VEREINIGTEN STAATEN

----------

##### \*\*-Meine Ziele

Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

* verschiedene Methoden der dynamischen Investitionsrechnung (Kapitalwertmethode, Annuitätenmethode, Methode des internen Zinssatzes und Methode des modifizierten internen Zinssatzes) beschreiben,
* mit diesen Methoden Investitionsanalysen durchführen und Investitionen bewerten.

----------

##### \*\*-Worum geht's hier?

Soll die Steuerberaterkanzlei Huber eine neue EDV-Anlage für die Kanzlei anschaffen?

Folgende Daten stehen ihr zur Verfügung:

Anschaffungskosten: A\_0 =20.000 Euro

Nutzungsdauer: n =3 Jahre

Liquidationserlös nach 3 Jahren: 10 % von A\_0, also 2.000 Euro

Erwartete Einnahmen: jährlich 9.000 Euro

Erwartete Ausgaben: im ersten Jahr 3.000 Euro (inkl. Einschulung), dann jährlich 1.000 Euro (Service, Wartung)

Zur Vereinfachung kann man annehmen, dass Einnahmen und Ausgaben jeweils am Ende des Jahres anfallen. Die Differenz von Einnahmen und Ausgaben ergeben die Rückflüsse bzw. den Cash Flow.

-----

Tabellarische Darstellung des Zahlungsstroms:

Jahr | Einnahmen | Ausgaben | Rückflüsse

1 | 9.000 | 3.000 | 6.000

2 | 9.000 | 1.000 | 8.000

3 | 11.000 | 1.000 | 10.000

Summe Rückflüsse: 24.000

Den Anschaffungskosten von 20.000 Euro steht die Summe der |nominellen| Rückflüsse von 24.000 Euro gegenüber.

Ist die Investition für die Kanzlei Huber rentabel?

nomen: lateinisch für "der Name"; "nominell" kann mit "dem Namen nach" übersetzt werden.

j-148 - Investitionsrechnung

Um die Zahlungen vergleichen zu können, zinst man die Rückflüsse auf den Zeitpunkt der Anschaffung ab.

Welchen Zinssatz soll die Kanzlei Huber für diese Berechnung wählen?

Muss die Kanzlei die Investition zum Beispiel durch einen |Kredit fremdfinanzieren|, wird sie den kalkulatorischen Zinssatz i\_k mindestens so hoch wie den effektiven Kreditzinssatz wählen, etwa i\_k =10 %.

-----

Hinweis: Die Summe der nominellen Rückflüsse ist mit den Anschaffungskosten nicht vergleichbar, da die Zahlungen zu verschiedenen Zeitpunkten erfolgen.

-----

Für 10 % erhält man folgenden Barwert PV (Present Value; Summe der abgezinsten Rückflüsse) für die zu beurteilende Investition:

{{Abkürzungen für die folgende Tabelle:

t - Jahr

E\_t - Einnahmen

A\_t - Ausgaben

R\_t =E\_t -A\_t - Rückflüsse

R\_t \*(1 +i\_k)^(-t) abgezinste Rückflüsse}}

t | E\_t | A\_t | R\_t =E\_t -A\_t | R\_t \*(1 +i\_k)^(-t)

1 | 9000 | 3000 | 6000 | 5454,55

2 | 9000 | 1000 | 8000 | 6611,57

3 | 11000 | 1000 | 10000 | 7513,15

Summe abgezinste Rückflüsse: 19579,27

-----

PV =(6000)/(1,1) +(8000)/(1,1^2) +(10000)/(1,1^3) =

=6000 \*1,1^(-1) +8000 \*1,1^(-2) +10000 \*1,1^(-3) =19579,27

Der Barwert beträgt ca. 19.579 Euro.

Nach Abzug der Anschaffungskosten von 20.000 Euro ergibt sich ein negativer Betrag von ca. 421 Euro.

Die Investition ist unter diesen Bedingungen nicht sinnvoll, da die Anschaffungskosten höher sind als die Summe der abgezinsten Rückflüsse.

Die Differenz von Barwert und Anschaffungskosten heißt Kapitalwert C\_0 (Nettobarwert NPV).

C\_0 =-20000 +(6000)/(1,1) +(8000)/(1,1^2) +(10000)/(1,1^3) =

=-20000 +6000 \*1,1^(-1) +8000 \*1,1^(-2) +10000 \*1,1^(-3) =-420,74 ~~-421 <0

----------

|Grundbegriffe der Investitionsrechnung|

A\_0 Anschaffungskosten, Kapitaleinsatz

n Nutzungsdauer in Jahren

A\_1, A\_2, ..., A\_n laufende jährliche Ausgaben

E\_1, E\_2, ..., E\_n laufende jährliche Einnahmen;

E\_n inklusive Liquidationserlös, Restwert

R\_t =E\_t -A\_t Rückfluss im Jahr t, Ertrag im Jahr t

----------

Wird eine Investition vollständig mit Eigenmitteln finanziert, sind die Anschaffungskosten gleich hoch wie der Kapitaleinsatz.

In den folgenden Aufgaben werden alle Investitionen vollständig mit Eigenmitteln finanziert.

----------

Hinweis: Jedes Investitionsprojekt lässt sich durch einen Einzahlungs- und einen Auszahlungsstrom kennzeichnen. Zur Vereinfachung der Berechnungen werden sämtliche Zahlungen als jährlich nachschüssig angenommen.

j-149 - Kapitalwertmethode

### \*\*-5.1 Kapitalwertmethode

Bei der Kapitalwertmethode werden die erwarteten Einnahmen und Ausgaben, die von der Investition verursacht werden, für die gesamte Nutzungsdauer erfasst und auf den Zeitpunkt der Anschaffung abgezinst.

-----

Hinweis: Die Kapitalwertmethode ist das wichtigste Verfahren der dynamischen Investitionsrechnung.

----------

|Definition: Kapitalwert C\_0|

Der |Kapitalwert C\_0| (auch Net Present Value NPV oder Goodwill) ist die Summe der auf den Zeitpunkt der Anschaffung abgezinsten Rückflüsse PV (Einnahmen minus Ausgaben) minus den Anschaffungskosten.

C\_0 =-A\_0 +'Si[t=1;n]((E\_t -A\_t)/((1 +i\_k)^t)) =

=-A\_0 +'Si[t=1;n](R\_t \*(1 +i\_k)^(-t))

----------

Grundsätzlich besteht immer die Möglichkeit, eine Investition durchzuführen (z. B. durch Aufnahme eines Kredits) oder vorhandenes Kapital |alternativ| zu veranlagen (Hintergrundalternative).

Der meist vorgegebene Kalkulationszinssatz i\_k orientiert sich

* bei |Fremdfinanzierung| an dem zu zahlenden (oder zu vermeidenden) Kreditzinssatz,
* bei |Eigenfinanzierung| am Zinssatz einer |alternativen| Anlageform (Hintergrundalternative), die der Investor wählen würde, wenn er sich gegen die gegebene Investition entscheidet.

Zusätzlich enthält der Kalkulationszinssatz i\_k einen Risikoaufschlag.

Man nimmt weiters an, dass alle Rückflüsse R\_t mit dem Zinssatz i\_k verzinst werden.

-----

Hinweis: Alle Rückflüsse R\_t werden mit dem Kalkulationszinssatz i\_k verzinst.

----------

|Investitionsentscheidung|

Ist die Summe der abgezinsten Rückflüsse größer als die Anschaffungskosten, dann ist der |Kapitalwert| C\_0 positiv und die |Investition| wird als |vorteilhaft| beurteilt.

-----

Investieren, wenn C\_0 >0

----------

##-Beispiel 5.1: Fortsetzung des Einführungsbeispiels

Die Inhaberin der Kanzlei Huber verfügt über genügend Eigenkapital für die Anschaffung der EDV-Anlage.

a) Alternativ zur Investition kann sie ihr Geld am Kapitalmarkt mit 6 % Verzinsung anlegen.

Berechnen Sie den Kapitalwert der Anlage bei einem Kalkulationszinssatz von 6 % und beurteilen Sie die Sinnhaftigkeit der Investition anhand dieses Kapitalwerts.

b) Stellen Sie den Kapitalwert der Anlage in Abhängigkeit vom zugrunde gelegten kalkulatorischen Zinssatz i\_k grafisch dar und interpretieren Sie den Kurvenverlauf im Sachzusammenhang.

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Kapitalwertkurve, wenn die Anschaffungskosten der Anlage um 500 Euro höher als ursprünglich geplant sind.

Lösung:

a) C\_0 =-20000 +(6000)/(1,06) +(8000)/(1,06^2) +(10000)/(1,06^3) =

=-20000 +6000 \*1,06^(-1) +8000 \*1,06^(-2) +10000 \*1,06^(-3) =1176,54 >0

Bei einem Kalkulationszins von 6 % beträgt der Kapitalwert ca. 1.177 Euro.

Da der Kapitalwert größer als null ist, ist die Investition als sinnvoll zu beurteilen.

Zusammenfassung:

i\_k =10 % C\_0 ~~-421 <0 Investition nicht sinnvoll

i\_k =6 % C\_0 ~~1177 >0 Investition sinnvoll

----------

Hinweis:

Die Entscheidung für oder gegen eine Investition hängt wesentlich vom Zinssatz ab, mit dem gerechnet wird.

Niedrige Zinssätze fördern Investitionen, hohe Zinssätze behindern Investitionen.

j-150 - Investitionsrechnung

b) Der Kapitalwert kann als Funktion des Zinssatzes i\_k betrachtet werden:

C\_0(i\_k) =-20000 +(6000)/(1 +i\_k) +(8000)/((1 +i\_k)^2) +(10000)/((1 +i^k)^3)

C\_0(i\_k) =-20000 +6000 \*(1 +i\_k)^(-1) +8000 \*(1 +i\_k)^(-2) +10000 \*(1 +i\_k)^(-3)

-----

Zinssatz | Kapitalwert in €

0 % | 4.000

2 % | 2.995

4 % | 2.056

6 % | 1.177

8 % | 353

10 % | -421

12 % | -1.148

Nullstelle zwischen 8 % und 10 %

Der Kapitalwert ist für i\_k <ca. 9 % positiv, eine Investition also sinnvoll.

Je größer der kalkulatorische Zinssatz ist, umso geringer ist der sich ergebende Kapitalwert.

-----

c) Die Erhöhung der Anschaffungskosten um 500 Euro verringert den Kapitalwert der Anlage um genau diesen Betrag (unabhängig vom gewählten kalkulatorischen Zinssatz). Die Kapitalwertkurve verschiebt sich parallel um 500 Euro nach unten.

{{Grafik: Nicht darstellbar.}}

-----

Die Nullstelle der Kapitalwertkurve wird in Beispiel 5.3 bei der Methode des internen Zinssatzes zur Investitionsentscheidung berechnet.

----------

##-Beispiel 5.2: Kapitalwert einer Maschine

Eine Tischlerei erwägt den Kauf einer neuen Maschine.

Der Anschaffungspreis beträgt 45.000 Euro. Es werden jährlich Rückflüsse in Höhe von 8.500 Euro erwartet. Die Nutzungsdauer beträgt 6 Jahre.

Der Liquidationserlös beträgt voraussichtlich 4.000 Euro.

a) Stellen Sie die Einnahmen und Ausgaben auf einer Zeitachse dar.

b) Beurteilen Sie die Sinnhaftigkeit des Maschinenkaufs durch Berechnung des Kapitalwerts. Kalkulationszinssatz 5 % p. a.

c) Argumentieren Sie, wie sich der Kapitalwert verändert, wenn die Maschine billiger gekauft werden kann.

d) Argumentieren Sie, wie sich der Kapitalwert verändert, wenn der Liquidationserlös entfällt.

e) Argumentieren Sie, wie sich der Kapitalwert verändert, wenn der Liquidationserlös entfällt und die Maschine dafür um den Liquidationserlös billiger gekauft werden kann.

j-151 - Kapitalwertmethode

Lösung:

b) Der Barwert der regelmäßigen Rückflüsse kann mithilfe der Rentenformel berechnet werden. Dazu kommt der abgezinste Liquidationserlös.

C =-45000 +8500 \*(1,06^6 -1)/(0,05) \*1/(1,05^6) +(4000)/(1,05^6) ~~-45000 +43143 +2985 =1128

Der Kapitalwert beträgt ca. 1.100 Euro >0.

Der Kauf der Maschine ist daher sinnvoll.

c) Der Anschaffungswert ist geringer. Daher erhöht sich der Kapitalwert.

d) Der Barwert der Rückflüsse verringert sich. Daher sinkt der Kapitalwert.

Der Entfall des Liquidationserlöses wirkt sich im Kapitalwert zwar negativ, aber aufgrund des späteren Zeitpunkts weniger als die Reduzierung des Kaufpreises aus. Der Kapitalwert nimmt daher gegenüber b) etwas zu.

----------

##-Beispiel 5.3: Kapitalwert zweier Maschinen

Ein Betrieb überlegt den Ankauf einer neuen Maschine.

Es stehen eine Maschine 1 und eine Maschine 2 mit gleicher Nutzungsdauer zur Auswahl. In der Grafik sind die Kapitalwertkurven C\_(0,1) von Maschine 1 und C\_(0,2) von Maschine 2 dargestellt.

a) Lesen Sie den Kapitalwert C\_(0,2) für die Maschine 2 bei i\_k =5 % ab.

b) Beurteilen Sie mithilfe der Grafik, bei welchem Kalkulationszinssatz i\_k die Maschine 1 die bessere Investition darstellt.

c) Lesen Sie ab, ab welchem Kalkulationszinssatz i\_k in keine der beiden Maschinen investiert werden sollte.

Lösung:

a) Der Kapitalwert C\_(0,2) bei 5 % Verzinsung beträgt ca. 1.200 Euro.

b) Die Kapitalwertkurven schneiden einander bei ca. 2,6 %.

Für i\_k <2,6 % ist der Kapitalwert C\_(0,1) der Maschine 1 höher.

Es sollte diese gekauft werden.

c) Ab einem Kalkulationszinssatz i\_k ~~5,8 % sind die Kapitalwerte beider Maschinen negativ. Es sollte keine der Maschinen gekauft werden.

----------

Die Kapitalwertmethode ist zum Vergleich von Investitionsalternativen mit unterschiedlicher Nutzungsdauer nur bedingt geeignet.

----------

j-152 - Investitionsrechnung

### \*\*-5.2 Annuitätenmethode

Bei der Annuitätenmethode wird der Kapitalwert C\_0 als Barwert einer nachschüssigen Rente von gleich hohen Annuitäten A (Jahresraten) aufgefasst.

----------

|Definition: Annuität|

Die |Annuität A| ist der auf die Nutzungsdauer umgerechnete Kapitalwert.

Der Kapitalwert C\_0 wird in eine nachschüssige Jahresrente mit der Rate A und n Jahren Laufzeit umgewandelt.

A =C\_0 \*((1 +i\_k)^n \*i\_k)/((1 +i\_k)^n -1)

----------

Die Annuität A wird aus der Barwertformel C\_0 =A \*((1 +i\_k)^n -1)/(i\_k) \*1/((1 +i\_k)^n) für nachschüssige Renten berechnet.

Für Investitionen mit gleicher Laufzeit führt die Annuitätenmethode stets zur selben Entscheidung wie die Kapitalwertmethode.

-----

Tipp:

Der Faktor ((1 +i\_k)^n \*i\_k)/((1 +i\_k)^n -1) wird als |Wiedergewinnungsfaktor| bezeichnet.

----------

##-Beispiel 5.4: Fortsetzung des Einführungsbeispiels

Treffen Sie mithilfe der Annuitätenmethode eine Investitionsentscheidung für den Kalkulationszins i\_k =6 %.

A =1177 \*(1,06^3 \*0,06)/(1,06^3 -1) ~~440 >0

Die Investition ist somit zu empfehlen.

Die Kapitalwertmethode liefert für i\_k =6 % dasselbe Ergebnis.

----------

|Investitionsentscheidung|

Eine |Investition| ist vorteilhaft, wenn die |Annuität| A positiv ist.

Vergleicht man |mehrere| Investitionsalternativen mit unterschiedlichen Laufzeiten, so ist jene Alternative mit der größten Annuität zu bevorzugen.

----------

### \*\*-5.3 Methode des internen Zinssatzes

##-Beispiel 5.5: Interner Zinssatz (Fortsetzung des Einführungsbeispiels)

Im Beispiel 5.1 wurde gezeigt, dass der Kauf der neuen EDV-Anlage für die Kanzlei Huber abhängig vom gewählten Kalkulationszinssatz i\_k unterschiedliche Kapitalwerte ergibt.

Aus der Kapitalwertkurve ist ersichtlich, dass sich für ca. i\_k <9 % ein positiver Kapitalwert ergibt.

Berechnen Sie jenen Zinssatz, für den der Kapitalwert gleich null ist.

Lösung:

Um die Nullstelle der Kapitalwertkurve zu ermitteln, muss die folgende Gleichung gelöst werden:

0 =-20000 +(6000)/(1 +i) +(8000)/((1 +i)^2) +(10000)/((1 +i)^3)

Mit Technologieunterstützung erhält man i ~~8,896 %.

i\_0 ~~8,896 %. Dieser berechnete Zinssatz heißt interner Zinssatz i\_0.

Ist der interne Zinssatz größer als der kalkulatorische Zinssatz (i\_0 ~~8,896 % >i\_k), ist die Investition sinnvoll.

j-153 - Methode des internen Zinssatzes

|Definition: Interner Zinssatz i\_0|

Der Zinssatz i\_0, für den der Kapitalwert gleich null ist, heißt interner Zinssatz (Internal Rate of Return IRR):

C\_0(i\_0) =0 <=> 0 =-A\_0 +'Si[t=1;n]((R\_t)/((1 +i\_0)^t))

----------

Der interne Zinssatz i\_0 gibt an, in welcher Höhe sich das in der Investition gebundene Kapital verzinst (Rentabilität, Effektivverzinsung des eingesetzten Kapitals).

Die Ertragskraft der Investition wird nach der Höhe des internen Zinssatzes beurteilt. i\_0 ist vom Kalkulationszinssatz i\_k unabhängig.

----------

|Investitionsentscheidung|

Eine |Investition| ist vorteilhaft, wenn i\_0 >i\_k ist. (IRR >i\_k)

Vergleicht man mehrere Investitionsalternativen, so ist jene Alternative mit dem größten internen Zinssatz zu bevorzugen.

-----

Investieren, wenn i\_0 >i\_k

----------

Hinweis: Der interne Zinssatz i\_0 ist nur dann eindeutig, wenn alle Rückflüsse R\_t positiv sind.

##-Beispiel 5.6: Vergleich zweier Investitionsobjekte

Ein Industriebetrieb überlegt den Kauf einer neuen Maschine.

Die Geschäftsleitung kann zwischen 2 Varianten mit jeweils vierjähriger Nutzungsdauer wählen.

Maschine I kostet 50.000 Euro und kann nach 4 Jahren um 5.000 Euro wieder verkauft werden.

Maschine II kostet 40.000 Euro und hat keinen Wiederverkaufswert.

Tabelle:

Jahr: 1

Rückflüsse in EUR Maschine I: 10.000

Rückflüsse in EUR Maschine II: 15.000

-----

Jahr: 2

Rückflüsse in EUR Maschine I: 12.000

Rückflüsse in EUR Maschine II: 12.000

-----

Jahr: 3

Rückflüsse in EUR Maschine I: 16.000

Rückflüsse in EUR Maschine II: 11.000

-----

Jahr: 4

Rückflüsse in EUR Maschine I: 19.000 +5.000

Rückflüsse in EUR Maschine II: 11.000

-----

a) Berechnen Sie für beide Varianten den internen Zinssatz i\_0 und entscheiden Sie, welche Maschine gekauft werden soll.

b) Erklären Sie, wie sich der interne Zinssatz der Maschinen ändert, wenn sie billiger als ursprünglich angenommen gekauft werden können.

c) Berechnen Sie, wie hoch die Anschaffungskosten für Maschine II sein müssten, damit sich für beide Maschinen derselbe interne Zinssatz ergibt.

Lösung:

a) Maschine I: 0 =-50000 +(10000)/(1 +i\_0) +(12000)/((1 +i\_0)^2) +(16000)/((1 +i\_0)^3) +(24000)/((1 +i\_0)^4)

Mit Technologie erhält man i\_0 ~~7,91 %.

Maschine II: 0 =-40000 +(15000)/(1 +i\_0) +(12000)/((1 +i\_0)^2) +(11000)/((1 +i\_0)^3) +(11000)/((1 +i\_0)^4)

Mit Technologie erhält man i\_0 ~~9,18 %.

Man sollte sich für Maschine II entscheiden.

b) Die Höhe der Anschaffungskosten entspricht der Summe der mit dem internen Zinssatz abgezinsten Rückflüsse.

Verringern sich die Anschaffungskosten, müssen die Rückflüsse stärker abgezinst werden, um in Summe auf den geringeren Kaufpreis zu führen.

Der interne Zinssatz nimmt zu.

j-154 - Investitionsrechnung

##-Beispiel 5.6: Vergleich zweier Investitionsobjekte (Fortsetzung)

c) Der interne Zinssatz von Maschine I ist i\_0 =7,91 %.

Es sind somit die Rückflüsse des Zahlungsstromes der Maschine II mit diesem Zinssatz 7,91 % abzuzinsen.

Aus der Äquivalenzgleichung werden dann die neuen Anschaffungskosten berechnet. Für Maschine II gilt:

0 =-A +(15000)/(1,0791) +(12000)/(1,0791^2) +(11000)/(1,0791^3) +(11000)/(1,0791^4) =-A +41072,06

Die Anschaffungskosten könnten um ca. 1.072 Euro höher sein.

----------

### \*\*-5.4 Methode des modifizierten internen Zinssatzes

In der Methode des internen Zinssatzes werden die freiwerdenden Rückflüsse mit dem internen Zinssatz wiederverlangt. Häufig liegt der interne Zinssatz aber deutlich über dem Marktzinssatz, sodass die Rückflüsse auf dem Kapitalmarkt nicht zu diesem Zinssatz wiederveranlagt werden können.

Man führt deshalb einen |Wiederveranlagungszinsssatz (Reinvestitionszinssatz)| i\_r ein, zu dem die Rückflüsse angelegt werden (z. B. Sparbuch, Anleihen).

Die Rückflüsse werden mit i\_r auf das Ende der Nutzungsdauer aufgezinst und ergeben als Summe den Endwert E.

----------

|Definition: Modifizierter interner Zinssatz i\_(mod)|

Der |modifizierte interne Zinssatz i\_(mod)| ist jener Zinssatz, für den die zu diesem Zinssatz i\_(mod) aufgezinsten Anschaffungskosten A\_0 den selben Ertrag bringen wie der Endwert E der mit i\_r reinvestierten Rückflüsse:

A\_0 \*(1 +i\_(mod))^n =E mit E ='Si[t=1;n](R\_t \*(1 +i\_r)^(n -t))

i\_(mod) = ^(n)'w(E/(A\_0)) -1

----------

##-Beispiel 5.7: Modifizierter interner Zinssatz (Forts. einführendes Beispiel)

Die Rückflüsse aus dem einführenden Beispiel werden mit einem Zinssatz i\_r =4,5 % wiederveranlagt.

Beurteilen Sie mithilfe des modifizierten internen Zinssatzes, ob die Investition unter diesen Bedingungen vorteilhaft ist.

Lösung:

Berechnung der Summe der aufgezinsten Rückflüsse E:

1. Schritt: Endwert der Rückflüsse berechnen

E =6000 \*1,045^2 +8000 \*1,045 +10000 ~~24912

2. Schritt: Äquivalenzgleichung erstellen

20000 \*(1 +i\_(mod))^3 =24912

3. Schritt: i\_(mod) berechnen

i\_(mod) = ^(3)'w((24912)/(20000)) -1 ~~0,07595

i\_(mod) ~~7,595 % >4,5 %

Da i\_(mod) >i\_r ist, sollte man investieren.

----------

|Investitionsentscheidung|

Eine |Investition| ist vorteilhaft, wenn der modifizierte interne Zinssatz größer ist als der sichere Wiederveranlagungszinssatz: i\_(mod) >i\_r

Ist der modifizierte interne Zinssatz kleiner als der Wiederveranlagungszinssatz, ist es besser, das Kapital zu diesem sicheren Zinssatz i\_r anzulegen.

----------

Investieren, wenn i\_(mod) >i\_r

Tipp: Manchmal verlangen Betriebe die Abdeckung eines Risikos und legen einen höheren Vergleichszinssatz als den Wiederveranlagungszinssatz fest.

j-155 - Methode des modifizierten internen Zinssatzes

##### \*\*-Investitionsrechnung mit Technologieunterstützung

In Excel stehen folgende Funktionen zur dynamischen Investitionsrechnung zur Verfügung:

Kapitalwert:

NBW(Kalkulationszinssatz; Rückflüsse) - Anschaffungskosten

-----

Annuität:

RMZ(Kalkulationszinssatz; Nutzungsdauer; Kapitalwert)

-----

Interner Zinssatz:

IKV(Zahlungsstrom)

-----

Modifizierter interner Zinssatz:

QIKV(Zahlungsstrom; Kalkulationszinssatz; Wiederveranlagungszinssatz)

-----

NBW steht für NettoBarWert.

IKV steht für Interne KapitalVerzinsung.

QIKV steht für Qualifizierte InterneKapitalVerzinsung.

----------

##-Beispiel 5.8: Investitionsrechnung mit Excel (Forts. einführendes Beispiel)

a) Berechnen Sie die vier Kennzahlen der Investitionsrechnung für das einführende Beispiel mit Excel: i\_k =6 % und i\_r =4,5 %

b) Stellen Sie die Kapitalwertkurve in Excel grafisch dar.

Lösung:

a)

i\_k: 6 %

i\_r: 4,5 %

Jahr | Einnahmen | Ausgaben | Rückflüsse

0 | - | € 20.000,00 | -€ 20.000,00

1 | € 9.000,00 | € 3.000,00 | € 6.000,00

2 | € 9.000,00 | € 1.000,00 | € 8.000,00

3 | € 11.000,00 | € 1.000,00 | € 10.000,00

-----

Kennzahlen

Kapitalwert: € 1.176,54

Annuität: € 440,16

interner Zinssatz:: 8,896 %

modifizierter interner Zinssatz: 7,595 %

-----

i\_k: 0,06

i\_r: 0,045

Jahr | Einnahmen | Ausgaben | Rückflüsse

0 | - | 20000 | =B5-C5

1 | 9000 | 3000 | =B6-C6

2 | 9000 | 1000 | =B7-C7

3 | 11000 | 1000 | =B8-C8

-----

Kennzahlen

Kapitalwert =NBW(B1;D6:D8)-C5

Annuität =RMZ(B1;3;-D12;0;0)

interner Zinssatz =IKV(D5:D8)

modifizierter interner Zinssatz =QIKV(D5:D8;B1;B2)

-----

b) Kapitalwertkurve:

A | B

Jahr | Rückflüsse

0 | -€ 20.000,00

1 | € 6.000,00

2 | € 8.000,00

3 | € 10.000,00

-----

i\_k | C\_0 in €

0 % | 4.000

2 % | 2.995

4 % | 2.056

6 % | 1.177

8 % | 353

10 % | -421

12 % | -1.148

14 % |-1.831

Zelle B8: =NBW(A8;$B$3:$B$5) +$B$2

j-156 - Investitionsrechnung

Beim GTR stehen im Menü (APPS); 1:Finance; CALC folgende Funktionen zur Verfügung:

Net Present Value NPV (Kapitalwert):

npv(Kalkulationszinssatz, Anschaffungskosten, Liste der Rückflüsse [,Frequenzliste]) Die Anschaffungskosten müssen als Ausgabe negativ eingegeben werden.

Internal Rate of Return IRR (interner Zinssatz):

irr(Anschaffungskosten, Liste der Rückflüsse [,Frequenzliste])

----------

##-Beispiel 5.9: Investitionsrechnung mit dem GTR (Forts. einführendes Beispiel)

Berechnen Sie die vier Kennzahlen der Investitionsrechnung für das einführende Beispiel mit dem GTR: i\_k =6 % und i\_r =4,5 %

Lösung:

Speichern Sie die Rückflüsse in Liste L1:

(2nd )[{] 6000 (,) 8000 (,) 10000 (2nd) [}] (STO) (2nd) [Ll] (ENTER)

a) Kapitalwert:

Rufen Sie mit (APPS) 1:Finance; CALC; 7:npv die Kapitalwertfunktion auf und geben Sie npv(6, -20000, L1) ein.

Anschaffungskosten sind als Ausgaben negativ einzugeben.

NPV =C\_0 =1176,54 ~~1177

-----

b) Annuität:

Die Annuität berechnen Sie mit dem TVM-Solver. Die Annuität ist die Rate PMT einer nachschüssigen Jahresrente mit dem Kapitalwert C\_0 (negativ eingeben) als Barwert PV.

A =440,16 ~~440

-----

c) Interner Zinssatz:

Rufen Sie mit (APPS) 1:Finance; CALC; 8:irr die Funktion für den internen Zinssatz auf und geben Sie irr(-20000, L1) ein.

IRR ~~8,8963 %

-----

d) Modifizierter interner Zinssatz:

Berechnen Sie zuerst die Summe E aller mit i\_r auf das Ende der Nutzungsdauer aufgezinsten Rückflüsse.

Den modifizierten Zinssatz i\_(mod) berechnen Sie dann mit der Formel

i\_(mod) = ^(3)'w((24912)/(20000)) -1.

i\_(mod) ~~7,5954 %

-----

E ='Si[t=1;n](R\_t \*(1 +i\_r)^(n -t))

----------

##-Beispiel 5.10: Anschaffung einer Maschine

Der Anschaffungswert einer Maschine beträgt 35.000 Euro.

Die Nutzungsdauer der Maschine beträgt 5 Jahre, wobei mit jährlichen Erträgen von 10.000 Euro gerechnet wird.

Alternativ könnte das vorhandene Geld in Wertpapieren mit einer Effektivverzinsung von i\_k =10 % (Kalkulationszinssatz) veranlagt werden.

Beurteilen Sie mithilfe des Kapitalwerts und des internen Zinssatzes, ob der Kauf der Maschine sinnvoll ist, oder ob das Geld besser in Wertpapieren angelegt werden soll.

Lösung:

* Berechnung der Größen mit dem GTR:

npv(10, -35000, {10000}, {5}) Man erhält 5-mal 10000.

irr(-35000, {10000}, {5})

j-157 - Methode des modifizierten internen Zinssatzes

* Berechnung der Größen mit Excel:

i\_k | 10 %

Jahr | Rückflüsse

0 | -€ 35.000,00

1 | € 10.000,00

2 | € 10.000,00

3 | € 10.000,00

4 | € 10.000,00

5 | € 10.000,00

Kapitalwert: € 2.907,87 =NBW(B1;B5:B9)+B4

interner Zinssatz. 13,2 % =IKV(B4:89)

* Beurteilung der Investition:

Kapitalwert ~~2908 >0

Der Kauf der Maschine bringt einen höheren Ertrag als die Wertpapiere. Interner Zinssatz ~~13,2 % >i\_k =10 %

Die Effektivverzinsung der Maschine ist höher als jene der Wertpapiere.

-----

Hinweis: Da die jährlichen Rückflüsse gleich hoch sind, kann ihr Barwert auch als Barwert einer nachschüssigen Rente berechnet werden.

=BW(10 %; 5;-10.000; 0; 0)

----------

##-Beispiel 5.11: Ankauf einer Druckerpresse

Eine Druckerei möchte die Kapazität durch den Ankauf einer Druckerpresse erweitern. Kalkulationszinssatz: 8 %

Anschaffungskosten: 20.000 Euro

Nutzungsdauer: 4 Jahre

Voraussichtliche Auslastung der Druckerpresse:

Jahr t | Auslastung (gedruckte Seiten)

1 | 400000

2 | 450000

3 | 460000

4 | 500000

Jährlich fallen unabhängig von der Auslastung für Wartung und Versicherung Zahlungen in der Höhe von 2.500 Euro an.

Die Kosten für Papier, Farbe und Energie betragen 1 Cent pro gedruckter Seite.

Der durchschnittliche Erlös pro Seite beträgt 3 Cent.

a) Erstellen Sie eine Tabelle mit den jährlichen Rückflüssen.

b) Berechnen Sie den Kapitalwert und den internen Zinssatz dieser Investition und beurteilen Sie ihre Sinnhaftigkeit.

c) Unter der Annahme einer anderen jährlichen Auslastung berechnet sich der Kapitalwert der Druckerpresse nach folgender Gleichung.

C\_0 =-20000 +(6000)/(1,1) +(6000)/(1,1^2) +(6700)/(1,1^3) +(7000)/(1,1^4)

Lesen Sie aus dieser Gleichung die angenommenen Erträge und den verwendeten Kalkulationszinssatz ab.

j-158 - Investitionsrechnung

##-Beispiel 5.11: Ankauf einer Druckerpresse (Fortsetzung)

Lösung:

a) Die Berechnung der jährlichen Rückflüsse in Abhängigkeit von der Auslastung X erfolgt nach der Formel

Ertrag =0,03 \*X -(0,01 \*X +2500) =0,02 \*X -2500.

{{Abkürzungen für die folgende Tabelle:

t - Jahr

Auslastung - Auslastung (gedruckte Seiten)

Rückflüsse - Rückflüsse in € (berechnet)}}

t | Auslastung | Rückflüsse

1 | 400000 | 5500

2 | 450000 | 6500

3 | 460000 | 6700

4 | 500000 | 7500

-----

b) Berechnung mit GTR:

npv(8, -20000, {5500, 6500, 6700, 7500}) =1496,69

irr(-20000, {5500, 6500, 6700, 7500}) =11,16 %

Berechnung mit Excel:

i\_k | 8 %

Jahr | Rückflüsse

0 | -€ 20.000,00

1 | € 5.500,00

2 | € 6.500,00

3 | € 6.700,00

4 | € 7.500,00

Kapitalwert € 1.496,69 =NBW(B1;B5:B8)+B4

interner Zinssatz 11,2 % =IKV(B4:B8)

Beurteilung:

Der Kapitalwert ~~1.497 >0 und der interne Zinssatz ~~11,16 % >i\_k =8 %.

Der Kauf der Maschine ist sinnvoll.

-----

c) Rückflüsse:

Jahr | Rückflüsse in €

1 | 6000

2 | 6000

3 | 6700

4 | 7000

Es wird mit einem Kalkulationszinssatz i\_k =10 % gerechnet.

j-159 - Methode des modifizierten internen Zinssatzes

##### \*\*-Zusammenfassung und Vergleich der vier Investitionsverfahren

Alle vier besprochenen Methoden der Investitionsrechnung und die daraus ermittelten Kennzahlen dienen zur Begründung einer Investitionsentscheidung für ein Investitionsprojekt.

Will man zwischen mehreren Projekten auswählen, so ist die Kapitalwertmethode nur dann sinnvoll, wenn die Nutzungsdauer dieser Projekte gleich groß ist.

Der interne Zinssatz i\_0 ist vom kalkulatorischen Zinssatz i\_k, den man zur Berechnung von Kapitalwert C\_0 und Annuität A benötigt, unabhängig. Der interne Zinssatz ist allerdings nur dann eindeutig, wenn alle Rückflüsse positiv sind.

Beim modifizierten internen Zinssatz wird ein Reinvestitionszinssatz i\_r berücksichtigt, da der interne Zinssatz i\_0 einer Investition so hoch sein kann, dass eine Wiederveranlagung der Rückflüsse zu diesem Zinssatz i\_0 nicht möglich ist.

-----

Methode: Kapitalwertmethode

Beschreibung: Von der Summe der abgezinsten Rückflüsse werden die Anschaffungskosten abgezogen.

Berechnung: C\_0 =-A\_0 +'Si[t=1;n](R\_t \*(1 +i\_k)^(-t))

Kriterium für positive Investitionsentscheidung: C\_0 >0

-----

Methode: Annuitätenmethode

Beschreibung: Der Kapitalwert C\_0 wird als Barwert in eine nachschüssige Jahresrente mit n Jahren Laufzeit umgewandelt. Die Jahresrate A (Annuität) wird berechnet.

Berechnung: A =C\_0 \*((1 +i\_k)^n \*i\_k)/((1 +i\_k)^n -1)

Kriterium für positive Investitionsentscheidung: A >0

-----

Methode: Methode des internen Zinssatzes

Beschreibung: Der Zinssatz i\_0, für den der Kapitalwert gleich null ist, wird ermittelt.

Berechnung: C\_0(i\_0) =0

Kriterium für positive Investitionsentscheidung: i\_0 >i\_k

-----

Methode: Methode des modifizierten internen Zinssatzes

Beschreibung: Die Rückflüsse R\_t werden mit dem Reinvestitionszinssatz i\_r wiederveranlagt. Man erhält den Endwert E der aufgezinsten Rückflüsse. Dann ermittelt man den Zinssatz i\_(mod), mit dem man die Anschaffungskosten A\_0 veranlagen müsste um zum selben Endwert E zu kommen.

Berechnung: A\_0 \*(1 +i\_(mod))^n =E

E ='Si[t=1;n](R\_t \*(1 +i\_r)^(n -t))

i\_(mod) = ^(n)'w(E/(A\_0)) -1

Kriterium für positive Investitionsentscheidung: i\_(mod) >i\_r

j-160 - Investitionsrechnung

##### \*\*-Übungsaufgaben

##-5.001 Für ein Investitionsprojekt mit einer voraussichtlichen Nutzungsdauer von 5 Jahren werden die in der Tabelle eingetragenen Jahreseinnahmen und Jahresausgaben prognostiziert.

Der erforderliche Kapitaleinsatz beträgt 150.000 Euro, der kalkulatorische Zinssatz i\_k =12 %.

Jahr | Einnahmen in € | Ausgaben in €

1 | 120.000 | 50.000

2 | 100.000 | 55.000

3 | 100.000 | 60.000

4 | 90.000 | 65.000

5 | 90.000 | 70.000

a) Berechnen Sie den Barwert der Rückflüsse.

**[]**

b) Berechnen Sie den Kapitalwert.

**[]**

c) Begründen Sie, ob die Realisierung des Projektes zweckmäßig ist.

**[]**

d) Zeichnen Sie die Kapitalwertkurve und lesen Sie ab, bis zu welchem Kalkulationszinsatz i\_k die Investition sinnvoll ist.

**[]**

----------

##-5.002 Für ein Investitionsprojekt wurde die Kapitalwertkurve gezeichnet.

{{Grafik: Nicht darstellbar.}}

a) Lesen Sie aus der Grafik ab, bis zu welchem kalkulatorischen Zinssatz die Investition sinnvoll ist.

**[]**

b) Lesen Sie aus der Grafik ab, für welchen kalkulatorischen Zinssatz ein Kapitalwert in Höhe von 3000 Euro zu erwarten ist.

**[]**

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Kapitalwertkurve, wenn die Anschaffungskosten um 1.000 Euro sinken.

**[]**

----------

##-5.003 Beim Kauf einer neuen Baumaschine mit einer voraussichtlichen Nutzungsdauer von 5 Jahren werden die in der Tabelle eingetragenen Jahreseinnahmen und Jahresausgaben geschätzt.

Der erforderliche Kapitaleinsatz beträgt 40.000 Euro, der kalkulatorische Zinssatz i\_k =10 %.

Jahr | Einnahmen in € | Ausgaben in €

1 | 8.000 | 3.000

2 | 10.000 | 1.000

3 | 10.000 | 1.000

4 | 10.000 | 1.000

5 | 15.000 | 1.000

a) Berechnen Sie den Barwert der Rückflüsse.

**[]**

b) Berechnen Sie den Kapitalwert.

**[]**

c) Begründen Sie, ob der Kauf der Maschine zweckmäßig ist.

**[]**

j-161 - Übungsaufgaben

##-5.004

a) Die Anschaffungskosten einer Investition betragen 5.000 Euro.

Man erwartet während der gesamten Nutzungsdauer von 7 Jahren jährlich 1.000 Euro Rückflüsse und rechnet mit einem Kalkulationszinssatz i\_k =8 %.

Berechnen Sie den Kapitalwert C\_0.

**[]**

b) Erstellen Sie eine Formel für den Kapitalwert C\_0 einer Investition mit Anschaffungskosten A\_0 bei einem Kalkulationszinssatz i\_k, wenn die jährlichen Rückflüsse R während der Dauer der Investition von n Jahren konstant gleich hoch sind.

**[]**

----------

##-5.005 Berechnen Sie zur gegebenen Folge von Rückflüssen die Rate der gleichwertigen nachschüssigen Jahresrente: i\_k =8 %

1. Jahr: € 4.000

2. Jahr: € 1.200

3. Jahr: € 2.500

4. Jahr: € 5.000

----------

##-5.006 Die Firmenleitung einer Baufirma entscheidet über den Kauf einer neuen Maschine. Es stehen 2 Modelle zur Auswahl. Der Kalkulationszinssatz i\_k beträgt 10 %.

I: Anschaffungskosten € 30.000

Jahr | Rückflüsse in €

1 | 8.000

2 | 10.000

3 | 10.000

4 | 12.000

-----

II: Anschaffungskosten € 50.000

Jahr | Rückflüsse in €

1 | 12.000

2 | 15.000

3 | 16.000

4 | 24.000

Berechnen Sie jeweils den Kapitalwert der Maschinen.

Treffen Sie anhand der berechneten Werte eine Kaufentscheidung.

**[]**

----------

##-5.007

a) Zeichnen Sie für die beiden Investitionsobjekte aus Aufgabe 5.006 die Kapitalwertkurven in ein Koordinatensystem.

**[]**

b) Lesen Sie aus der Grafik ab, für welchen kalkulatorischen Zinssatz die Kapitalwerte der beiden Maschinen gleich groß sind.

**[]**

c) Berechnen Sie den kalkulatorischen Zinssatz, für den die Kapitalwerte der beiden Maschinen gleich groß sind.

**[]**

----------

##-5.008 Die Tabellen zeigen die erwarteten Rückflüsse zweier Investitionen.

I: Kapitaleinsatz € 100.000

Jahr | Rückflüsse in €

1 36.000

2 | 50.000

3 | 45.000

-----

II: Kapitaleinsatz € 100.000

Jahr | Rückflüsse in €

1 | 20.000

2 | 28.000

3 | 30.000

4 | 40.000

5 | 30.000

-----

a) Ermitteln Sie jeweils den Kapitalwert bei einem Kalkulationszinssatz i\_k =10 % (auf ganze Euro gerundet).

Erklären Sie, warum mithilfe des Kapitalwerts keine seriöse Entscheidung zwischen diesen Investitionen möglich ist.

**[]**

b) Betrachten Sie den jeweiligen Kapitalwert als Rentenbarwert und berechnen Sie die Höhe der gleichwertigen konstanten nachschüssigen Jahresraten.

Ermitteln Sie, welche der Investitionen eine höhere Annuität aufweist.

**[]**

j-162 - Investitionsrechnung

##-5.009 Für zwei Investitionsobjekte mit gleicher Nutzungsdauer ergeben sich die in der Grafik dargestellten Kapitalwertkurven.

a) Lesen Sie aus der Grafik ab, für welchen kalkulatorischen Zinssatz beide Investitionen denselben Kapitalwert haben.

Lesen Sie diesen Kapitalwert ab.

**[]**

b) Lesen Sie aus der Grafik ab, welche Investition bei i\_k =5 % und welche bei i\_k =10 % sinnvoller ist.

**[]**

c) Argumentieren Sie, wie sich der Kapitaleinsatz von Investitionsobjekt 1 ändern müsste, dass der Kapitalwert C\_(0,1) unabhängig vom gewählten kalkulatorischen Zinssatz immer größer wäre als C\_(0,2).

**[]**

----------

##-5.010 Die Anschaffungskosten einer Investition betragen 80.000 Euro.

Die Rückflüsse bestehen aus 10 gleich großen Jahresraten von je 12.000 Euro, zahlbar jeweils am Ende eines jeden Jahres, beginnend ein Jahr nach Investitionsbeginn (i\_0 auf 2 Dezimalen).

Ermitteln Sie den internen Zinssatz i\_0.

**[]**

----------

##-5.011 Berechnen Sie den internen Zinssatz i\_0 für jede der beiden Maschinen der Aufgabe 5.006.

Argumentieren Sie, welche Maschine gekauft werden sollte.

**[]**

----------

##-5.012 Ein Spenglerbetrieb möchte eine Blechbiegemaschine anschaffen.

Es stehen zwei Maschinen zur Auswahl, die beide je 30.000 Euro kosten. Maschine A hat eine voraussichtliche Nutzungsdauer von 4 Jahren. Maschine B kann nur 3 Jahre genutzt werden.

Der Kalkulationszinssatz beträgt i\_k =9 %.

Einnahmenüberschüsse in €

Jahr | Maschine A | Maschine B

1 | 9.000 | 10.000

2 | 11.000 | 15.000

3 | 12.000 | 12.000

4 | 8.000 | -

-----

a) Argumentieren Sie, ob eine Investitionsentscheidung basierend auf der Kapitalwertmethode in diesem Fall sinnvoll ist.

**[]**

b) Beurteilen Sie anhand der Annuitätenmethode, welche Maschine angeschafft werden soll.

**[]**

c) Berechnen Sie den internen Zinssatz für beide Maschinen.

Beurteilen Sie, welche Maschine gekauft werden soll.

**[]**

j-163 - Übungsaufgaben

d) Überprüfen Sie die berechneten internen Zinssätze der Maschinen, mithilfe einer grafischen Darstellung der Kapitalwertkurven.

**[]**

e) Die Einnahmenüberschüsse werden bis zum Ende der Nutzungsdauer der jeweiligen Maschine bei einem Wiederveranlagungszinssatz von i\_r =5,8 % wiederveranlagt.

Berechnen Sie jeweils den modifizierten internen Zinssatz und beurteilen Sie, welche Maschine gekauft werden soll.

**[]**

----------

##-5.013 Ein Betrieb möchte eine neue Maschine kaufen. Es stehen zwei Maschinen zur Auswahl, die beide je 70.000 Euro kosten. Die Nutzungsdauer ist für beide Maschinen voraussichtlich 5 Jahre.

Einnahmenüberschüsse in €

Jahr | Maschine A | Maschine B

1 | 13.000 | 30.000

2 | 15.000 | 30.000

3 | 20.000 | 10.000

4 | 20.000 | 10.000

5 | 30.000 | 10.000

-----

a) Vergleichen Sie die sich aus der Kapitalwertmethode und dem internen Zinssatz ergebenden Kaufentscheidungen bei einem Kalkulationszinssatz i\_k =10 %.

**[]**

b) Stellen Sie die Kapitalwertkurven der beiden Maschinen in einem Koordinatensystem dar.

Lesen Sie aus der Grafik ab, ab welchem Kalkulationszinssatz die Kapitalwertmethode zur selben Kaufentscheidung wie die Methode des internen Zinssatzes führt.

**[]**

c) Berechnen Sie jenen Kalkulationszinssatz, für den beide Maschinen denselben Kapitalwert haben.

**[]**

d) Die Einnahmenüberschüsse werden bis zum Ende der Nutzungsdauer der jeweiligen Maschine bei einem Wiederveranlagungszinssatz von i\_r =7 % wiederveranlagt.

Berechnen Sie jeweils den modifizierten internen Zinssatz und beurteilen Sie, welche Maschine gekauft werden soll.

**[]**

----------

##-5.014 Herr M. ist Vertreter. Er überlegt die Anschaffung eines neuen Pkws für seine Arbeit. Dazu stellt er folgende Überlegungen an:

Der gewünschte Pkw hat einen Anschaffungspreis von 35.000 Euro.

Von seiner Firma erhält Herr M. 0,35 Euro pro gefahrenen Kilometer.

Die Treibstoffkosten betragen 0,07 Euro pro gefahrenen Kilometer.

Die durchschnittlich gefahrene Kilometerzahl beträgt 36000 km pro Jahr. Unabhängig von der Kilometerzahl fallen noch jährliche Kosten in der Höhe von 2.000 Euro (Versicherung, Service, Steuern etc.) an.

Herr M. möchte den Pkw 5 Jahre nutzen und weiß, dass er das Auto nach dieser Zeit um 7.200 Euro verkaufen könnte (Liquidationserlös).

a) Erstellen Sie eine Tabelle des Zahlungsstroms.

**[]**

b) Herr M. benötigt für den Kauf des Pkws einen Kredit.

Er verwendet daher einen kalkulatorischen Zinssatz in Höhe des Kreditzinssatzes von 7 % und trifft auch auf Basis dieses Zinssatzes eine Kaufentscheidung.

Berechnen Sie den Kapitalwert und den internen Zinssatz dieser Anschaffung und beurteilen Sie anhand der berechneten Größen jeweils, ob Herr M. den Pkw kaufen soll.

**[]**

c) Herr M. hat den Anschaffungsbetrag in bar zur Verfügung.

Rückflüsse könnte er zu i\_r =5 % wiederveranlagen.

Berechnen Sie den modifizierten internen Zinssatz und beurteilen Sie, ob die Anschaffung des Pkws sinnvoll ist.

**[]**

j-164 - Investitionsrechnung

##-5.015 Der Kopiershop Paper & Flyer überlegt die Anschaffung eines zusätzlichen Kopiergeräts.

a) Ein Kopiergerät A um 20.000 Euro hat eine Nutzungsdauer von zwei Jahren. Mit diesem Gerät können jährlich 200000 Kopien hergestellt und um 7 Cent pro Kopie verkauft werden.

Die Herstellungskosten betragen 2 Cent pro Kopie.

Der Liquidationserlös des Kopiergeräts nach zwei Jahren wird mit 20 % der Anschaffungskosten veranschlagt.

Die Firmenleiterin kalkuliert mit einem Zinssatz von 8 %.

Ermitteln Sie den Kapitalwert und treffen Sie eine Investitionsentscheidung.

**[]**

b) Ein Kopiergerät B mit einer Nutzungsdauer von vier Jahren hat einen Kapitalwert von über 2.000 Euro.

Für die Annuität wird 445 Euro berechnet.

Argumentieren Sie, ob dieses Ergebnis stimmen kann.

**[]**

c) Für die Ermittlung der Rentabilität eines Kopiergeräts C wird folgende Gleichung aufgestellt:

0 =-18.000 +(10000)/x +(12000)/(x^2)

Berechnen Sie x und interpretieren Sie den Wert als Kennzahl der Investitionsrechnung.

**[]**

d) Für ein Kopiergerät D um 16.000 Euro und der Nutzungsdauer von drei Jahren ergeben sich die Rückflüsse von 6.000 Euro im ersten Jahr, 6.000 Euro im zweiten Jahr und 8.000 Euro im dritten Jahr.

Die Firmenleiterin kann Kapital zu einem Zinssatz von 5 % anlegen. Berechnen Sie den modifizierten internen Zinssatz und treffen Sie eine Investitionsentscheidung.

**[]**

----------

##### \*\*-Ziele erreicht?

##-Z 5.1 In der Grafik in der Randspalte sind die Kapitalwertkurven von zwei alternativen Veranlagungen C\_(0,1) (Maschine 1) und C\_(0,2) (Maschine 2) mit gleicher Nutzungsdauer dargestellt.

a) Lesen Sie aus der Grafik jenen kalkulatorischen Zinssatz ab, für den beide Maschinen denselben Kapitalwert besitzen.

Bestimmen Sie die Höhe des zugehörigen Kapitalwerts.

**[]**

b) Skizzieren Sie den Verlauf der Kapitalwertkurve C\_(0,2), wenn die Anschaffungskosten dieser Maschine um 2.000 Euro höher als ursprünglich geplant sind.

**[]**

c) Lesen Sie aus der Grafik den internen Zinssatz für Maschine 1 ab.

**[]**

d) Erklären Sie, unter welcher Bedingung die Annuitätenmethode für Veranlagungen mit gleich hohem Kapitalwert unterschiedliche Annuitäten ergibt.

**[]**

----------

##-Z 5.2 Ein Handwerksbetrieb überlegt, eine neue Maschine zu kaufen.

Es stehen zwei Maschinen A und B zur Auswahl.

Maschine A kostet € 25.000 und die Einnahmenüberschüsse in den vier Nutzungsjahren betragen € 8.000, € 9.000, € 10.000 und € 5.000.

Bei einem kalkulatorischen Zinssatz i\_k =8,5 % haben beide Maschinen denselben Kapitalwert.

a) Berechnen Sie den Kapitalwert für Maschine A.

**[]**

b) Argumentieren Sie, für welche Maschine man sich auf Grund der Annuitätenmethode entscheiden wird, wenn die Nutzungsdauer der zweiten Maschine B drei Jahre beträgt.

**[]**

c) Berechnen Sie den modifizierten internen Zinssatz von Maschine A für einen Reinvestitionszinssatz i\_r =4 %.

Beurteilen Sie, für welche Maschine man sich entscheiden wird, wenn Maschine B einen modifizierten internen Zinssatz von 8,91 % aufweist.

**[]**

j-165 - Kurs- und Rentabilitätsrechnung

## \*\*-6 Kurs- und Rentabilitätsrechnung

Wertpapiere sind bereits seit dem Altertum bekannt. Im europäischen Kulturbereich sind sie seit dem 9. Jahrhundert nachweisbar. Schon im 13. Jahrhundert wurden Vorläufer heutiger Wertpapiere wie zum Beispiel Konnossement (Wertpapier im Seefrachtverkehr), Ladeschein und Lagerschein verwendet. Diese Papiere sollten den reibungslosen Warenumlauf fördern.

Als Geburtstag der Aktie gilt der 20. März 1602. An diesem Tag haben sich einige kleinere Handelsgesellschaften auf dem Gebiet der heutigen Niederlande und Belgiens zur "Verenigde Ostindische Compagnie" (VOC) zusammengeschlossen. Die VOC war die erste Börse der Welt.

Bereits zwei Jahrhunderte vor der Gründung der VOC trafen sich Kaufleute aus aller Welt vor dem Haus der Bankiersfamilie Van der Beurse in Brügge, um Handel zu treiben. Die regelmäßigen Handelstreffen wurden bald nach dem Familiennamen als "Börse" bezeichnet.

Italienische Städte finanzierten bereits im Spätmittelalter (etwa 1250 bis 1500) ihre Schulden hauptsächlich durch die Ausgabe von Anleihen. Der Käufer einer solchen Anleihe erhielt im Gegenzug einen urkundlich verbrieften Zins.

Staaten übernahmen dieses Instrument der Anleihen, um ihre Haushaltsdefizite zu finanzieren.

----------

Griechenland zahlt für neue Anleihen 4,75 Prozent

Griechenland begibt auf den Finanzmärkten die erste Anleihe seit vier Jahren. Das Land holt sich drei Milliarden Euro.

Fast vier Jahre nach dem finanziellen Kollaps hat sich Griechenland erstmals wieder Kapital bei privaten Investoren beschafft. Dabei sammelte das krisengeplagte Land am Donnerstag nach Angaben des Athener Finanzministeriums 3 Mrd. Euro ein, rund eine halbe Milliarde mehr als angepeilt. Die Anleger erhalten dafür einen Zinssatz von 4,75 Prozent. Die Nachfrage nach den Anleihen war enorm.

10.04.2014 | 15:00 | (DiePresse.com)

----------

##### \*\*-Meine Ziele

Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

* Fachbegriffe aus dem Bereich des Wertpapierhandels richtig anwenden,
* Zahlungsströme bei festverzinslichen Wertpapieren grafisch darstellen und bewerten,
* Renditen und (Emissions)Kurse berechnen und
* Wertpapiere vergleichen.

----------

##### \*\*-Worum geht's hier?

|Bundesanleihe|

(Quelle: www.wienerborse.at/bonds, Stand 7. April 2014)

2,4 % Bundesanleihe 13-34/1 Letzter Preis 95,850

Die |Bundesanleihe| wurde von der Republik Österreich am 17. 4. 2013 emittiert. Sie hat eine Laufzeit von 21 Jahren. Im Abstand von 12 Monaten, immer am 17. April der Jahre 2014 bis 2034, wird ein fixer Kuponbetrag von 2,4 % vom Nennwert bezahlt.

* Nennwert K\_0 =€ 1.000,00
* Emissionskurs C\_0 =99,38
* Kurs (am 7. 4. 2014) C =95,850
* Laufzeit n =21 Jahre
* Nominalzinssatz i =2,4 %
* Tilgungskurs C\_(21) =100; Tilgungsbetrag T =K\_0 =€ 1.000,00

Die 2,4 % Bundesanleihe 13-34 wurde am 17. 4. 2013 zu einem Kurs von 99,38 emittiert.

j-166 - Kurs- und Rentabilitätsrechnung

Der Kaufpreis K\_0' einer Anleihe hängt vom Kurs ab:

* Wenn jemand ein Stück der Anleihe am 17. 4. 2013 zum Nominalwert K\_0 =€ 1.000,00 gekauft hat, so hat er dafür wegen des Emissionskurses C\_0 =99,38 den Kaufpreis K\_0' =€ 993,80 gezahlt.
* Kauft man zum Kurs C =95,850 ein Stück der Anleihe zum Nominalwert K\_0 =€ 1.000,00, so muss man dafür € 958,50 zahlen.

-----

|Zahlungsstrom und Darstellung desselben auf einer Zeitachse|

Folgende Zahlungen werden getätigt, wenn ein Stück der Anleihe zum Nominalwert K\_0 =€ 1.000,00 zum Emissionskurs C\_0 =99,38 gekauft und nach 21 Jahren zum Tilgungskurs C\_(2,1) =100 getilgt wird.

* Zum Zeitpunkt t =0 wird der Kaufpreis K\_0' =€ 993,80 gezahlt.
* 21 Jahre lange werden die Kuponzahlungen (Zinsen) K =€ 24,00 gezahlt.
* Zusammen mit der letzten Zinszahlung wird der Tilgungsbetrag T =€ 1.000,00 ausgezahlt.

-----

Eine Anleihe wird zum Kaufpreis K\_0' erworben.

Während der Laufzeit von n Jahren werden n-mal die Zinsen K bezahlt. Am Ende der Laufzeit wird die Schuld mit dem Tilgungsbetrag T getilgt.

----------

##-Beispiel 6.1: Anleihe der Firma Andritz - Grundbegriffe

Der weltweit tätige Konzern Andritz AG emittierte am 19. Juni 2006 eine Anleihe mit einem Gesamtvolumen von € 200.000.000,00.

4,5 % ANDRITZ-ANLEIHE 2006-2013

Das Angebot

Emittent Andritz AG

Emissionsvolumen: 200.000.000 EUR

Stückelung: Nominale zu je 500 EUR

Kupon: 4,5 % p.a. vom Nennwert

Laufzeit: 7 Jahre

Emissionspreis: 100,342 %

Tilgung: 19. Juni 2013 zu 100 %

Börseeinführung: Wiener Börse, Geregelter Freiverkehr

Zahlstelle: Erste Bank der oesterreichischen Sparkassen AG

Zeichnungsfrist: 8. und 9. Juni 2006\*

Valuta 19. Juni 2006

ISIN AT0000A01633

\* Nach Beendigung der Zeichnungsfrist können Stücke jederzeit zu den dann gültigen Marktkonditionen erworben werden.

a) Lesen Sie den Emissionskurs (Emissionspreis) CQ und die Stückelung ab.

emittere: lateinisch für entsenden, abziehen lassen

b) Berechnen Sie den Kaufpreis K\_0' eines Stückes der Anleihe zum Nominalwert K\_0 =€ 500,00.

c) Berechnen Sie die zugehörigen Kuponzahlungen (Zinsen) K.

couper: französisch für schneiden, ausschneiden

d) Ermitteln Sie den Tilgungsbetrag T.

e) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse grafisch dar.

-----

Lösung:

a) Der Emissionskurs C\_0 ist 100,342. Die Stückelung ist € 500,00.

b) K\_0' =C\_0 \*K\_0 =100,342 \*500,00 =501,71.

Der Kaufpreis K\_0' beträgt € 501,71.

c) Die nominelle Verzinsung der Anleihe beträgt i =4,5 %.

Für den Nominalwert K\_0 =€ 500,00 erhielt ein Anleger jährlich nachschüssig den Kupon K =€ 22,50.

Berechnung: K =500 \*0,045 =22,50

d) Am 19. Juni 2013 wurde die Anleihe zum Nennwert getilgt.

Für ein Stück erhielt ein Anleger somit den Tilgungsbetrag T =€ 500,00.

----------

Tipp: Festverzinsliche Wertpapiere

verbriefen eine regelmäßige, fixe Verzinsung des eingesetzten Kapitals sowie die Rückzahlung des eingesetzten Kapitals zu einem (oder mehreren) festgesetzten Terminen.

j-167 - Grundbegriffe

Sieben Jahre lang bekommt der Käufer eines Stückes (K\_0 =€ 500,00) der Anleihe € 22,50 Zinsen.

### \*\*-6.1 Grundbegriffe

|Öffentliche Anleihen| (Staatsanleihen, Bundeswertpapiere) werden von Bund, Ländern und Gemeinden herausgegeben. Bund und Länder finanzieren damit ihre Investitionen und Defizite.

|Pfandbriefe und Bankschuldverschreibungen| werden von Kreditinstituten emittiert, die sich dadurch ihre Mittel zur Finanzierung ihres Kreditgeschäfts besorgen.

In der großen Vielfalt der festverzinslichen Titel kommt der börsennotierten Anleihe eine besondere Bedeutung zu. Sie ist eine wichtige Möglichkeit der Beschaffung von langfristigen Fremdmitteln für emissionsfähige Unternehmen.

In Österreich und Deutschland wird ein Großteil der Anleihen von Banken und der öffentlichen Hand emittiert, während in den USA auch viele Unternehmen Anleihen herausgeben.

Der |Mantel| eines Wertpapiers beinhaltet den entsprechenden Vertragstext.

Die folgenden Überlegungen beziehen sich ausschließlich auf unkündbare Kuponanleihen mit einem sicheren Zahlungsstrom laut Mantel des Wertpapiers.

Man geht weiter davon aus, dass der Zinssatz für das angelegte Kapital unabhängig von der Dauer der Veranlagung ist.

----------

|Festverzinsliche Wertpapiere, Anleihen|

* Durch den Kauf eines festverzinslichen Wertpapiers (Anleihe) erwirbt der Käufer (Gläubiger) das Recht, dass ihm ein vertraglich festgelegter Betrag (Tilgungsbetrag) am Ende der Laufzeit bezahlt wird.
* Bis zum Ende der Laufzeit erhält der Käufer periodische Zinszahlungen (Kuponzahlungen).

----------

Der |Kurs C| eines Wertpapiers bestimmt u. a. den Ertrag (die Rendite) des eingesetzten Kapitals.

Der Kurs ist eine vom Markt bestimmte Größe und muss daher marktkonform sein. Das bedeutet, dass der Kurs so bestimmt wird, dass gleichwertige Papiere, also Papiere mit ähnlichen Eigenschaften aus derselben Anleihekategorie, auch einen ähnlichen Ertrag liefern.

----------

|Zahlungen bei Wertpapieren:|

* Um Wertpapiere mit dem Nennwert K\_0 zu erwerben, muss der kursabhängige Kaufpreis K\_0' bezahlt werden.
* Als verbriefte Gegenleistung erhält der Investor vom Emittenten (Republik Österreich, Banken, berechtigten Betrieben etc.) bis zum Tilgungstermin nachschüssige periodische Zahlungen, die Zins- oder Kuponzahlungen K sowie
* an einem bestimmten Datum (dem Tilgungstermin) den Tilgungsbetrag T, der sich aus dem Tilgungskurs C\_n ergibt.

j-168 - Kurs- und Rentabilitätsrechnung

|Emissionskurs, Kaufpreis, Kuponzahlung|

* |Der Emissionskurs (Ausgabekurs) C\_0| eines Wertpapiers ist der Preis, den der Investor pro 100 Euro Nennwert zum Emissionszeitpunkt zahlt.
* Der Emissionskurs C\_0 heißt

unter pari, wenn C\_0 <100 (Disagio, Abgeld)

al pari, wenn C\_0 =100

über pari, wenn C\_0 >100 (Agio, Aufgeld)

* Kaufpreis K\_0' =(C\_0)/(100) \*K\_0

Kaufpreis =Ausgabekurs/(100) \*Nennwert

* Ausgabekurs C\_0 =(K\_0')/(K\_0) \*100

Ausgabekurs =Kaufpreis/(Nennwert) \*100

* Zins- oder Kuponzahlungen K =K\_0 \*i
* Tilgungsbetrag T =(C\_n)/(100) \*K\_0

-----------

Im Folgenden wird als Anleihe ein festverzinsliches Wertpapier bezeichnet.

##-Beispiel 6.2: Kaufpreis, Kupon- und Tilgungsbetrag

Ein Investor will ein Nominalkapital von € 5.000,00 von einer Anleihe mit folgenden Bedingungen erwerben:

Emissionskurs C\_0 =98

Laufzeit n =5 Jahre

Nominalzinssatz i =5 %

Tilgung zum Nennwert

a) Berechnen Sie den |Kaufpreis K\_0'|.

b) Berechnen Sie den zugehörigen |Kuponbetrag K|.

c) Ermitteln Sie den |Tilgungsbetrag T|.

d) Stellen Sie den |Zahlungsstrom| auf einer Zeitachse grafisch dar.

Lösung:

a) K\_0' =(98)/(100) \*5000 =4900

Um Anleihen im Wert vom Nominalkapital € 5.000,00 zu erwerben, muss der Investor den Kaufpreis € 4.900,00 bezahlen.

b) K =5000 \*0,05 =250

Am Ende jedes Jahres erhält der Investor als Zinsen den Kuponbetrag K =€ 250,00.

c) Da zum Nennwert getilgt wird, erhält der Investor nach fünf Jahren den Tilgungsbetrag T =€ 5.000,00.

d) Zahlungsstrom der 5 %-Anleihe:

Fünf Jahre lang bekommt der Investor für sein Nominalkapital von € 5.000,00 Zinsen in der Höhe von € 250,00.

----------

Hinweis: Häufig ist der Tilgungskurs 100 und damit der Tilgungsbetrag gleich dem Nennwert.

----------

|Nominelle Größen - marktabhängige Größen|

|Nominelle Größen|

K\_0 Nominalwert; Nennwert der Anleihe

K Kuponzahlung K =K\_0 \*i

i nomineller verbriefter Zinssatz

n Laufzeit in Jahren

-----

|Vom Markt abhängige Größen|

K\_0' Realkapital; Kaufpreis; Barwert der künftigen Leistungen des Schuldners zum effektiven Zinssatz i'

i' effektiver Zinssatz, Rendite, Rentabilität

----------

j-169 - Übungsaufgaben

##### \*\*-Übungsaufgaben

##-6.001 Anleihe:

Nennwert K\_0 =€ 3.000.000,00

Emissionskurs C\_0 =97,5

Laufzeit n =10

Nominalzinssatz i =6 %

Tilgungskurs C\_(10) =100

a) Berechnen Sie

* den Kaufpreis K\_0' und
* den Kuponbetrag K.

b) Ermitteln Sie den Tilgungsbetrag T.

**[]**

c) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse grafisch dar.

**[]**

-----

Hinweis: Spesen und Gebühren bleiben bei den Berechnungen zu Anleihen zunächst ohne Berücksichtigung.

----------

##-6.002 Eine Anleihe mit dem Nominalwert K\_0 =€ 5.000,00, i =6,25 % und einer Laufzeit von 30 Jahren hat einen Tilgungskurs C\_(30) von 100.

a) Lesen Sie den Kurs für den 2. 5. 2014 ab.

**[]**

b) Berechnen Sie den Kaufpreis K\_0' eines Stückes der Anleihe für den Kurs vom 2. 5. 2014.

**[]**

c) Berechnen Sie die zugehörigen Kuponzahlungen (Zinsen) K.

**[]**

d) Ermitteln Sie den Tilgungsbetrag T.

**[]**

e) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse grafisch dar.

**[]**

-----

6,25 % Bundesanl. 97-27/6

ISIN: AT0000383864

Letzter Preis 147,700 +1,37 %

Datum, Zeit 02.05.2014 12:03:43

----------

##-6.003

4,15 % Bundesanl. 07-37/1/144A

Letzter Preis 125,600 +4,19 %

ISIN: AT0000A04967

Datum, Zeit 06.02.2014, 12:12:32

Emittent Republik Österreich

Fälligkeit 15.03.2037

Marktsegment public sector

Restlaufzeit: 22,89 Jahre

Wertpapiere rt/-gattung Anleihe

Laufzeitbeginn: 17.01.2007

Markt: Amtlicher Handel

Handelszeiten 11:30- 11:45

Stückzinsen Handel exklusive

Notierungsart Prozentnotiz

Nominalwährung EUR

Emissionsvolumen (bei Stücknotiz: Stückanzahl) 12.132.322.000,00

Stückelung 1,000,00

Mündelsicher ja

CCP-fähig ja

-----

a) Lesen Sie die charakteristischen Werte der Anleihe ab.

Tragen Sie diese in die Tabelle in der Randspalte ein.

**[]**

b) Berechnen Sie den Kaufpreis K\_0' eines Stückes der Anleihe.

**[]**

c) Berechnen Sie die zugehörigen Kuponzahlungen (Zinsen) K.

**[]**

d) Ermitteln Sie den Tilgungsbetrag T.

**[]**

e) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse grafisch dar.

-----

Tilgungskurs: 100,00 %

Restlaufzeit (Jahre): 22,9

Emissionstag/Preis: 15.03.06/99,72 %

Emissionsvolumen: 1,213232e+10 EUR

-----

Emissionsdaten

Kurs: 99,72

Datum: 15.03.2006

Volumen: 12,132.322.000,00

Währung EUR

-----

Größe | Wert

Stückelung | **[]**

Verzinsung | **[]**

Laufzeit | **[]**

Emissionskurs | **[]**

Tilgungskurs | **[]**

Nominalwährung | **[]**

----------

##-6.004

4,75 % voestalp.-Anl. 11-18/S.1

Letzter Preis 109,150 -0,14 % \*

ISIN: AT0000A0MS5S

Datum, Zeit 16.04.2014, 12:45:12

Emittent voestalpine AG

Marktsegment corporates standard

Wertpapierart/-gattung Anleihe

Markt Geregelter Freiverkehr

Handelszeiten 11:50 -12:45

-----

Fälligkeit 05.02.2018

Restlaufzeit 3,79 Jahre

Laufzeitbeginn 03.02.2011

Emissionsvolumen (bei Stücknotiz: Stückanzahl) 500.000.000,00

Stückelung 1.000,00

-----

a) Ermitteln Sie den Kurs dieser Anleihe am 16. 4. 2014.

**[]**

b) Lesen Sie die charakteristischen Werte der Anleihe ab.

Tragen Sie diese in die Tabelle in der Randspalte ein.

**[]**

c) Berechnen Sie den Kaufpreis K\_0' eines Stückes der Anleihe zum Nominalwert K\_0 =€ 1.000,00.

**[]**

d) Berechnen Sie die zugehörigen Kuponzahlungen (Zinsen) K.

**[]**

e) Ermitteln Sie den Tilgungsbetrag T.

**[]**

f) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse grafisch dar.

**[]**

-----

Tilgungskurs: 100,00 %

Restlaufzeit (Jahre): 3,8

Emissionstag/Preis: 03.02.11/100,89 %

Emissionsvolumen: 500.000.000 EUR

Kleinste Stückelung: 1.000

-----

Größe | Wert

Stückelung | **[]**

Verzinsung | **[]**

Laufzeit | **[]**

Emissionskurs | **[]**

Tilgungskurs | **[]**

Emittent | **[]**

Emmisionsvolumen | **[]**

j-170 - Kurs- und Rentabilitätsrechnung

### \*\*-6.2 Rendite und Kurs

|Definition: Rendite|

Der effektive Zinssatz oder die Rendite i' einer Anleihe ist jener dekursive Jahreszinssatz, für den die Leistungen des Investors und die Gegenleistungen des Emittenten äquivalent sind.

----------

##-Beispiel 6.3: Rendite einer Anleihe (Fortsetzung von Beispiel 6.2)

Anleihe: K\_0 =€ 5.000,00; C\_0 =98; n =5 Jahre; i =5 %; Tilgung zum Nennwert

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

b) Erstellen Sie eine Äquivalenzgleichung, indem Sie den Zahlungsstrom zum Zeitpunkt der Emission (t =0) bewerten.

c) Berechnen Sie die Rendite i' der Anleihe.

d) Erklären Sie, warum die Rendite größer als die Nominalverzinsung ist.

e) Stellen Sie an Stelle der tatsächlichen Zahlungen die beiden Kurse und den Zinssatz auf einer Zeitachse grafisch dar.

f) Berechnen Sie erneut die Rendite i' der Anleihe, indem Sie vom Emissionskurs C\_0 ausgehen.

Lösung:

b) Dem Kaufpreis von € 4.900,00 stehen fünf Kuponzahlungen von je € 250,00 und der Tilgungsbetrag von € 5.000,00 gegenüber.

Abzinsen auf t =0 liefert die Äquivalenzgleichung:

4900 =250 \*(1 +i')^(-1) +250 \*(1 +i')^(-2) +250 \*(1 +i')^(-3) +250 \*(1 +i')^(-4) +250 \*(1 +i')^(-5) +5000 \*(1 +i')^(-5)

c) Mit Technologieunterstützung erhalten Sie i' ~~0,054 68.

Die Rendite i' der Anleihe ist etwa 5,468 % und damit größer als die Nominalverzinsung von 5 %.

d) Die Rendite i' der Anleihe ist größer als die Nominalverzinsung von 5 %, weil der zu zahlende Kaufpreis von € 4.900,00 kleiner als der ausbezahlte Tilgungsbetrag von € 5.000,00 ist und die Kuponzahlungen von je € 250,00 genau 5 % vom Nominalwert von € 5.000,00 sind.

e) Man erkennt, dass man diese grafische Darstellung auch erhält, wenn man alle Zahlungen des tatsächlichen Zahlungsstroms durch K\_0 =€ 5.000,00 dividiert und mit 100 multipliziert.

(Das ist für den Kaufpreis die Berechnung des zugehörigen Ausgabekurses.)

f) Mit q =1 +i' ergibt sich folgende Gleichung:

98 =5 \*q^(-1) +5 \*q^(-2) +5 \*q^(-3) +5 \*q^(-4) +5 \*q^(-5) +100 \*q^(-5)

Mit der zweiten Lösungsvariante erhalten Sie q ~~1,0547 und damit i' ~~0,0547. Die Rendite i' der Anleihe ist etwa 5,47 %.

j-171 - Rendite und Kurs

##-Beispiel 6.4: Rendite einer Anleihe mit Excel

Anleihe: K\_0 =€ 100,00; C\_0 =98; n =5 Jahre; i =5 %; Tilgung zum Nennwert

Berechnen Sie die Rendite der Anleihe mithilfe der Excel-Funktion IKV().

Lösung:

Die Zahlungen brauchen nur geeignet (Einzahlungen sind negativ anzuschreiben und die zeitliche Reihenfolge muss stimmen) eingegeben zu werden.

Die Funktion IKV() liefert (siehe Randspalte):

Die Rendite i' der Anleihe ist etwa 5,468 %.

-----

A | B

t in Jahren | Zahlung

0 | -€ 4.900,00

1 | € 250,00

2 | € 250,00

3 | € 250,00

4 | € 250,00

5 | € 5.250,00

=5,468 %

----------

##### \*\*-Sekundärmarktrendite

Bereits emittierte Anleihen werden auf dem Sekundärmarkt (an der Börse) gehandelt.

Die |Sekundärmarktrendite SMR| betrug beispielsweise Mitte September 2009 für Bundesanleihen 3,068 %. Anfang April 2014 waren es dagegen nur noch 1,168 %.

Der |Marktzinssatz i\_M|, der sich an der Sekundärmarktrendite orientiert, ist maßgeblich für die Kursbildung von Anleihen.

-----

ZINSSÄTZE ÖSTERREICHS

Sekundärmarktrenditen in Prozent

Emittenten Gesamt 1,179

Bundesanleihen 1,168

Inländischen Emittenten 1,171

(Quelle: Der Standard, 8. April 2014)

----------

Hinweis: Im Normalfall gilt i\_M =i', d. h., die Rendite der Anleihe entspricht dem Marktzinssatz.

----------

|Preis einer Anleihe|

Der "faire" Preis einer Anleihe K\_0' ist der Barwert PV aller zukünftigen Zahlungen der Anleihe. Die Zahlungen bestehen aus Kuponzahlungen und dem Tilgungsbetrag am Ende der Laufzeit. Dieser Zahlungsstrom wird zum aktuellen Marktzinssatz i\_M auf den Bezugszeitpunkt abgezinst und summiert:

K\_0' =PV(i\_M) Barwert der Anleihe zum Marktzinssatz i\_M, Marktwert

K\_0' =PV(i\_M) ='Si[t=1;n](K\_0 \*i \*(1 +i\_M)^(-t) +T \*(1 +i\_M)^(-n)) =

='Si[t=1;n]((K\_0 \*i)/((1 +i\_M)^t) +T/((1 +i\_M)^n)) =

=K\_0 \*i \*((1 +i\_M)^n -1)/((i\_M) \*1/((1 +i\_M)^n) +T/((1 +i\_M)^n)

-----

Für die n Kuponzahlungen K\_0 \*i wird die Barwertformel mit R =K =K\_0 \*i verwendet.

B\_(nach) =R \*((1 +i)^n -1)/i \*1/((1 +i)^n)

----------

##-Beispiel 6.5: Kaufpreis und Kurs einer Anleihe

Anleihe: K\_0 =€ 10.000,00; n =3 Jahre; i =5 %; Tilgung zum Nennwert

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse grafisch dar.

b) Berechnen Sie den Kaufpreis der Anleihe mit einer Restlaufzeit von 3 Jahren für die Marktzinssätze 3 %, 5 % und 7 %.

c) Berechnen Sie die zu b) gehörigen |Kurse|.

Interpretieren Sie den Zusammenhang zwischen Kurs und Rendite.

d) Stellen Sie den Kurs der Anleihe in Abhängigkeit vom Marktzinssatz grafisch dar und interpretieren Sie die Darstellung.

j-172 - Kurs- und Rentabilitätsrechnung

Lösung:

b) Sie berechnen den Kaufpreis K\_0' der Anleihe für die Restlaufzeit von n =3 Jahren, indem Sie den Zahlungsstrom zum Marktzinssatz i\_M abzinsen.

K\_0' =PV(i\_M) =500 \*(1 +i\_M)^(-1) +500 \*(1 +i\_M)^(-2) +10500 \*(1 +i\_M)^(-3)

K\_0' =PV(0,03) =500 \*1,03^(-1) +500 \*1,03^(-2) +10500 \*1,03^(-3)

i\_M in % | PV(i\_M) in €

3 | 10565,72

5 | 10000,00

7 | 9475,14

Alternativ könnten Sie auch mit den Kursen und dem Zinssatz rechnen.

-----

c) Wenn Sie die Kaufpreise durch den Nennwert K\_0 =€ 10.000,00 dividieren und mit 100 multiplizieren, erhalten Sie die zugehörigen Kurse in Abhängigkeit vom Marktzinssatz i\_M.

C(i\_M) =5 \*(1 +i\_M)^(-1) +5 \*(1 +i\_M)^(-2) +105 \*(1 +i\_M)^(-3)

i\_M in % | C(i\_M)

3 | 105,66 >100

5 | 100,00 =100

7 | 94,75 <100

* Kaufen Sie die Anleihe mit einer Restlaufzeit von n =3 Jahren zum Kurs von C =105,66, so erzielen Sie damit eine Rendite von i' =3 %.
* Bei einem Kurs von C =100 ist die erzielte Rendite i' =i =5 %.
* Bei einem Kurs von C =94,75 ist die erzielte Rendite i' =7 %.

Je |höher| der |Marktzinssatz i\_M| ist, desto |niedriger| ist der |Kurs C| der Anleihe.

-----

d) Für die grafische Darstellung des Kurses in Abhängigkeit vom Marktzinssatz können Sie die Excel-Funktion BW() verwenden, weil der Kurs einer Anleihe stets der Barwert der Zahlungen für den Nominalwert 100 ist.

Tipp: Die Rendite der Anleihe entspricht in der Regel dem Marktzinssatz.

Excel-Funktion: -BW(Zinssatz; Dauer; Kupon; Tilgungskurs)

-----

A | B

Marktzinssatz | Kurs C

0 % | 115,00

1 % | 111,76

2 % | 108,65

3 % | 105,66

4 % | 102,78

5 % | 100,00

6 % | 97,33

7 % | 94,75

8 % | 92,27

9 % | 89,87

10 % | 87,57

Aus der grafischen Darstellung des Kurses C für verschiedene Marktzinssätze i\_M erkennen Sie:

Je |niedriger| der |Marktzinssatz i\_M| ist, desto |höher| ist der |Kurs C| einer Anleihe.

-----

Zwischen Kurs C und Rendite (Rentabilität, Effektivverzinsung) i' besteht eine

|Wechselbeziehung:|

* Zu jedem |Kurs C| gehört eine |Rendite i'| und umgekehrt.
* |Steigt |der |Kurs C|, so sinkt die |Rendite i'| und umgekehrt.

----------

Tipp: Die Begriffe Rendite, Effektivverzinsung und Rentabilität werden in der Finanzmathematik synonym verwendet.

j-173 - Rendite und Kurs

|Zusammenhang zwischen Kurs C und Rendite i'|

* Je |niedriger| der Kurs C, umso |höher| ist die Rendite i', und je |höher| der Kurs ist, umso |niedriger| ist die Rendite (Effektivverzinsung).
* Beim Kurs C =100 ist die Effektivverzinsung gleich der Nominalverzinsung.
* Für K\_0 =100 GE gilt K\_0' =C GE.
* Drei Fälle sind möglich:

i' >i K\_0' <K\_0 <=> C <100 Notierung unter pari

i' =i K\_0' =K\_0 <=> C =100 Notierung al pari

i' <i K\_0' >K\_0 <=> C >100 Notierung über pari

----------

Wenn man in der Formel für den vom Marktzinssatz i\_M abhängigen Barwert PV(i\_M) für den Nominalwert 100 GE verwendet (K\_0 =100 GE), bekommt man eine Formel zur Berechnung des Kurses der Anleihe bei Tilgung zum Nennwert.

----------

|Kursformel bei Tilgung zum Nennwert|

Der (Emissions)Kurs eine Anleihe hängt von der (Rest)Laufzeit n, dem Nominal-zinssatz i und dem Marktzinssatz i\_M bei Tilgung zum Nennwert wie folgt ab:

C(i\_M) ='Si[t=1;n](100 \*i \*(1 +i\_M)^(-t)) +100 \*(1 +i\_M)^(-n) =

='Si[t=1;n]((100 \*i)/((1 +i\_M)^t) +(100)/((1 +i\_M)^n) =

=100 \*i \*((1 +i\_M)^n -1)/(i\_M) \*1/((1 +i\_M)^n) +(100)/((1 +i\_M)^n)

-----

C(i\_M) =100 \*i \*((1 +i\_M)^n -1)/(i\_M) \*1/((1 +i\_M)^n) +(100)/((1 +i\_M)^n)

----------

##-Beispiel 6.6: Emissionskurs einer Anleihe

Anleihe: Laufzeit n =4 Jahre; i =6 %; Tilgung zum Nennwert

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

b) Berechnen Sie den |Ausgabekurs C\_0| für i\_M =3 %, 6 % und 9 %.

c) Stellen Sie den Kurs der Anleihe in Abhängigkeit vom Marktzinssatz grafisch dar. Lösung:

b) Ablesen aus der Randspalte oder Einsetzen in die Kursformel liefert:

C\_0 =c(i\_M) ='Si[t=1;4](6 \*(1 +i\_M)^(-t)) +100 \*(1 +i\_M)^(-4) =

=6 \*((1 +i\_M)^4 -1)/(i\_M) \*1/((1 +i\_M)^4) +(100)/((1 +i\_M)^4)

-----

i\_M in % | C\_0 =C(i\_M)

3 | 111,15 >100

6 | 100,00 =100

9 | 90,28 <100

j-174 - Kurs- und Rentabilitätsrechnung

##-Beispiel 6.6: Emissionskurs einer Anleihe (Fortsetzung)

c) In GeoGebra können Sie einfach die Funktion aus b) verwenden.

{{Grafik: Nicht darstellbar.}}

----------

##-Beispiel 6.7: Kurs einer Anleihe

Kenngrößen der Anleihe:

Nennwert K\_0 =€ 100,00

Nominalzinssatz i =5,375 %

Kupon jährlich K =€ 100,00 \*0,05375 =€ 5,375

Tilgung al pari T =€ 100,00

Restlaufzeit n =5 Jahre

a) Stellen Sie den Zahlenstrom auf einer Zeitachse dar.

b) Berechnen Sie den |Kurs C| der Anleihe für einen Marktzinssatz i\_M von 4,5 %.

c) Erklären Sie, wie man sich in Abhängigkeit vom Marktzinssatz i\_M bei der Frage "kaufen oder nicht kaufen?" verhalten soll.

Lösung:

b) C(0,045) =5,375 \*(1,045^5 -1)/(0,045) \*1/(1,045^5) +100 \*1,045^(-5) =103,84

Der Kurs beträgt C =103,84.

c) Da der Marktzinssatz i\_M =4,5 % beträgt, ist es sinnvoll die Anleihe bis zu einem Kurs C <103,84 zu kaufen.

In diesem Fall wäre die Rendite i' größer als der Marktzinssatz.

Man hätte in diesem Fall ein "gutes Geschäft" gemacht.

Kauft man zu einem Kurs, der größer als 103,84 ist, ergibt sich daraus eine Rendite, die kleiner als der Marktzinssatz ist.

Dieses "Geschäft" wäre weniger vorteilhaft.

----------

##-Beispiel 6.8: Kurs einer Anleihe - Kaufempfehlung

Eine 6 %-Anleihe mit einer Laufzeit von 27 Jahren (Tilgung zum Nennwert) wird nach 20 Jahren al pari verkauft.

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse grafisch dar.

b) Berechnen Sie den Kurs C der Anleihe für die restliche Laufzeit bei einem Marktzinssatz i\_M von 8 %.

c) Die Anleihe wird zu einem Kurs von C =92 angeboten.

Entscheiden Sie, ob der Kauf zu diesem Kurs empfehlenswert ist.

j-175 - Rendite und Kurs

Lösung:

b) Wenn man K\_0 =€ 100,00 wählt, kann man die Kursformel für die Restlaufzeit 7 Jahre (n =27 -20 =7) verwenden. Natürlich könnte man auch die Gleichung aus der Grafik in der Randspalte ablesen.

Kupon K =€ 100,00 \*0,06 =€ 6,00;

Tilgungsbetrag T =€ 100,00

C(0,08) =6 \*(1,08^7 -1)/(0,08) \*1/(1,08^7) +100 \*1,08^(-7) =89,59

Der Kurs beträgt C =89,59.

Kauft man die Anleihe zu einem Kurs von C =89,59, dann ergibt die Anleihe eine Rendite von 8 %.

c) Kauft man die Anleihe zum Kurs C =92 (>89,59), dann ergibt sich daraus eine Rendite von i' ~~7,511 % (<8 % =i\_M).

Ein Kauf dieses Wertpapiers zum Kurs C =92 ist daher nicht empfehlenswert, da die Rendite bei Veranlagung in vergleichbaren Wertpapieren (i\_M =8 %) höher wäre.

----------

##-Beispiel 6.9: Rendite bei Kauf und Verkauf eines Wertpapiers

Ein Wertpapier mit dem nominellen Zinssatz i =4 % und einer Gesamtlaufzeit von 10 Jahren und Tilgung al pari, wurde zum Kurs 97 erworben und nach 6 Jahren zum Kurs 102 verkauft.

a) Stellen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse dar.

b) Berechnen Sie die Effektivverzinsung i' für den Verkäufer.

Lösung:

b) Die Bestimmungsgleichung für die Rendite i' lautet:

97 =4 \*((1 +i')^6 -1)/(i') \*1/((1 +i')^6) +102 \*(1 +i')^(-6)

i' ~~4,88 %

Die Effektivverzinsung beträgt etwa 4,88 %.

j-176 - Kurs- und Rentabilitätsrechnung

|Zusammenfassung - Aufgabenstellungen|

Bei festverzinslichen Wertpapieren gibt es im Wesentlichen zwei Aufgabenstellungen:

1. Ermittlung des |Kurses| bei Vorgabe des Marktzinssatzes:

Der Kurs entspricht dem Barwert der Rückflüsse für einen Nominalwert von 100 GE.

2. Ermittlung der |Rendite| bei Vorgabe des Kurses:

Die Rendite ist der Effektivzinssatz des Zahlungsstroms.

-----

Hinweis: Weil die Rendite einer Anleihe der Effektivzinssatz des Zahlungsstromes ist, kann man auch die Funktion IKV() in Excel zur Berechnung der Rendite i' verwenden.

----------

##### \*\*-Übungsaufgaben

Hinweis: Spesen und Gebühren bleiben bei den Berechnungen zu Anleihen zunächst ohne Berücksichtigung.

Stellen Sie bei allen Übungsaufgaben die Zahlungsströme auf einer geeigneten Zeitachse grafisch dar.

-----

##-6.005 Die Nominalverzinsung einer Anleihe mit dem Nennwert K\_0 =€ 3.000.000,00, einer Laufzeit von 10 Jahren und einer Effektivverzinsung von i' =4 % ist i =6 %.

a) Ermitteln Sie den Tilgungsbetrag T bei Tilgung al pari.

**[]**

b) Berechnen Sie

* den Kupon K,
* den Kaufpreis K\_0' und
* den Emissionskurs C\_0.

**[]**

----------

##-6.006 Eine Anleihe mit dem Nominalwert K\_0 =€ 1.000,00, i =3 % und einer Laufzeit von 38 Jahren hat eine Rendite von i' =2,5 %.

Der Tilgungskurs C\_(38) ist 100.

a) Ermitteln Sie den Tilgungsbetrag T.

**[]**

b) Berechnen Sie

* den Kupon K und den Kaufpreis K\_0' und
* den Emissionskurs C\_0.

**[]**

----------

##-6.007 Eine 4,5-prozentige Anleihe mit dem Nennwert K\_0 =€ 3.000.000,00, einer Laufzeit von 15 Jahren und einem effektiven Zinssatz von i' =6 %, ist mit einem Aufgeld von 4 % dek. p. a. zurückzuzahlen.

Berechnen Sie

* den Kupon K und den Kaufpreis K\_0',
* den Emissionskurs C\_0 und
* den Tilgungsbetrag für den angegebenen Tilgungskurs C\_(15) =104.

**[]**

-----

Hinweis: Ein Aufgeld von 4 % bei der Tilgung bedeutet, dass der Tilgungskurs 100 +4 =104 ist.

----------

##-6.008 Anleihe: n =25; i =3 %; C\_0 =96; Tilgung zum Nennwert Berechnen Sie die Rendite i' dieser Anleihe.

**[]**

----------

##-6.009 Anna erwirbt ein 4-prozentiges Wertpapier zum Kurs 97.

Nach 16 Jahren verkauft sie es zum Kurs 102.

Berechnen Sie, welche Rendite i' Anna erwarten kann.

**[]**

----------

##-6.010 Katharina erwirbt eine 5-prozentig Anleihe zum Kurs 95 und verkauft sie nach 15 Jahren zum Kurs al pari.

Berechnen Sie, welche Rendite i' Katharina erwarten kann.

**[]**

----------

##-6.011 Sarah kauft Wertpapiere zum Nennwert von € 50.000,00 um den Betrag von € 44.230,00. Die Laufzeit der Wertpapiere ist 10 Jahre, der nominelle Zinssatz 8,5 % und die Tilgung erfolgt zum Nennwert.

Berechnen Sie

a) den Emissionskurs C\_0 und

**[]**

b) die effektive Verzinsung i' ohne Berücksichtigung der KESt.

**[]**

j-177 - Übungsaufgaben

##-6.012 Die Nominalverzinsung einer Anleihe mit einer Laufzeit von 6 Jahren ist 4 %. Die Tilgung erfolgt zum Nennwert.

Der Emissionskurs der Anleihe ist C\_0 =98,5.

Die Anleihe wird zu einem Nominalwert von € 100.000,00 gekauft.

Die Rendite beträgt i' =5 %.

Spesen und Gebühren bleiben ohne Berücksichtigung.

a) Berechnen Sie den Kaufpreis der Anleihe.

**[]**

b) Berechnen Sie den Kurs der Anleihe.

**[]**

c) Erklären Sie, wie sich der Kaufpreis der Anleihe ändert, wenn die Rendite i' oder der Marktzinssatz i\_M steigt.

**[]**

d) Stellen Sie den Ausgabekurs der Anleihe in Abhängigkeit von der Rendite i' (oder vom Marktzinssatz i\_M) grafisch dar.

**[]**

----------

##-6.013 Eine Anleihe wurde am 22. 11. zu folgenden Bedingungen begeben: Ausgabekurs: 101,2; Tilgung: zum Nennwert; Laufzeit: 6 Jahre; Nominalzinssatz: 5,375 %

a) Berechnen Sie die Rendite der Anleihe.

**[]**

b) Herr M. kauft die Anleihe zum Nominalwert von € 50.000,00.

Berechnen Sie

* den Kaufpreis K\_0',
* die jährliche Kuponzahlung K und
* den Tilgungsbetrag T am Ende der Laufzeit.

**[]**

c) Drei Jahre nach Emission der Anleihe ist der Kurs der Anleihe C =98.

Die Anleihe wurde am Tag der Emission zum Kurs 101,2 gekauft und nach drei Jahren zum Kurs 98 wieder verkauft.

Berechnen Sie die Rendite dieser Anleihe.

**[]**

d) Herr M. überlegt, ob er die Anleihe zwei Jahre nach Emission zu dem Kurs 97 kaufen soll, wenn vergleichbare Anleihen eine Rendite von 6 % (=i\_M) haben.

Treffen Sie eine Entscheidung und Begründung.

**[]**

-----

Renditen internationaler Anleihen

... | 2 Jahre | 5 Jahre | 10 Jahre

Australien | 2,655 | 3,42 |4 4,085

Deutschland | 0,161 | 0,600 | 1,541

Frankreich | 0,247 | 0,895 | 2,037

Großbritannien | 0,639 | 1,889 | 2,675

Italien | 0,709 | 1,775 | 3,195

Japan | 0,078 | 0,183 | 0,610

Kanada | 1,078 | 1,729 | 2,470

Österreich | 0,250 | 0,770 | 1,660

Schweiz | -0,100 | 0,150 | 0,910

Spanien | 0,584 | 1,724 | 3,182

USA | 0,403 | 1,673 | 2,705

(Quelle: Der Standard)

----------

##-6.014 Spanische Anleihe: Restlaufzeit n =7 Jahre, i =2,5 %, i' =3,182 %

a) Tilgung al pari. Berechnen Sie den Kurs.

**[]**

b) Tilgungskurs C\_7 =103. Berechnen Sie den Emissionskurs.

**[]**

----------

##-6.015 Aus der Broschüre "Österreichische Bundesanleihen" der ÖBFA:

"Im Jahr 2010 erfolgt der Kauf einer österreichischen Bundesanleihe mit Laufzeit bis 2020 (3,9 % Kupon) zum Kurs 109, Tilgung erfolgt am Ende der Laufzeit zum Nennwert =100. [...] Die exakte Endfälligkeitsrendite [beträgt] 2,85 %."

a) Stellen Sie eine Äquivalenzgleichung für die Rendite i' auf.

**[]**

b) Zeigen Sie, dass 2,85 % eine Lösung dieser Gleichung ist.

**[]**

c) Berechnen Sie die Rendite z. B. mithilfe der Funktion IKV() in Excel.

**[]**

-----

In der Broschüre "Österreichische Bundesanleihen" der ÖBFA heißt es:

"Für die Berechnung [der Rendite] nach ICMA [International Capital Market Association] gibt es keine analytische Lösung. Eine Lösung der Gleichung kann z. B. mit der Zielwertsuche über Excel erreicht werden."

----------

##-6.016 Kursformeln

a) Australische Anleihe: i =2 %; Laufzeit n =5 Jahre; i' =3,424 %; Tilgungskurs C\_5 =103.

Berechnen Sie den Emissionskurs.

**[]**

b) Leiten Sie aus der Formel für den Kurs einer Anleihe bei Tilgung zum Nennwert in der Randspalte eine Formel bei Tilgung zum Tilgungskurs C\_n her.

**[]**

c) Zeigen Sie, dass Ihre Formel aus b) zum selben Emissionskurs wie in a) führt.

**[]**

-----

C(i\_M) =100 \*i \*((1 +i\_M)^n -1)/(i\_M) \*1/((1 +i\_M)^n) +(100)/((1 +i\_M)^n)

j-178 - Kurs- und Rentabilitätsrechnung

##-6.017 Für die historische Bundesanleihe 1995-2005/7 mit C\_0 =99,75, i =6,5 %, n =10 und Tilgung zum Nennwert hat die Österreichische Kontrollbank eine Rendite von 6,534 83 % angegeben.

Zeigen Sie, dass diese Rendite i' korrekt ist.

**[]**

----------

##-6.018 Für zwei Anleihen liegen folgende Angebote vor:

1. Anleihe: Emissionskurs =93

nomineller Zinssatz i =0,04

n =5 Jahre

Tilgung al pari

-----

2. Anleihe: Emissionskurs =102

nomineller Zinssatz i =0,045

n =8 Jahre

Tilgung al pari

a) Berechnen Sie die Renditen der beiden Anleihen.

**[]**

b) Erklären Sie, welche Anleihe für den Käufer ertragreicher ist.

**[]**

----------

##-6.019 Für zwei Anleihen liegen folgende Angebote vor:

1. Anleihe: Emissionskurs =95

i =4 %

n =10 Jahre

Tilgung al pari

-----

2. Anleihe: Emissionskurs =102

i =4,5 %

n =10 Jahre

Tilgung al pari

a) Berechnen Sie die Renditen der beiden Anleihen.

**[]**

b) Erklären Sie, welche Anleihe für den Käufer ertragreicher ist.

**[]**

----------

##-6.020 Vergleich dreier Anleihen - Tilgung al pari

1. Anleihe: Emissionskurs =85,86; i =0,035; n =8 Jahre.

2. Anleihe: Emissionskurs =108,06; i =0,045; n =12 Jahre.

3. Anleihe: Emissionskurs =116,01; i =0,05; n =9 Jahre.

a) Berechnen Sie die Renditen der Anleihen.

**[]**

b) Erklären Sie, für welche der drei Anleihen sich ein Anleger entscheiden soll.

**[]**

----------

##-6.021 Vergleich dreier Anleihen - Tilgung al pari

1. Anleihe: Emissionskurs =82,84; i =0,03; n =5 Jahre.

2. Anleihe: Emissionskurs =121,16; i =0,0425; n =15 Jahre.

3. Anleihe: Emissionskurs =107,78; i =0,05; n =15 Jahre.

a) Berechnen Sie die Renditen der Anleihen.

**[]**

b) Erklären Sie, für welche der drei Anleihen sich ein Anleger entscheiden soll.

**[]**

----------

##-6.022 Die Nominalverzinsung einer Anleihe mit einer Laufzeit von 4 Jahren ist 6 %. Die Tilgung erfolgt zum Nennwert.

Der Emissionskurs der Anleihe ist C\_0 =98,5.

Von der Anleihe wird ein Nominalwert von € 100.000,00 gekauft.

Die Rendite beträgt i' =5 %.

Spesen und Gebühren bleiben ohne Berücksichtigung.

a) Berechnen Sie den Kaufpreis K\_0' der Anleihe.

**[]**

b) Berechnen Sie den Kurs der Anleihe.

**[]**

c) Erklären Sie, wie sich der Kaufpreis der Anleihe ändert, wenn die Rendite i' oder der Marktzinssatz i\_M steigt.

**[]**

d) Stellen Sie den Ausgabekurs der Anleihe in Abhängigkeit von der Rendite i' (oder vom Marktzinssatz i\_M) grafisch dar.

**[]**

----------

Aus den Emissionsdaten einer Anleihe:

Emissionsdaten

Kurs 99,72

Datum 15.03.2006

Volumen 12.132.322.000,00

Währung EUR

Weil die Währung dieser Anleihe EUR ist, werden die Zinsen und der Tilgungsbetrag in Euro ausbezahlt.

Und natürlich ist auch das (Emissions)Volumen in Euro angegeben.

----------

Hinweis: Der (Emissions)Kurs einer Anleihe hängt von der (Rest) Laufzeit n, dem Nominalzinssatz i und dem Marktzinssatz i\_M ab:

C(i\_M) =100 \*i \*((1 +i\_M)^n -1)/(i\_M) \*1/((1 +i\_M)^n) +(100)/((1 +i\_M)^n)

j-179 - Ziele erreicht?

##-6.023 Ein Anleger hat für eine Geldanlage folgende Anleihen zur Auswahl:

Anleihe | Laufzeit | Kupon | Kurs | Tilgung

A | 4 Jahre | 4,5 % | 94,00 | Nennwert

B | 4 Jahre | 7,5 % | 102,90 | Nennwert

Erklären Sie, welche Anleihe der Investor wählen soll, wenn er aufgrund der Rendite

a) vor KESt und

b) nach KESt (25 %) entscheidet.

----------

##-6.024 Beweisen Sie die Kursformel bei Tilgung zum Nennwert mithilfe der Summenformel für die geometrische Reihe.

**[]**

----------

##-6.025 Die Zahlungen, die bei einer Anleihe mit i =5 % auftreten, sind in der Excel- Tabelle mit der berechneten Rendite, zusammengestellt.

a) Berechnen Sie den Nominalwert, den Emissions- und den Tilgungskurs.

**[]**

b) Stellen Sie eine Äquivalenzgleichung für die Rendite i' dieser Anleihe auf, indem Sie die Zahlungen auf t =5 aufzinsen.

**[]**

c) Lösen Sie Ihre Äquivalenzgleichung für die Rendite i' und bestätigen Sie die angegebene Effektivverzinsung von 5,468 %.

**[]**

t in Jahren | Zahlung

0 | -€ 4.900,00

1 | € 250,00

2 | € 250,00

3 | € 250,00

4 | € 250,00

5 | € 5.250,00

=5,468 %

----------

##### \*\*-Ziele erreicht?

##-Z 6.1 Frau Traxl besitzt einige Stück einer Anleihe mit Emissionskurs 102, Nominalzinssatz i =4 %, Laufzeit 7 Jahre und Stückelung € 1.000,00.

a) Frau Traxl erhält jährliche Kuponzahlungen in Höhe von € 400,00.

Erklären Sie, wie man aus dieser Information schließen kann, wie viel Stück der Anleihe Frau Traxl besitzt und berechnen Sie, wie viel sie dafür zum Emissionszeitpunkt der Anleihe bezahlt hat.

**[]**

b) Erstellen Sie eine Äquivalenzgleichung zur Bestimmung des Tilgungskurses nach 7 Jahren, wenn die Rendite i' der Anleihe bekannt ist.

**[]**

c) Frau Traxl möchte die Anleihen bereits 5 Jahre nach dem Kauf zum selben Tilgungskurs, wie ursprünglich nach 7 Jahren vereinbart wurde, verkaufen. Erklären Sie, ob sich für Frau Traxl dadurch die Rendite ändert.

**[]**

d) Frau Traxl kann die Anleihen nur zum fairen Preis verkaufen.

Lesen Sie diesen aus der Grafik in der Randspalte ab, wenn der Marktzinssatz i\_M zum Zeitpunkt des Verkaufs 5 % beträgt.

Begründen Sie ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

**[]**

----------

##-Z 6.2 Die Zeitachse in der Randspalte zeigt den Zahlungsstrom einer Anleihe, die nach 5 Jahren al pari getilgt wird.

Anfallende KESt wurde dabei nicht berücksichtigt.

a) Bestimmen Sie den Emissionskurs und den Nominalzinssatz der Anleihe. Lesen Sie die dazu nötigen Informationen aus der Grafik ab.

**[]**

b) Herr Steiner überlegt, die dargestellte Anleihe um € 52.000,00 zu erwerben oder in eine zusätzliche Maschine für seinen Betrieb zu investieren. Für diese werden die folgenden Kosten und Rückflüsse prognostiziert:

Anschaffungskosten: € 50.000,00

Jährliche Rückflüsse: € 9.000,00

Nutzungsdauer: 5 Jahre

Liquidationserlös am Ende des 5. Jahres: € 10.000,00 Beurteilen Sie anhand der Effektivverzinsung, ob Herr Steiner Anleihen erwerben oder eine zusätzliche Maschine kaufen soll.

**[]**

c) Zur Berechnung der Rendite der Anleihe unter Berücksichtigung der KESt wurde die folgende Äquivalenzgleichung aufgestellt.

52000 =1750 \*((1 +i \*0,75)^5 -1)/(i \*0,75) \*1/((1 +i \*0,75)^5) +50000 \*(1 +i \*0,75)^(-5)

Erklären Sie, welcher Fehler dabei gemacht wurde.

j-180 - Lösungen

## \*\*-Lösungen

#### \*\*-1 Wachstums- und Abnahmeprozesse

##-1.002

a) 3,16; 5,01; 63,1; 0,01

b) 1,73; 2,16; 7,22; 0,11

c) 1,65; 2,01; 6,05; 0,14

----------

##-1.004 Begründungen:

f\_1 verläuft durch (0|1) und (1|3).

f\_2 verläuft durch (0|-2) und (1|-6).

f\_3 verläuft durch (1|-4), da (1|-2 \*3 +2).

Oder: Die Funktion verläuft durch (0|0), da (0|-2 \*1 +2) und ist fallend, da die Funktion 3^x steigend ist und durch die Multiplikation mit -2 fallend wird.

f\_4 verläuft durch (0|0,5) und (1|1,5).

----------

##-1.005

a) c =3, d =0

f(0) =1; g(0) =3

f(1) =10; g(1) =3 \*10 =30

Alle Funktionswerte der ursprünglichen Funktion f wurden in g verdreifacht.

-----

b) c =1, d =1

f(0) =1; g(0) =1 +1 =2

f(1) =3, g(1) =3 +1 =4

Alle Funktionswerte der ursprünglichen Funktion f wurden in g um den Wert 1 erhöht.

Der Graph der Funktion g entsteht, indem Sie f um eine Einheit nach oben verschieben.

-----

c) c =0,1, d =2

f(0) =1; g(0) =0,1 +2 =2,1

f(1) =3; g(1) =0,1 \*3 +2 =2,3

Alle Funktionswerte der ursprünglichen Funktion f wurden in g zunächst mit 0,1 multipliziert und dann um den Wert 2 erhöht. Gleichzeitige Stauchung mit dem Faktor 0,1 und Parallelverschiebung um d =2 Einheiten nach oben.

j-181 - Lösungen

##-1.006 Der Graph der Funktion g ist bezüglich f um eine Einheit nach rechts verschoben

----------

##-1.007 f\_1(x) =2^x steigt am stärksten

----------

##-1.009

a) 0,5; 0,7; 0,9; 1,1; 1

b) 1; 1,37; 1,94; 2,21; 2,1

c) 1,1; 1,5; 2,13; 2,42; 2,3

gerundete Werte

----------

##-1.010

a) f(x) =4^x

b) Q(2|16); R(0,5|2)

----------

##-1.011

x | f\_1(x) =1,5^x | f\_2(x) =2^x

-3 | 8/(27) | 0,125

-2 | 4/9 | 0,25

-1 | 2/3 | 0,5

0 | 1 | 1

2 | 2,25 | 4

3 | 3,375 | 8

-----

x | f\_3(x) =3^x | f\_4(x) =10^x

-3 | /(27) | 0,001

-2 | 1/9 | 0,01

-1 | 1/3 | 0,1

0 | 1 | 1

2 | 9 | 100

3 | 27 | 1000

----------

##-1.012

a) {4}, b) {-2}, c) {0}, d) {2/3},

e) {3}, f) {2/5}, g) {-3/2},

h) {2/3}, i) {-1/4}, j) {1/2},

k) {-3/2}, l) {-1/2}, m)(-3/4), {6/7}

----------

##-1.013

a) 7,27 J

b) 6,21 T

c) 5,64 h

----------

##-1.014

... | a) | b) | c)

Potenz | 2^4 =16 | 3^2 =125 | 5^3 =125

Wurzel | ^(4)'w(16) =2 | 'w(9) =3 | ^(3)'w(125) =5

Logarithmus | log\_2(16) =4 | log\_3(9) =2 | log\_5(125) =3

-----

... | d) | e) | f)

Potenz | 10^3 =1000 | 3^3 =27 | 7^2 =49

Wurzel | ^(3)'w(1000) =10 | ^(4)'w(27) =3 | 'w(49) =7

Logarithmus | log\_(10)(1000) =3 | log\_3(27) =3 | log\_7(49) =2

----------

##-1.015 Die Basis a ergibt sich jeweils aus dem Punkt (a|1).

f\_1: a =1,5; f\_2: a =2; f\_3: a =5; f\_4: a =0,5

----------

##-1.016

a) 4, b) 0, c) -1, d) -2

----------

##-1.017

a) 2, b) 4, c) 1, d) 0,

e) -3, f) -5, g) 7, h) -1/4

j-182 - Lösungen

##-1.018

a) 10^(-0,124939)

b) 10^(0,369216)

c) 10^(1,23603)

d) 10^(2,30103)

lg(a) <0 für 0 <a <1

lg(a) >0 für a >1

----------

##-1.019

a) 2 +lg(a)

b) lg(a) -1

c) a

d) 10 \*lg(a)

e) 1/2 \*lg(a)

f) 1/(10)

g) 1/(10) \*lg(a)

h) 1/a

i) -lg(a)

j) -1

k) 2 \*lg(a) +lg(b)

l) lg(a) +n \*lg(b)

m) n \*lg(a) +n \*lg(b)

n) n \*lg(a) -lg(b)

o) lg(a) -n \*lg(b)

p) n \*lg(a) -n \*lg(b)

q) lg(a) +lg(b -10)

r) 1 +lg(a) +lg(b -1)

s) 2 \*lg(a) +3 \*lg(b) -3 -lg(c)

t) 3 -3 \*lg(a) -2 \*lg(b)

----------

##-1.020

a) lg(2) +lg(x +2) +lg(x -2)

b) 2 \*lg(2) +lg(x +2) +lg(x -2) -2 \*lg(y)

c) lg(a +b) -lg(a -b)

d) -1 +(n -1) \*lg(a)

e) (n -1) \*(-1 +lg(a))

f) 1 -n +lg(a)

g) lg(a) +1/2 \*lg(b)

h) lg(b +0,5) \*lg(a)

i) 0,5 \*(lg(a) +lg(b))

j) 0,2 \*(lg(a +2) \*lg(b))

k) 1/n \*(-2 +lg(a))

l) 6 \*lg(a) -2 \*lg(b -1)

----------

##-1.021

a) 2 \*x

b) 3 \*t

c) 0,2 \*x

d) -0,3 \*t

e) -k \*t

f) -(ln(2))/(9,7) \*t

g) ln(2) -0,3 \*t

h) ln(y\_0) -k \*t

----------

##-1.022

a) lg(x \*y)

b) lg(x/y)

c) lg(x/(4 \*y^2)

d) lg(10) \*x

e) lg(x/(100))

f) lg((10 \*x)/y)

g) lg((x^2)/(10y^3 \*z))

h) lg('w(x/(y \*z)))

----------

##-1.023

a) {x 'el 'R | x <2}

b) {x 'el 'R | x <1}

c) {x 'el 'R | x >3}

d) {x 'el 'R | x >2 'o x <-2}

----------

##-1.024

a) 4, b) 10, c) 9, d) 64

----------

##-1.025

a) {1,639834}

b) {2,37511}

c) {-1,60206}

d) {171,5932}

e) {0,187932}

----------

##-1.026

a) {10^(0,5)}

b) {10^(4,27)}

c) {10^(-4,23)}

d) {10^(0,23856)}

----------

##-1.027 Lösungswort: GUTGEMACHT

----------

##-1.028

a) -1, b) 3, c) 0, d) 6

----------

##-1.029

a) 2,4022

b) 1,737

c) -0,30422

d) 2,3135

e) 0,2909

f) 0,6117

g) 3,1568

h) 1

----------

##-1.030

a) 9, b) 6, c) 'w(6), d) 3,

e) 16, f) 8, g) 8, h) 3

----------

##-1.031

a) {-2,186; 1,484}

b) {1,372; 5,842}

c) {-0,955; 1,0514; 95,717}

d) {1,033; 159,685}

----------

##-1.032 Lösungswort: BRAVISSIMO

----------

##-1.033

a)

der Lehrer sagt: 100 %

der Schüler hört: 50 %

der Schüler begreift: 25 %

der Schüler nutzt: 12,50 %

b) Der Schüler nutzt nur 12,5 Prozent von dem, was der Lehrer gesagt hat.

c) Bei zwei weiteren Zwischenstufen würde nur mehr 3,125 Prozent (=1/(32)) von dem genützt werden, was der Lehrer gesagt hat.

----------

##-1.034

a) L\_p =20 \*lg(2/(2 \*10^(-5))) =20 \*5 =100; Schalldruckpegel in der Disco L\_p =100 dB

b) 60 =20 \*lg(p/(2 \*10^(-5)));

3 =lg(p/(2 \*10^(-5)));

10^3 = p/(2 \*10^(-5)); p =2 \*10^(-2) Pa

----------

##-1.035

a) L\_(ges) =10 \*lg(10^((70)/(10)) +10^((65)/(10)) +10^((80)/(10))) =80,54;

L\_(ges) ~~81 dB

b) 3 Rasenmäher:

L\_(ges) =10 \*lg(10^((75)/(10)) +10^((75)/(10)) +10^((75)/(10))) =79,77;

L\_(ges) ~~80 dB; 'De L ~~5 dB;

2 Mäher: 'De L =3 dB; 3 Mäher: 'De L =6 dB

c) L\_(ges) =10 \*lg(n \*10^((L\_p)/(10))) =10 \*lg(n) +10 \*lg(10^((L\_p)/(10))) =10 \*lg(n) +10 \*(L\_p)/(10))

L\_(ges) =10 \*lg(n) +L\_p

d) 'De L =20 =10 \*lg(n); 2 =lg(n); 10^2 =100 =n

Sie benötigen 100 zusätzliche Rasenmäher, um den Schalldruckpegel um 20 dB zu erhöhen.

j-183 - Lösungen

##-1.036

a) n =2; L\_(ges)(2) =L\_p +10 \*lg(2) ~~L\_p +10 \*0,3 =L\_p +3; 'De L ~~3 dB

b) Folgerung:

Bei jeder Verdopplung der Schallquellen ändert sich der Schalldruckpegel um jeweils ca. 3 dB.

----------

##-1.037

a) D =10 \*lg((10)/1) =10 dB

b) Dämpfung =L \*Dämpfungswert =10 km \*3 dB/km; Dämpfung =30 dB

30 =10 \*lg((P\_(ein))/(P\_(aus)));

3 =lg((P\_(ein))/(P\_(aus)));

10^3 =(P\_(ein))/(P\_(aus)) =P\_(aus) =(P\_(ein))/(1000)

P\_(ein)(1 +i) =P\_(aus); P\_(ein)(1 +i) =(P\_(ein))/(1000);

1 +i =0,001; i =-0,999;

Abnahme um 99,9 %

c) 6 =10 \*lg((P\_(ein))/(P\_(aus)));

10^(6/(15)) =(P\_(ein))/(P\_(aus));

(P\_(ein))/(P\_(aus)) ~~4; P\_(aus) =(P\_(ein))/4

----------

##-1.038

a) € 5.000,00

b) 2208,69 kWh

c) 3,307 %

d) 5 %

e) absolute Zunahme =104,3 -102,4 =1,9

prozentuelle Zunahme =(104,3 -102,4)/( 102,4) =1,855 %

f) 37,04 %

g) Bruttobetrag =Nettobetrag \*1,2 =Nettobetrag \*6/5

Nettobetrag =Bruttobetrag \*5/6

Steuer =Bruttobetrag -Nettobetrag =Bruttobetrag -Bruttobetrag \*5/6

Steuer =Bruttobetrag \*1/6, d. h., die Formel ist richtig.

----------

##-1.039

a) Da der Bestand in jedem Monat um den konstanten Wert 15 zunimmt, liegt ein lineares Wachstum vor.

b) y(t) =100 +15 \*t

c) y(12) =280

d) nach 10 Monaten

----------

##-1.040

a) k =(35 -23)/(22 -0) =6/(11) ~~0,55

Die Zunahme der CO\_2-Emission pro Jahr beträgt ca. 0,55 Mrd. Tonnen.

b) y(t) =23 +6/(11) \*t

c) y(30) =23 +6/(11) \*30 =39,4

2020 wird eine Emission von ca. 39,4 Mrd. Tonnen CO\_2 erwartet.

d) 30 =23 6/(11) \*t, d. h., t ~~12,83

Im Jahr 2003 wurde die 30 Mrd.-Tonnen-Grenze überschritten.

j-184 - Lösungen

##-1.041

a) Gleiche |absolute| Zunahmen der t-Werte bewirken |gleiche prozentuelle| Zunahmen (um i =3 %) der Funktionswerte y(t)

Die absoluten Zunahmen der Funktionswerte vergrößern sich in jedem Jahr.

y\_0 =120000; 1 +i =1,03

y(t) =120000 \*1,03^t mit t in Jahren ab 2000

b) ca. 161300; 526100; 2306200; 44,3 Mio.

Die Werte nach längerer Zeit sind nicht realistisch.

Im Jahr 2200 hätte die Stadt bereits 43,3 Mio. Einwohner und wäre damit größer als die größte heutige Metropole.

In der Realität sind dem Wachstum immer Grenzen gesetzt.

----------

##-1.042

a) In jedem Jahr kommt es zur gleichen prozentuellen Zunahme des Verkehrs um i =4 %.

Es liegt somit ein konstantes prozentuelles, ein exponentielles, Wachstum vor.

-----

b) Annahme zur Vereinfachung der Rechnung: y\_0 =100 Wachstumsfunktion y(t) =100 \*1,04^t

Interpretiert man den Anfangswert als 100 %, können die prozentuellen Zuwächse direkt abgelesen werden.

-----

c) y(5) =100 \*1,04^5 ~~121,67 d. h., in 5 Jahren ist der Verkehr um ca. 21,67 % angewachsen.

y(10) =100 \*1,04^(10) ~~148,02 d. h., in 10 Jahren ist der Verkehr um ca. 48,02 % angewachsen.

y(20) =100 \*1,04^(20) ~~219,11 d. h., in 20 Jahren ist der Verkehr um ca. 119,11 % angewachsen.

y(50) =100 \*1,04^(50) ~~710,67 d. h., in 50 Jahren ist der Verkehr um ca. 610,67 % angewachsen.

y(n) =100 \*1,04^n d. h., in n Jahren ist der Verkehr um (100 \*1,04^n -100) % angewachsen.

----------

##-1.043

a) N\_0 =80 mg; T ~~0,75 h =45 min

b) Die Halbwertszeit gibt an, in welcher Zeit sich die Anfangsmenge halbiert.

In ca. 0,75 Stunden hat sich die Koffeinmenge von 80 mg auf 40 mg halbiert. T\_(1/2) =0,75 h

c) N\_0 =80 mg; N\_1 =32 mg [Toleranz: 31 mg bis 33 mg]

80 \*(1 +i) =32; i =(32)/(80) -1 =-0,6;

Abbau ca. 60 % pro Stunde [Toleranz: 55 % bis 65 %]

d) 45 =90 \*'e^(k \*1)

1/2 ='e^k |ln

ln(0,5) =-0,69315 =k

N(t) =90 \*'e^(-0,69315 \*t) oder N(t) =90 \*0,5^t

----------

##-1.044 4,13 g; 3 g; 1,58 g

-----------

##-1.045 2,125; 1,81; 1,54; 2,5 \*0,85^t

----------

##-1.046

Wachstumsfunktion: y(t) =6 \*1,02^t

Startwert: y\_0 =6

1 +i: 1,02

i =2 %

y(1): 6,12

Wachstum/Abnahme: Wachstum

-----

Wachstumsfunktion: y(t) =20 \*0,85^t

Startwert: y\_0 =20

1 +i: 0,85

i =-15 %

y(1): 17

Wachstum/Abnahme: Abnahme

-----

Wachstumsfunktion: y(t) =10 \*3,4^t

Startwert: y\_0 =10

1 +i: 3,4

i =240 %

y(1): 34

Wachstum/Abnahme: Wachstum

-----

Wachstumsfunktion: y(t) =**[]**

Startwert: y\_0 =0,4 \*0,5^t

1 +i: 0,5

i =-50 %

y(1): 0,2

Wachstum/Abnahme: Abnahme

----------

##-1.047

a) y\_0 =30

T =50 Stunden

y(t) =30 \*1,01396^t oder

y(t) =30 \*'e^(0,013863 \*t)

-----

b) y\_0 =200

T =0,5 Jahre

y(t) =200 \*4^t oder

y(t) =200 \*'e^(1,3863 \*t)

-----

c) y\_0 =3

T\_(1/2) =7

Sekunden y(t) =3 \*0,9057^t oder

y(t) =30 \*'e^(-0,09902 \*t)

-----

d) y\_0 =80

T\_(1/2) =5 Tage

y(t) =80 \*0,87055^t oder

y(t) =80 \*'e^(-0,13863 \*t)

----------

##-1.049

b) Bei Zunahme- und Abnahmefunktionen ist y\_0 der Anfangswert oder Startwert mit y\_0 =y(0).

Die Graphen von exponentiellen Zunahme- und Abnahmefunktionen schneiden die y-Achse im Punkt (0|y\_0).

j-185 - Lösungen

##-1.049

c) Für k >0 liegt ein exponentielles Wachstum (exponentielle Zunahme) vor.

Für k <0 liegt eine exponentielle Abnahme vor.

----------

##-1.050

a) 40 047 m^3 Zuwachs

b) 17,67 Jahre

----------

##-1.051

a) 4 cm^2

b) 16 cm^2

c) 28000 km^2

d) 7,9 \*10^(18) km^2

e) 2^(2 \*t) bzw. 4^t (t in Stunden)

Die Werte nach längerer Zeit sind sehr groß und daher nicht realistisch.

In der Realität sind dem Wachstum immer Grenzen gesetzt.

----------

##-1.052

a) 10 cm^2

b) 20 cm^2

c) 40 cm^2

d) 12,8 dm^2

e) ca. 33 m^2

f) 5 \*2^(t/3) =5 \*1,26^t

26 % Zuwachs pro Stunde

----------

##-1.053 nach 16 Tagen

----------

##-1.054

a) y(5) =2 \*y\_0

y(t) =y\_0 \*(1 +i)^t

2 \*y\_0 =y\_0 \*(1 +i)^5

2^(1/5) =1 +i ~~1,1487

y(t) =y\_0 \*25 oder y(t) =y\_0 \*1,1487^t

Allgemein gilt: y(t) =y\_0 \*2^(t/T)

b) Die Bakterienkultur wächst mit ca. 14,9 % pro Stunde.

c) 15 Stunden entspricht der dreifachen Verdoppelungszeit.

Also hat sich der Anfangsbestand dreimal verdoppelt, also verachtfacht.

----------

##-1.055

a) y(0) =1000

y(3) =2460

y(t) =1000 \*(1 +i)^t

2460 =1000 \*(1 +i)^3

2,46^(1/3) =1 +i =1,3499

y(t) =1000 \*1,3499^t

i =0,3499; Zuwachs pro Stunde ca. 35 %

b) y\_n =y\_0 \*(1 +i)^n

((y\_n)/(y\_0))^(1/n) -1 =i

----------

##-1.056

a) € 21.158,98

b) € 4.274,02

c) 3,5 %

d) 8J 2M 21T

----------

##-1.057

a) y(t) =10000 \*(1 +0,04)^t

b) y(t) =10000 \*'e^(0,03922 \*t)

c) € 12.166,53

d) 17,67 Jahre

e) 41,04 Jahre

----------

##-1.058

a) y(t) =y\_0 \*1,4142^t

b) y(t) =y\_0 \*'e^(0,3466 \*t)

c) ca. 9 051 Bakterien

j-186 - Lösungen

##-1.059

a) 5,076 % Wachstum pro Jahr

b) 22,19 Jahre

c) N(t) =N\_0 \*1,05076^t

d) Verdreifachungszeit =(ln(3))/(ln(1 +i))

----------

##-1.060 im Jahr 2047

----------

##-1.061 1,36 %

----------

##-1.062

a) ca. 1,75 %

b) y(t) =y\_0 \*1,0175^t

c) 2053

d) ca. 8,5 Mrd.

----------

##-1.063

a) im Jahr 2024

b) im Jahr 2074

----------

##-1.064

a) Bevölkerung Chinas in Mrd.: y(t) =1,2792 \*1,0073^t für t in Jahren ab 2003

Bevölkerung Indiens in Mrd.: y(t) =1,03339 \*1,0151^t für t in Jahren ab 2003

b) nach 27,66 Jahren; ca. 2031

c) China: nach 61,44 Jahren, ca. 2065

Indien: nach 44,06 Jahren, ca. 2048

----------

##-1.065

a) 0,0488 %

b) 10 497 Jahre

c) 26,82 %

----------

##-1.066

a) Das negative Vorzeichen bei der Zerfallskonstanten X =-0,03 definiert eine Abnahme.

b) T\_(1/2) =(ln(2))/(-0,03) ~~23,1;

T\_(1/2) ~~23,1 Zeiteinheiten

c) y(t) =y\_0 \*0,97045^t

i ~~-0,02955 =-2,955 % gibt die prozentuelle Abnahme pro Zeiteinheit an.

----------

##-1.067

a) 'la =-(ln(2))/(13) ~~-0,0533

b) N(t) =N\_0 \*'e^(-0,0533 \*t)

----------

##-1.068

a) T\_(1/2) ~~24,76 min

b) Nach der einfachen Halbwertszeit verringert sich die Menge der vorhandenen Substanz auf die Hälfte der Anfangsmenge. Nach der doppelten Halbwertszeit verringert sich die vorhandene Menge der Substanz nochmals auf die Hälfte dieser Hälfte, also auf ein Viertel der Anfangsmenge.

----------

##-1.069

N(t) =N\_0 \*'e^('la \*t)

Annahme: y\_0 =1

1/2 ='e^(-0,5 \*T\_(1/2)) |ln

ln(1/2) =-0,5 \*T\_(1/2) |/(-0,5)

----------

##-1.070

60 =100 \*(1 +i)^(10) |/100 |()^(10)

0,6^(10) -1 =i

i ~~-0,0498 =-4,98 %

(ln(1/2))/(-0,5) =(ln(1) -ln(2))/(-0,5) =(ln(2))/(0,5) =T\_(1/2)

Die Formel ist richtig.

----------

##-1.071

a) T\_(1/2) =8 Tage

b) Aus N\_0 =100 und N(8) =50 kann die Gleichung der Zerfallsfunktion ermittelt werden:

N(t) =100 \*(1 +i)^t

50 =100 \*(1 +i)^8

 ^(8)'w(1/2) -1 =i

i ~~-0,083

Zerfallsgesetz: N(t) =100 \*0,917^t =100 \*'e^(-0,8664 \*t)

c) Für die Halbwertszeit gilt:

T\_(1/2) =(ln(2))/('la) d. h. 'la =(ln(2))/(T\_(1/2))

Weiters gilt das Zerfallsgesetz mit:

N(t) =N\_0 \*'e^(-'la \*t)

Durch Einsetzen von X und Umformung erhält man die angegebene Formel:

N(t) =N\_0 \*'e^((ln(2))/(T\_(1/2)) \*t) =N\_0 \*'e^(ln(2) \*(-t/(T\_(1/2)))) =

=N\_0 \*('e^(ln(2))^(-t/(T\_(1/2))) =N\_0 \*2^(-t/(T\_(1/2))) =N\_0 \*(1/2) ^(t/(T\_(1/2)))

j-187 - Lösungen

##-1.072

a) y(t) =y\_0 \*'e^(-0,00040822 \*t)

b) y(t) =y\_0 \*0,999592^t

c) 11281 Jahre

d) T\_(1/2) =1698 Jahre

e) k ist die Augenblicksabnahme, i ist die Abnahme pro Jahr.

i =-0,000408 gibt die prozentuelle Abnahme der vorhandenen Menge an Radium pro Jahr an.

i ~~-0,0408 %

k ~~-0,00040822

k ~~i, aber k \=i

----------

##-1.073

a) 19035 Jahre

----------

##-1.074 [18 844; 19 225]

----------

##-1.075

a) y(t) =y\_0 \*'e^(-0,000121 \*t)

b) 52,7 %

c) 19035 Jahre

----------

##-1.076

a) N(t) =N\_0 \*'e^(-0,0231 \*^t)

b) N(24) ~~2,3 kBq/m^2

c) t ~~117,2 Jahre; im Jahr 2118 wird der EU-Grenzwert unterschritten

----------

##-1.077

a) k =-0,1242

b) y =1,2 \*'e^(-0,1242 \*t)

----------

##-1.078

a) k =-0,126

b) p(h) =p\_0 \*'e^(-0,126 \*h)

c) p(3,798) ~~620

Der Luftdruck auf dem Gipfel des Großglockners ist ca. 620 mbar.

----------

##-1.079

a) Wein im Fass:

y\_0 =50; y(1) =50 \*0,9 =45;

y(2) =50 \*0,9^2; ... y(4) =50 \*0,9^4 =32,805;

ca. 32,8 Liter

b) y(n) =50 \*0,9^n

----------

##-1.080

a) 50 %

b) 25 %

c) 6,25 %

d) 0,5^(2t) bzw. 0,25^t

j-188 - Lösungen

##-1.081

a) 72,25 %; 61,4 %; 52,2 %; 0,85^n \*100 %

b) D\_1 =10 \*lg((100)/(100 \*0,85^1)) =10 \*lg(1/(0,85)) ~~0,706 dB

D\_2 =10 \*lg((100)/(100 \*0,85^2)) =10 \*lg(1/(0,85^2)) =

=10 \*lg((1/(0,85^2))^2) =2 \*10 \*lg(1/(0,85)) =2 \*D\_1 ~~1,41 dB

D\_3 =10 \*lg((100)/(100 \*0,85^3)) ~~2,12 dB =3 \*D\_1

D\_(10) =10 \*lg((100)/(100 \*0,85^(10))) ~~7,06 dB =10 \*D\_1

Die Dämpfung nimmt linear mit der Anzahl der Glasplatten zu.

c) D\_n =10 \* lg((100)/(100 \*0,85^n)) =10 \*lg^/(0,85^n) =n \*D\_1

----------

##-1.082

a) I(x) =I\_0 \*'e^(0,07257 \*x) =I\_0 \*0,93^x

b) I(10) ~~48,4 %

D(10) =10 \*lg(I\_0)/(I\_0 \*0,93^(10)) =10 \*lg(1/(0,93^(10)) ~~3,15 dB

c) (I\_0)/2 =I\_0 \*0,93^x

0,5 =0,93^x |ln

x =(ln(0,5))/(ln(0,93)) ~~9,55;

Halbwertsdicke =9,55 cm

d) D(9,55) =10 \*lg(1/(0,5)) ~~3 dB

D(2 \*9,55) =10 \*lg(1/(0,5^2)) ~~2 \*3 dB =6 dB

D(3 \*9,55) =10 \*lg(1/(0,5^3)) ~~3 \*3 dB =9 dB

D(n \*9,55) =10 \*lg(1/(0,5^n)) =10 \*lg((1/(0,5))^n) =n \*10 \*lg(1/(0,5)) ~~n \*3 dB

Die Regel ist richtig.

e) 12,63 cm

----------

##-1.083

a) I(d) =I\_0 \*0,9259^d

Pro cm sinkt die Intensität der Gammastrahlung um ca. 7,4 %.

b) 9,9 %

c) 20,9 cm

d) D(Halbwertsdicke) =10 \*lg(1/(0,5)) ~~3 dB

----------

##-1.084

a) h(0) =0

0 =2 -a \*'e^(-'la \*0); d. h. a =2

h(40) =1,2

1,2 =2 -2 \*'e^(-'la \*40); 0,8 =2 \*'e^(-'la \*40); 0,4 ='e^(-'la \*40)

'la =(ln(0,4))/(40)) ~~0,02290740

h(t) =2 -2 \*'e^(-0,022907 \*t) Wachstumsfunktion

-----

b) h(t =?) =1

1 =2 -2 \*'e^(0,022907 \*t); -1 =-2 \*'e^(0,022907 \*t);

0,5 ='e^(0,022907 \*t); t =(ln(0,5))/(-0,022907))

t =30,26

Am 31. Tag erreicht die Pflanze eine Höhe von 1 m.

-----

c) Der Maximalwert S =2 m.

----------

##-1.085 S =21; a =21 -0,5 =20,5

20 =21 -20,5 \*'e^(-'la \*15); 'la =0,201362

L(t) =21 -20,5 \*'e^(-0,2014 \*t) Wachstumsfunktion

----------

##-1.086

a) {{Abkürzungen für die folgende Tabelle:

Lebenszeit - Lebenszeit in Monaten

Nahrungsbedarf - Nahrungsbedarf in kg Trockenmasse}}

Lebenszeit | Nahrungsbedarf

0 | 0

6 | 6,3

12 | 8,5

18 | 10

Toleranz bei Ablese-Ungenauigkeiten

j-189 - Lösungen

b) Der dargestellte Graph stellt weder ein lineares noch ein exponentielles Wachstum dar. Der Graph geht durch den Ursprung, ist nicht s-förmig und die Steigung nimmt ab. Somit sind die Bedingungen für beschränktes Wachstum erfüllt.

c) N(t) =S \*(1 -'e^(-k \*t))

10 =11 \*(1 -'e^(-k \*18)) nach k auflösen

k ~~0,1332

N(t) =11 \*(1 -'e^(-0,1332 \*t)) Gleichung der Wachstumsfunktion

----------

##-1.087

a) k =0,017 33

b) 34,14 °C

c) 20,0012 °C

----------

##-1.088

a) 56,39 °C; 42,07 °C; 22,99 °C

b) Nach ca. 22 Minuten hat der Tee eine Temperatur von 40 °C

----------

##-1.089

a) k =0,044 79

b) H(0) =0,4 m

c) Am 22. Tag (t =21,9) verdoppelt sich die Höhe.

d) Anfangshöhe =0,4 m; maximale Höhe 2 m Es liegt also logistisches Wachstum vor.

e) Der Graph von h ist s-förmig, die Steigung nimmt zuerst zu und dann ab.

----------

##-1.090

a) k =0,1831; A(t) =

b) A(0) =25 mm^2

c) A(12) =75 mm^2

d) Anfangsfläche =0,25 mm^2; maximale Fläche 100 mm^2

Es liegt also logistisches Wachstum vor.

e) Der Graph von A ist s-förmig, die Steigung nimmt zuerst zu und dann ab.

j-190 - Lösungen

##-1.091

a) y(t) =(25)/(1 +49 \*'e^(-0,5478 \*t))

b) 20,75 m

c) y(8) =15,5 m; Nach 8 Jahren ist die Pflanze ca. 15,5 Meter hoch.

e) Im Term der Funktion mit y(t) =M/(1 +b \*'e^(-k \*t)) gibt der Zähler M den Maximalwert der Wachstumsfunktion an.

----------

##-1.092 L(t) =(25)/(1 +41 \*'e^(-0,5478 \*t))

----------

##-1.093

a) 8,0625 Stunden

b) A(t) =(10)/(1 +19 \*0,6733^t)

----------

##-1.094

b) 2050: ca. 408 Millionen

c) Etwa 2007 wurde die Anzahl von 300 Millionen Einwohnern überschritten.

----------

##-1.095

b) y(t) =(20)/(1 +3,44 \*'e^(-0,0205 \*t))

c) 7,95 Mrd.

----------

##-1.096

a) y\_1(t) =2 \*(1 +i)^t

y\_1(1) =2 \*(1 +i)^1

128 =2 \*(1 +i)^1 64 =1 +i

y\_1(t) =2 \*64^t exponentielle Wachstumsgleichung

Die Funktionswerte der exponentiellen Wachstumsfunktion wachsen schnell über die Gesamtanzahl der Schülerinnen. Daher ist dieses Wachstumsmodell bedingt geeignet.

-----

b) y\_2(t) =700 -(700 -2) \*'e^(k \*t)

y\_2(1) =700 -(700 -2) \*'e^(k \*1)

128 =700 -698 \*'e^(k \*1

y\_2(t) =700 -698 \*'e^(-0,1991 \*t) Gleichung des beschränkten Wachstums

c) y\_3(t) =(700)/(1 +349 \*'e^(-4,358 \*t)) logistische Wachstumsgleichung

j-191 - Lösungen

d) Die Funktionswerte der exponentiellen Wachstumsfunktion wachsen schnell über die Gesamtanzahl der Schülerinnen.

Daher ist dieses Wachstumsmodell nicht geeignet.

Beim beschränkten Wachstum nehmen die Funktionswerte unrealistisch langsam zu.

Der Sättigungswert wird unrealistisch sehr spät angenähert.

Am besten scheint das logistische Wachstumsmodell zu sein. Am Beginn folgt es dem exponentiellen Wachstum, berücksichtigt aber danach die begrenzte Anzahl der Schülerinnen.

Es ist realistisch, dass nach 3 Tagen ein Großteil der Schülerinnen das Gerücht kennt.

----------

##-1.097

y\_0 =1,06; y(21) =2; S =3

a) y\_1(t) =0,044 76 \*t +1,06 lineare Wachstumsfunktion

Pro Jahr wachsen die Transitfahrten um ca. 44760 oder 0,04476 Mio.

Im Jahr 2004 (y\_1(12,3) =1,61) wurde die Grenze überschritten.

Im Jahr 2020 sind ca. y\_1(29) =2,36 Mio. Lkw-Fahrten zu erwarten.

-----

b) y\_2(t) =1,06 \*1,0307^t exponentielle Wachstumsfunktion

jährliche Zuwachsrate i ~~3,07 %

Verdopplungszeit T ~~22,9 Jahre

Im Jahr 2005 (y\_2(13,8) =1,61) wurde die Grenze überschritten.

Im Jahr 2020 sind ca. y\_2(29) =2,54 Mio. Lkw-Fahrten zu erwarten.

-----

c) y\_3(t) =3 -1,94 \*'e^(-0,03156 \*t) beschränktes Wachstum

Im Jahr 2002 (y\_3(10,56) =1,61) wurde die Grenze überschritten.

Im Jahr 2020 sind ca. y\_3(29) =2,22. Mio. Lkw-Fahrten zu erwarten.

-----

d) y\_4(t) =S/(1 +1,83 'e^(-0,06179 \*t)) logistisches Wachstum

Im Jahr 2004 (y\_4(12,16) =1,61) wurde die Grenze überschritten.

Im Jahr 2020 sind ca. y\_3(29) =2,3 Mio. Lkw-Fahrten zu erwarten.

-----

e) Lineares und das exponentielles Wachstum sind unrealistisch, weil unbegrenzt.

Sowohl begrenztes wie auch logistisches Wachstum eignet sich zur Beschreibung des Sachverhaltes.

----------

##-1.098

a) 70,74 Mio./Jahr; 9,6 Mrd.; 2056

b) 1,77 %; Verdoppelungszeit: 39,5 Jahre; 14,6 Mrd.; 2029

c) y(t) =(12000)/(1 +3,76 \*e^(-0,0269 \*t)); 9,56 Mrd.; 2060

----------

##-1.099

y(t) =(800)/(1 +3,65 \*'e^(0,01716 \*t)); 483 Mio.; 2090

----------

##-1.100

a) m\_0 =m(0) =(670)/(1 +66 \*'e^(0,53 \*0)) =10; S =670 g

b) Der Graph der Wachstumsfunktion ist s-förmig, die Steigung nimmt zuerst zu und dann ab. Damit sind die Eigenschaften eines logistischen Wachstums gegeben.

c) absoluter Zuwachs =500 g

d) m(11,96) =600; Nach ca. 11,96 Stunden übersteigt die Masse der Bakterienkultur 600 g.

e) Fehler:

ln(66 \*'e^(-0,53) \*t) =ln(0,34)

-0,53 \*t \*ln(66 \*'e) =ln(0,34)

t =(ln(0,34))/(-0,53 \*ln(66) \*'e)

-----

Richtige Umformung:

ln(66 \*'e^(-0,53 \*t)) =ln(0,34)

ln(66 -0,53 \*t) =ln(0,34) |-ln(66)

-0,53 \*t =ln(0,34) -ln(66)

t =(ln(0,34) -ln(66))/(-0,53) ~~9,94 Stunden

-----

Richtig wäre:

ln(66 \*'e^(-0,53 \*t)) =ln(66) +ln('e^(-0,53 \*t)) =ln(66) -0,53 \*t

j-192 - Lösungen

##-Z 1.1

a) y =2 \*3^x

b) y =0,5^x

----------

##-Z 1.2

y =3 \*2^x

Monotonie: steigend

Schnittpunkt mit y-Achse: (0|3)

Prozent der Zu-/Abnahme: 100 %

-----

y =0,5 \*1,9^x

Monotonie: steigend

Schnittpunkt mit y-Achse: (0|0,5)

Prozent der Zu-/Abnahme: 90 %

-----

y =0,8^x

Monotonie: fallend

Schnittpunkt mit y-Achse: (0|1)

Prozent der Zu-/Abnahme: -20 %

-----

y =0,005^x

Monotonie: fallend

Schnittpunkt mit y-Achse: (0|1)

Prozent der Zu-/Abnahme: -99,5 %

----------

##-Z 1.3

a) f(x) =0,5 \*2^x +2

b) g(x) =2 \*0,5^x +2

----------

##-Z 1.4

Behauptung: f(0) =0

Begründung: falsch, da f(0) =c \*a^0 =c

-----

Behauptung: f(x +1) =a \*f(x)

richtig, weil f(x +1) =c \*a^(x +1) =c \*a^x \*a^1 =a \*f(x)

-----

Behauptung: f(x +h) =h \*f(x)

Begründung: falsch, da f(x +h) =c \*a^(x +h) =c \*a^x \*a^h =a^h \*f(x) \=h \*f(x), da a^h \=h

-----

Behauptung: f(k \*x) =k \*f(x)

Begründung: falsch, da f(k \*x) =c \*a^(k \*x) \=k \*c \*a^x =k \*f(x)

-----

Behauptung: (f(x +h))/(f(x)) =a^h

Begründung: richtig, weil (f(x +h))/(f(x)) =(c \*a^(x +h))/(c \*a^x) =(a^x \*a^h)/(a^x) =a^h

----------

##-Z 1.5 Die zu f passende Logarithmusfunktion ist jene mit der Basis 2.

Der Graph der Logarithmusfunktion zur Basis a verläuft stets durch den Punkt (a|1). Die gesuchte Funktion ist daher f\_2.

----------

##-Z 1.6

a ~~0,6; Die Funktion log\_3(x) ist die Umkehrfunktion von 3^x.

----------

##-Z 1.7

2x -1 =3x +2

**[x]** 2x -1 =6x +4

2x -1 =1,5x +1

Da: 25^(3x +2) =(5^2)^(3x +2) =5^(6x +4)

5^(2x -1) =5^(6x +4) und 2x -1 =6x +4

----------

##-Z 1.8

a) x =1

b) x =1,514

c) Die Gleichung 2^(x +3) =-9 hat keine Lösung, weil 2^(x +3) nur positive Werte besitzt.

----------

##-Z 1.9

a) log\_2(2^x) =6

2^6 =2^x

x =6

b) log\_x(81) =2

x^2 =81

x =9

c) log\_(10)(1/x) =1

10^1 =1/x

x =0,1

d) ln('w('e)) =x

e^x ='w('e) ='e^(1/2)

x =1/2

j-193 - Lösungen

##-Z 1.10

**[x]** 2 \*lg(x) -3 \*lg(y) +lg(z) -1 =lg((x^2 \*x)/(10 \*y^3))

1/2 \*lg(x) -1/2 \*lg(y) -1/2 \*lg(z) -1/2 \*(lg(x) -lg(y) -lg(z)) -1/2 \*lg(x/(y \*z)) =lg('w(x/(y \*z)))

Werden durch eine Subtraktion getrennte Logarithmen zu einem zusammengefasst, wird aus der Subtraktion eine Division.

lg(x) +2 =lg(x) +2 \*lg(10) =lg(x) +lg(102) =lg(x) +lg(100) =lg(100 \*x)

----------

##-Z 1.11

a) M =(ln(A\_(max)) -ln(A\_0))/(ln(10)) =(ln(A\_(max))/(ln(10)) -(ln(A\_0))/(ln(10)) =

=lg(A\_(max)) -lg(A\_0) =lg((A\_(max))/(A\_0))

b) M -2 =log\_(10)((A\_(max))/(A\_0)) -2 =

=log\_(10)(A\_(max))/(A\_0)) -log\_(10)(10^2) =log\_(10)(A\_(max))/(A\_0)) -log\_(10)(100) =log\_(10))A\_(max))/(A\_0))

Der maximale Ausschlag des Nachbebens beträgt ein Hundertstel des maximalen Ausschlags des ursprünglichen Bebens.

----------

##-Z 1.12

a) exponentiell, da der Preis jährlich um denselben Prozentsatz steigt

p(t) =145 \*1,005^t

b) linear, da der Geldbetrag jährlich um denselben Betrag wächst

G(t) =50 +t \*10

c) exponentiell, da die Tierpopulation um denselben Prozentsatz abnimmt

N(t) =500 \*0,5^t mit t (Zeit als Vielfache von 5 Jahren) oder:

N(t) =500 \* ^(5)'w(0,5^t) mit t (Zeit in Jahren)

----------

##-Z 1.13

a) Aus der Gleichung 200 =300 \*a^8 ergibt sich a =0,95058 ungefähr 5 % Abnahme

b) 200 =300 \*'e^(la \*8)

ln(2/3) ='la \*8

'la ~~-0,050683

y(t) =300 \*'e^(-0,050683 \*t)

c) y(16) =300 \*'e^(-0,050683 \*16) =133,33 mg

d) Die Halbwertszeit ist jener Zeitraum innerhalb dem die Hälfte einer ursprünglich vorhandenen Stoffmenge zerfallen ist.

150 =300 \*'e^(-0,050683 \*t)

0,5 ='e^(-0,050683 \*t)

t =(ln(0,5))/(-0,050683) ~~13,7

Halbwertszeit =13,7 Tage

----------

##-Z 1.14 Anton vergisst, dass die Reduktion der Menge in der 2. Halbwertszeit 50 % von der nach der ersten Halbwertszeit reduzierten Menge ist. Nach 60 Jahren sind 0,5 \*0,5 =0,25, also 25 % der ursprünglichen Menge noch vorhanden.

----------

##-Z 1.15 125 ist die vorhandene Anfangsmenge.

Die Funktion beschreibt ein exponentielles Wachstum, da 2,35 >1 ist.

Die Zunahme beträgt 135 % pro Zeiteinheit.

----------

##-Z 1.16

a) Der passende Graph ist A4, da die maximale Fläche 100 mm^2 beträgt (Zähler der Funktionsgleichung) und die Funktion durch den Punkt (0|A(0)) =(0|25) verläuft.

b) Es handelt sich um ein logistisches Wachstum.

Der Graph ist s-förmig, die Steigung nimmt zuerst zu und dann ab.

c) Helene hat bei der Division durch 100 den Nenner 1 +3 \*'e^(-3k) in den Zähler geschrieben.

Richtige Benennung:

50 =(10)/(1 +3 \*'e^(-3 \*k))

(50)/(100) =1/(1 +3 \*'e^(-3 \*k))

2 =1 +3 \*'e^(-3 \*k)

1/3 ='e^(-3 \*k)

ln(1/3) =-3 \*k

k ~~0,366 204

Helene erhält bei ihrer Rechnung eine Fehlermeldung, da der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert ist.

d) A(10) =92,85 mm^2

----------

##-Z 1.17

a) Sättigungswert S 020 °C, Anfangstemperatur T\_0 =100 °C

a =|20 -100| =80

T(t) =20 +80 \*'e^(-'la \*t)

Ablesen eines weiteren Punktes am Graphen: zum Beispiel (15|30); T(15) =30

30 =20 +80 \*'e^(-'la \*15)

1/8 ='e^(-'la \*15)

ln(1/8) =-15 \*'la

'la ~~0,1386

T(t) =20 +80 \*'e^(-0,1386 \*t)

j-194 - Lösungen

##-Z 1.17

b) T(t) =20 +80 \*'e^(-0,1386 \*t) =10

-10 =80 \*'e^(-0,1386 \*t)

-1/8 ='e^(-0,1386 \*t)

ln(-1/8) =-0,1386 \*t

Da die Logarithmusfunktion für negative x-Werte nicht definiert ist, hat diese Gleichung keine reelle Lösung.

----------

#### \*\*-2 Zinsen und Zinseszinsen

##-2.001

a) i =0,04

b) i =0,1225

c) i =0,035

d) i =0,005

##-2.002

a) i =1,4 %

b) i =7 1/8 %

c) i =1/4 %

d) i =10 1/2 %

----------

##-2.003

a) € 100,83

b) € 102,25

c) € 101,08

d) € 103,84

----------

##-2.004

a) € 1.016,00

b) € 1.181,10

c) 7,5 %

d) 120 Tage

----------

##-2.005

a) € 5.375,00

b) € 5.581,40

c) 9,6 %

d) 320 T

e) 200 T

f) 8 %

g) € 1.650,00

h) € 2.181,82

----------

##-2.006 In 25 Jahren, wenn mit einfachen Zinsen gerechnet wird.

----------

##-2.007 i =5 %

----------

##-2.008 € 14.062,50

----------

##-2.009 i =4 1/2 %

----------

##-2.010

a) i =17,5 %

b) i =((K\_n)/(K\_0) -1) \*1/n; wird die Laufzeit n größer, dann wird der Kehrwert 1/n und damit auch i kleiner, d. h. der Zinssatz sinkt.

----------

##-2.011

a) i =16,95 %

b) i =20,02 %

c) Durch eine geringere Kontoführungsgebühr steigt der Auszahlungsbetrag, der Zinssatz sinkt.

----------

##-2.012

a) Z =€ 3,26; K\_n =€ 1.243,26

b) K\_0 =€ 1.292,80; K\_n =€ 1.313,00

c) i =8 %; K\_n =€ 779,65

----------

##-2.013 55,67 %

----------

##-2.014

a) Skonto nicht in Anspruch nehmen, da i =14,69 %

b) Skonto beanspruchen, da i =69,6 %

----------

##-2.015

a) 1,05

b) 1,125

c) 1,005

d) 1,04375

e) 1,0075

f) 1,1025

g) 1,05875

h) 1,015

----------

##-2.016

a) € 1.472,80

b) € 406,48

c) € 11.050,44

d) € 6.576,21

----------

##-2.017

a) € 1.338,23

b) € 1.046,16

c) 6,96 %

d) 5J 9M 9T

----------

##-2.018

a) € 7.057,91

b) € 4.958,98

c) 8,78 %

d) 3,9 Jahre theoretisch

e) 4,15 Jahre theoretisch

f) 12,47 %

g) € 2.360,28

h) € 1.525,24

----------

##-2.019

a) € 1.266,10

b1) für i >4 % wird (1 +i)^n -1 größer und damit K\_0 kleiner

b2) für n >7 Jahre wird (1 +i)^n -1 größer und damit K\_0 kleiner

----------

##-2.020 € 121.734,66

----------

##-2.021 € 7.247,19

----------

##-2.022 € 1.000,01

----------

##-2.023 € 10.000,01

----------

##-2.024

a) i =4,729 %

b) i =2,811 %

----------

##-2.025 i =3,75 %

----------

##-2.026 6J 3M

----------

##-2.027 2J 1M 17T

----------

##-2.028 29J 10M 3T

----------

##-2.029 i = ^(n)'w(s/z) -1

----------

##-2.030 B =G \*(1 +i)^(-n)

----------

##-2.031

n =(ln(E/B))/(ln(1 +i))

----------

##-2.032

a) K\_0 +(Z\_1)/((1 +i)^2) +(Z\_2)/((1 +i)^3) oder

K\_0 =Z\_1 \*(1 +i)^(-2) +Z\_2 \*(1 +i)^(-3)

j-195 - Lösungen

##-2.032

b) K\_4 =Z\_1 \*(1 +i)^2 +Z\_2 \*(1 +i)

----------

##-2.033

a) Beide Zahlungen müssen auf einen gemeinsamen Zeitpunkt auf- oder abgezinst werden.

b) Argumentation mit Barwert am 1. 1. 2014:

(1) PV\_A =8000; PV\_B =8227,02; B ist besser

(2) PV\_A =8000; PV\_B =7920,94; A besser; alternativ kann mit dem Endwert am 1. 1.2018 argumentiert werden.

c) 5,74 %

----------

##-2.034 Für den Verkäufer ist das Angebot B besser. Es ist mit Stichtag 1. 4. 2017 um € 3.121,26 höher.

----------

##-2.035 Das erste Angebot ist, bezogen auf einen gemeinsamen Stichtag, immer am höchsten.

----------

##-2.036 1. Angebot ist per 1. 9. 2014 um € 26.595,40 höher.

----------

##-2.037

b) € 16.585,74

----------

##-2.038

b) € 23.451,21

----------

##-2.039

a) 5,387 %

b) für n >5 Jahre wird ^(n)'w((K\_n)/(K\_0)) kleiner und damit auch i ='w((K\_n)/(K\_0)) -1

----------

##-2.040

b) ohne Verzinsung:

3Z =15000 -3000 =12000

Z =4000; mit Verzinsung folgt, dass die Zahlungen Z größer werden

-----

c) Bewertungszeitpunkt t =6: q =1,04

15000 \*1,04^6 =3000 \*1,04^5 +Z \*1,04^2 +Z \*1,04 +Z

15329,83 =Z \*(1,04^2 +1,04 +1)

Z =4910,89

-----

d) Steigt der Zinssatz, dann verzinst sich die Schuld stärker. Deshalb müssen die Zahlungen steigen.

----------

##-2.041

a) Am 1. 7. 2011 werden € 2.500,00 einbezahlt,

am 1. 1. 2013 werden € 1.500,00 entnommen,

am 1. 1. 2014 werden wieder € 1.000 einbezahlt.

Am 1. 1. 2015 beträgt der Kontostand € 2.229,53.

Das Konto wird mit 3,25 % p. a. verzinst.

----------

##-2.042

b) Die Schuld wird durch drei Zahlungen in der Höhe von € 1.234,00 in 1 % Jahren, € 6.000,00 in viereinhalb Jahren und € 4.000,00 in sechs Jahren getilgt.

Der jährliche Zinssatz beträgt 2,5 % p. a.

j-196 - Lösungen

##-2.043 Beim zweiten Sparbuch wird der Betrag höher sein, weil € 1.000,00 zum Zeitpunkt 1 und € 1.000,00 zum Zeitpunkt 3 um jeweils ein Jahr länger verzinst werden als beim ersten Sparbuch.

----------

##-2.044

b) 1J 10M 15T ab heute

----------

##-2.045

b) 29. 3. 2014

----------

##-2.046

a) 20. 3. 2015

b) 11. 5. 2018

----------

##-2.047

 ^(3)'w(0,0125 \*1,0175 \*1,0325) -1 ~~2,08 %

----------

##-2.048

 ^(6)'w(1,0075^3 \*1,0175^2 \*1,05) -1 ~~1,78 %

Der durchschnittliche Zinssatz des "Supersparbuches" wäre weniger als 2 %.

----------

##-2.049 Lösung: Maria hat recht, denn es muss gelten:

K\_0 \*1,01^3 \*1,015^2 \*1,05 =K\_0 \*q^6,

also q = ^(6)'w(1,01^3 \*1,015^2 \*1,0^5) ~~1,01823, d. h. i ~~1,82 %

1000 \*1,01823^6 =1114,49

----------

##-2.050

a) € 4.489,84

b) € 9.363,06

c) € 762,29

----------

##-2.051

a) € 6.556,01

b) € 145.460,82

c) € 444,82

----------

##-2.052 € 144,84

----------

##-2.053

b) PV\_A =€ 17.286,49;

PV\_B =€ 17.390,78;

Angebot B ist um € 104,29 besser.

c) € 110,69

----------

##-2.054

b) PV\_A =€ 5.883,23;

PV\_B =€ 5.766,64;

Angebot A ist um € 116,59 besser.

c) € 131,37

----------

##-2.055

a) ohne Verzinsung:

Z\_3 =20000 -6000 -7000 =7000

Mit Verzinsung folgt, dass sich die Schuld erhöht und auch die Zahlung Z\_3 höher wird.

b) Bewertungszeitpunkt t =2: q\_2 =1,03

20000 \*1,03^4 =6000 \*1,03^3 +7000 \*1,03 +Z

8743,81 =Z

c) Steigt der Zinssatz, dann verzinst sich die Schuld stärker. Deshalb muss die Zahlung steigen.

----------

##-2.056

a) € 8.944,66

b) Sinkt der Zinssatz, sinkt auch die Höhe der beiden Zahlungen.

----------

##-2.057

a) € 4.341,98; € 8.683,96

----------

##-1.058 Äquivalente Zinssätze ergeben bei gleichen Barwerten gleiche Endwerte.

i\_2 =2,956 %; i\_4 =1,467 %; i\_(12) =0,487 %

----------

##-2.059

... | a) | b) | c) | d)

i | 5,0625 % | 8,243 % | 6,1678 % | 8 %

i\_2 | 2,5 % | 4,04 % | 3,0378 % | 3,923 %

i\_4 | 1,2423 % | 2 % | 1,5075 % | 1,9427 %

i\_(12) | 0,4124 % | 0,6623 % | 0,5 % | 0,6434 %

-----

... | e) | f) | g)

i | 8,16 % | 12,551 % | 12,683 %

i\_2 | 4 % | 6,09 % | 6,152 %

i\_4 | 1,9804 % | 3 % | 3,0301 %

i\_(12) | 0,6558 % | 0,9902 % | 1 %

----------

##-2.060

6J 6M

----------

##-2.061 Der zu i\_4 =2,25 % äquivalente Semesterzinssatz der Bank B ist 1,0225^2 -1 =4,55 %.

Der Semesterzinssatz bei der Bank B ist daher für Anita geringfügig günstiger als 4,6 % p. s. der Bank A.

j-197 - Lösungen

##-2.062

a) 5000 \*1,0075^(-0,5) +8000 \*1,0075^(-2,5) =12833,30

b) Die Schuld beträgt € 12.833,30.

Da die beiden Beträge abgezinst werden, erfolgen die Zahlungen zu einem späteren Zeitpunkt.

Die Schuld wird durch zwei Zahlungen in der Höhe von € 5.000,00 in einem halben Semester und € 8.000,00 in zweieinhalb Semestern getilgt.

----------

##-2.063

a) € 5.624,32

b) € 5.630,81

c) € 5.634,13

d) 5000 \*'e^(0,04 \*3) =€ 5.637,48

----------

##-2.064

a) € 106.000,00

b) € 106.090,00

c) € 106.136,36

d) € 106.167,78

e) € 106.183,65

----------

##-Z 2.1

a) Anfangskapital € 1.000,00; Verzinsungsdauer 300 Tage; Zinssatz 0,5 %

b) richtig: das Anfangskapital doppelt so hoch ist

Begründung: 2 \*K(t) =2 \*1000 \*(1 +(300)/(360) \*0,005) =2000 \*(1 +(300)/(360) \*0,005 )

----------

##-Z 2.2

a) 10 =9,5 \*(1 +(14)/(360) \*i)

b) i =1,353... ~~135 %

c) ja, denn durch Umformen der Gleichung aus a) ergibt sich:

((10)/(9,5) -1) \*(360)/(14) =i

Gibt Sandra das Geld erst nach 4 Wochen zurück, muss man anstatt durch 14 durch 28 dividieren. Da 28 =2 \*14, erhält man einen halb so großen Jahreszinssatz i.

----------

##-Z 2.3

a) Skontohöhe: 2 % von € 4.500,00 sind € 90,00.

Überziehungskosten: 10 % von € 4.000,00 sind € 400,00 pro Jahr Kosten für 20 Tage: (400)/(360) \*20 ~~€ 22

Der Skonto sollte angenommen werden.

b) 4410 \*(1 +(20)/(360) \*i) =4500; i =0,3673

Der Überziehungszinssatz darf maximal =36,73 % betragen.

----------

##-Z 2.4

a) Das Kapital wurde 1 Jahr zu 3 % und 2 Jahre zu 2,5 % verzinst.

b) Nein, da die Multiplikation kommutativ ist und die Zinssätze nicht zwingend in der Reihenfolge miteinander multipliziert werden müssen, in der sie aufgetreten sind.

----------

##-Z 2.5

b) Der Bruder sollte das Angebot annehmen.

Laut der ursprünglichen Vereinbarung erhält er zwar € 2.500,00 bereits am 1. 1. 2015 und kann diesen Betrag bis zum 1. 1. 2016 schon auf der Bank verzinsen lassen. Andererseits ist ein doppelt so hoher Betrag von € 5.000,00 erst am 1. 1. 2017, also ein Jahr später als die angebotenen Einmalzahlung fällig. Die dadurch verlorenen Zinsen sind bei gleich bleibendem Zinssatz sicher höher, als die durch die Zahlung am 1. 1. 2015 gewonnenen.

c) B =(2500)/(1,02) +(5000)/(1,02^2) +(5000)/(1,02^3) ~~11968,44

Er hat € 11.968,44 geliehen.

----------

##-Z 2.6

a) Beata berechnet den Endwert am 1. 7. 2016.

----------

##-Z 2.7

a) Wird ein Betrag um 0,75 % erhöht, entspricht der sich ergebende Betrag 100,75 % des ursprünglichen. Sabine muss daher ihre Berechnung mit dem Faktor 1,0075 durchführen.

b) z^- = ^(5)'w(1,0075^3 \*1,0125 \*1,0225) -1 ~~0,01148 =1,15 %

----------

##-Z 2.8

a) In Variante A wird eine etwas höhere Schuld beglichen.

Die Zahlung in Höhe von € 5.000,00 erfolgt zu einem früheren Zeitpunkt als in Variante B und entspricht damit aus Sicht von Zeitpunkt Null einer höheren Zahlung.

b) In Variante B ist der Zinssatz geringer als in Variante A, da die höhere Zahlung zu einem späteren Zeitpunkt als in A erfolgt.

j-198 - Lösungen

#### \*\*-3 Rentenrechnung

##-3.001

a)

E\_(nach) =100 \*(1,03^5 -1)/(0,03) =530,91

B\_(nach) =100 \*(1,03^5 -1)/(0,03) \*1/(1,03^5) =457,97

b)

E\_(vor) =100 \*(1,03^5 -1)/(0,03) \*1,03 =546,84

B\_(vor) =100 \*(1,03^5 -1)/(0,03) \*1/(1,03^4) =471,71

c)

E\_(nach) =1000 \*(1,04^(20) -1)/(0,04) =29778,08

B\_(nach) =1000 \*(1,04^(20) -1)/(0,04) \*1/(1,04^(20)) =13590,33

d)

E\_(vor) =1000 \*(1,005^(20) -1)/(0,005) \*1,005 =21084,01

B\_(vor) =1000 \*(1,005^(20) -1)/(0,005) \*1/(1,005^(19)) =19082,36

----------

##-3.002

a) E\_(nach) =€ 127.411,53; B\_(nach) =€ 26.421,07

b) Steigt der Zinssatz, werden bei der Endwertberechnung die Raten stärker aufgezinst. Dadurch steigt der Endwert. Bei der Barwertberechnung werden die Raten stärker abgezinst. Dadurch sinkt der Barwert.

----------

##-3.003

a) E\_(vor) =€ 16.712,98; B\_(vor) =€ 9.306,41

b) Sinkt der Zinssatz, werden bei der Endwertberechnung die Raten weniger aufgezinst. Dadurch sinkt der Endwert. Bei der Barwertberechnung werden die Raten weniger abgezinst. Dadurch steigt der Barwert.

----------

##-3.004

a) X entspricht dem Barwert einer nachschüssigen Jahresrente.

b) X =B\_(nach) =1000 \*(1,045^(14) -1)/(0,045) \*1/(1,045^(14)) =10222,83

----------

##-3.005

b) Setzt man den Bezugszeitpunkt auf den Tag der ersten Ratenzahlung, wird die Rente als vorschüssig festgelegt. Somit berechnet man den Barwert einer vorschüssigen Jahresrente mit 14 Raten: PV =€ 10.682,85

Dieser Betrag PV muss dann 7 Jahre abgezinst werden.

X =10682,85 \*1,045^(-7); X =€ 7.850,06

----------

##-3.006

b)

(1) t =7: Endwert: K =R \*(q^5 -1)/(q -1)

(2) t =8: Endwert 1 Jahr aufzinsen: K =R \*(q^5 -1)/(q -1) \*q

(3) t =0: Endwert 7 Jahre abzinsen: K =R \*(q^5 -1)/(q -1) \*q^(-7)

(1) t =10: Endwert 3 Jahre aufzinsen: K =R \*(q^5 -1)/(q -1) \*q^3

----------

##-3.007

b) (1) t =0: Barwert 2 Jahre abzinsen: K =B\_(vor) \*q^(-2)

(2) t =8: Barwert 6 Jahre aufzinsen: K =B\_(vor) \*q^6

----------

##-3.008

a) PV =€ 6 786,37; Einmalzahlung =€ 5.317,30

b) Zu lösen ist die Gleichung 5317,30 \*1,05^n =8248,88; n =9

Die Einmalzahlung muss 4 Jahre nach Ratenbeginn erfolgen.

j-199 - Lösungen

##-3.009

a) Man berechnet die Barwerte der beiden Renten und zinst diese beiden Barwerte auf den heutigen Tag ab.

b) PV\_a =€ 46.298,95; PV\_b =€ 65.421,87

46298,95 \*1,04^(-4) +65421,87 \*1,04^(-10) =83773,21

Der heutige Wert der Erträge ist € 83.773,21.

----------

##-3.010

PV\_a =€ 1.550.212,84; PV\_b =€ 1.690.140,85

Angebot B ist besser.

----------

##-3.011

(1) Endwert der vorsch. Sparraten FV =€ 167.659,71

Endwert der nachsch. Bonuszahlungen à 480,00: FV =€ 6.326,78

Gesamtguthaben nach 10 Jahren =€ 173.986,49

(2) 177403,19 +2400,00 \*1,07 =179971,19

Gesamtguthaben nach 10 Jahren =€ 179.971,19

(3) FV =€ 182.497,43

Das beste Angebot ist (3).

----------

##-3.012

a) Die Einzahlungen in der Höhe von € 750,00 bilden eine 4-jährige nachschüssige Rente.

Der Zinssatz beträgt 3 % p. a. Der Kontostand beträgt nach 4 Jahren € 3.137,72 (Endwert). (Anmerkung: Die Zahl 1 im Zähler des Bruchs ist eine Formelgröße der geometrischen Reihe.)

----------

##-3.013

a) Die Zahlungen bilden eine 5-jährige vorschüssige Rente mit der Rate € 600,00. Der Zinssatz beträgt 4 % p. a. Es wird der Barwert berechnet.

----------

##-3.014

b) Es werden insgesamt 5.000,00 +5 \*1.000,00 =10.000,00 Euro eingezahlt.

Da sich diese Zahlungen verzinsen, muss der Kontostand größer als € 10.000,00 sein.

c) Kontostand K =5000 \*1,03^5 +1000 \*(1,03^5 -1)/(0,03) =11105,51

Der Kontostand beträgt € 11.105,51.

d) Auf ein Konto mit € 10.000,00 werden viermal jährlich nachschüssig € 2.000,00 eingezahlt. Es wird mit 2,5 % p. a. verzinst.

Der Kontostand nach der vierten Einzahlung beträgt € 19.343,16.

----------

##-3.015

b) Von dem Konto mit € 5.000,00 werden insgesamt € 5.000,00 abgehoben.

Da sich das Restkapital aber jeweils verzinst, muss der Kontostand positiv sein.

c) Kontostand K =5000 \*1,03^5 -1000 \*(1,03^5 -1)/(0,03) =487,23

Der Kontostand beträgt € 487,23.

d) Von einem Konto mit € 10.000,00 werden viermal jährlich nachschüssig € 2.000,00 abgehoben. Es wird mit 2,5 % p. a. verzinst. Der Kontostand nach der vierten Abhebung beträgt € 2.733,10.

----------

##-3.016

a) (q^n -1)/(q^n) =1 -1/(q^n) =1 -q^(-n)

b) (q^n -1)/(q^(n -1)) =((q^n -1) \*q) =(1 -q^(-n)) \*q

j-200 - Lösungen

##-3**.**017

a) Ohne Verzinsung beträgt die Jahresrate € 2.000,00.

Da aber auch die Zinsen bezahlt werden müssen, ist die Jahresrate höher als € 2.000,00.

b) R =€ 2.214,81

----------

##-3.018

a) Ohne Verzinsung beträgt die Rate € 1.000,00.

Da aber auch Zinsen anfallen, ist die Jahresrate höher als € 1.000,00.

b) R =€ 1.049,98

----------

##-3.019

b) Die € 80.000,00 werden auf den Tag der ersten Ratenzahlung aufgezinst und ergeben den Barwert einer vorschüssigen 16-maligen Jahresrente.

PV =80000,00 \*1,05^6; PV =€ 107.207,65

Daraus werden dann die Raten R berechnet.

R =€ 9.420,99

----------

##-3.020

b) PV =20000 \*1,04^3 =22497,28;

R =€ 2.397,13

----------

##-3.021

a) 50000 \*1,07^(10) -5000 \*(1,07^(10) -1)/(0,07) =29275,33

b) 17 Vollraten

c) RR =€ 3.739,67

d) RR =€ 4.001,45

----------

##-3.022

a) 28 Vollraten

b) RR =€ 798,71

c) RR \*1,05 =€ 838,64

d) € 23.711,05

----------

##-3.023 Barwert am Rentenbeginn:

PV =B\_(vor) =€ 38.288,45

a) 7 Vollraten

b) RR =€ 2.581,04+

----------

##-3.024 Barwert am Rentenbeginn: PV =€ 17.976,26

a) 11 Vollraten

b) RR =€ 867,86

----------

##-3.025

a) 29 Vollraten

b) Für die Verzinsung von 6 % sind die Zinsen höher als der abgehobene Betrag.

Das Kapital wird nicht aufgebraucht, sondern wächst immer weiter an.

----------

##-3.026 i =8,732 %

----------

##-3.027 i =2,334 %

----------

##-3.028 i =4,167 %

----------

##-3.029 FV =€ 86.334,24; PV =€ 40.977,89

----------

##-3.030 FV =€ 25.431,96; PV =€ 22.562,87

----------

##-3.031

a)

(1) € 106.507,03

(2) € 104.876,47

b) Der zum nominellen Zinssatz 7 % äquivalente Quartalszinssatz ist kleiner als 1,75 %.

Deshalb werden bei (2) die Raten weniger aufgezinst.

----------

##-3.032

a)

(1) € 970,80

(2) € 951,80

b) Der zum nominellen Zinssatz 16 % äquivalente Quartalszinssatz ist kleiner als 4 %.

Deshalb wird das Kapital bei (1) stärker verzinst, Stefanie kann deshalb eine höhere Rate beziehen.

----------

##-3.033 € 63.881,42

----------

##-3.034 € 263.091,94

----------

##-3.035 € 3.072,21

----------

##-3.036

21 Vollraten; RR =€ 1.244,00

----------

##-3.037

a) PV =€ 23.881,05; 6 volle Raten

b) € 1.811,04

c) 1811,04 \*1,03^(-3) =1657,36

----------

##-3.038

a) 11 Vollraten

b) € 4.911,96

c) 4911,96 \*1,05 =5157,55

----------

##-3.039

a) 4 Vollraten

b) € 1.030,00

c) 1030,00 \*1,04^(-0,5) =1010,00

j-201 - Lösungen

##-3.040 Angespartes Guthaben nach 40 Jahren: FV =€ 95.025,52; R =€ 6.082,77

----------

##-3.041

a) € 637.523,88

b) € 46.899,88

c) 18 Vollraten; RR =€ 4.779,83

d)

(1) € 413.794,41; € 24.810,11; 8 Vollraten;

RR =€ 47.094,68

(2) € 838.016,77; € 68.926,53; 50 Vollraten;

RR =€ 48.595,25

Bei langen Laufzeiten führt der Zinseszinseffekt zu starken Änderungen des Endwerts bzw. der Ratenhöhe.

----------

##-3.042 Angespartes Guthaben nach 40 Jahren:

FV =€ 116.106,38; R =€ 608,28

----------

##-3.043 Anzusparendes Guthaben nach 40 Jahren € 381.754,96; X =€ 328,80

----------

##-3.044

a) Er muss € 367.225,46 ansparen; R =€ 247,52

b) Sie muss € 483.004,91 ansparen; R =€ 310,57

c) Diskussionsthema für den Unterricht

----------

##-3.045

a) i =2 %; Rate =€ 593,26

b) i =3 %; Rate =€ 415,92

c) i =10 %; Rate =€ 34,08

d) Diskussionsthema für den Unterricht

----------

##-3.046

b) R =€ 1.242,89

----------

##-3.047

a) Da die Quartalsrate später fällig ist als die Monatsraten, müssen die Monatsraten für eine äquivalente Bewertung aufgezinst werden. Die Monatsrate ist deshalb kleiner als ein Drittel der Quartalrente.

b) € 493,44

----------

##-3.048

a) Gesamtzahlung Quartalsrente: € 18.000,00; aufgeteilt auf 10 Jahresraten: R =€ 1.800,00

b) € 1.747,58

----------

##-3.049

a) Gesamtzahlung Semesterrente: € 80.000,00; aufgeteilt auf 8 \*12 =96

Monatsraten: R =€ 833,33

b) € 900,23

c) Da sich bei einer späteren Auszahlung der Barwert der Monatsrente länger verzinst, wird dieser größer, dadurch wird auch die Monatsrate größer.

----------

##-3.050 Barwert der Quartalsrente:

PV =10000 \*1,05^(3,25) +10000 \*1,05^(-0,75) =21359,00

a) 5 Vollraten

b) RR =€ 2.205,23

----------

##-3.051 PV =€ 10.837,77

a) 5 Vollraten

b) RR =€ 1.737,46

----------

##-3.052 € 595,98

----------

##-3.053

a)

(1) € 1.488,33

(2) € 1.489,92

b) Da der zu i\_4 =1,5 % äquivalente Semesterzinssatz höher als 3 % ist, ergibt sich bei (2) eine höhere Rate als bei (1).

----------

##-3.054

a) € 173.908,05

b) € 109.935,63

----------

##-3.055

a) € 805,72

b) € 367,42

----------

##-3.056

a) € 299,64

b) Variante 1: € 434,46

Variante 2: € 189,75

j-202 - Lösungen

##-3.057

b) 10000 =(5850)/q +(5850)/(q^2)

c) 11,14 %

----------

##-3.058

b) 10000 =158 +(5858)/(1 +i) +(5850)/((1 +i)^2)

c) 12,4 %

----------

##-3.059

a) halbjährlich: (74,4 \*1,06)/2 =39,43

vierteljährlich: (74,4 \*1,08)/4 =20,09

monatlich: (74,4 \*1,1)/(12) =6,82

b) halbjährlich: i =27,1 %

vierteljährlich: i =23,4 %

monatlich: i =23,6 %

----------

##-3.060

23,12 23,12

b) 75 =7,5 +(23,12)/(q\_(12)) +(23,12)/(q^2\_(12)) +(23,12)/(q^3\_(12))

c) 17,76 %

----------

##-3.061 18,18 %

----------

##-3.062 18,17 %

----------

##-3.063 32,96 %

----------

##-3.064 14,94 %

----------

##-3.065

a) 3,856 %

b) 4,919 %

----------

##-3.066 5,23 %

----------

##-3.067 11,96 %

----------

##-3.068

a) 5,93 %

b) Bei dieser Variante werden € 2.000,00 erst in 4 Jahren fällig.

€ 2.000,00 in 4 Jahren sind weniger wert als € 2.000,00 heute. Deshalb ist dieses Angebot für den Kunden günstiger.

Der Effektivzinssatz wäre also geringer.

----------

##-3.069 nein; ca. 6,5 %

----------

##-3.070

a) 32000 ='Si[t=1;48](541,60)/((1 +i)^(t/(12)) +10000 \*(1 +i)^(-(48)/(12))

b) 4,73 %

----------

##-3.071 Leasing: 13,58 %

Kredit: 10,14 %

----------

##-3.072

b) 95000 =10000 +1600 \*((1 +i\_(12)^(48) -1)/(i\_(12)) \*1/((1 +i\_(12))^(48)) +20000 \*(1 +i\_(12))^(-48)

c) 5,56 %

d) € 1.531,03

e) Da bei einem niedrigeren Zinssatz die Leasingraten weniger stark abgezinst werden, kann der Barwert durch niedrigere Raten erzielt werden.

j-203 - Lösungen

##-Z 3.1

b) Monatlich € 50,00 sind im Quartal ohne Verzinsung € 150,00.

Abzüglich der Quartalsrate bleiben pro Quartal etwas weniger als € 20,00 am Konto liegen.

Nach 2 Jahren sind daher ca. € 160,00 am Konto und Familie Klüger kann ein Quartal mit den monatlichen Zahlungen aussetzen.

c) i\_(12) = ^(12)'w(1,015) -1 =0,001241 ...

i\_4 = ^(4)'w(1,015) -1 =0,003729 ...

50 \*(q\_(12)^(120) -1)/(q\_(12) -1) \*q\_(12) -131,75 \*(q\_4^(40) -1)/(q\_4 -1) =801,73

d) X ist jener Einmalbetrag, der am Beginn des Rückzahlungszeitraums auf das Sparkonto gelegt werden muss, damit die Quartalsraten bis zum Ende der 10 Jahre bezahlt werden können und am Konto kein Restbetrag verbleibt.

----------

##-Z 3.2

a) Aus 30000 =5000 \*(1,01^n -1)/(0,01) \*1/(1,01^n) erhält man mit Technologie: n =6,21..., also 6 volle Raten.

Restzahlung zum Zeitpunkt der letzten Vollrate: 30000 \*1,01^6 -5000 \*(1,01^6 -1)/(0,01) =1085,53 Restzahlung ein Semester später:

1085,53 \*1,01 =1096,38

b) Der zu i\_2 =1 % äquivalente Zinssatz ist i =1,01^2 -1 =0,0201 =2,01 %

Dieser ist etwas höher als 2 %, da durch die halbjährliche Verzinsung etwas mehr Zinsen entstehen.

c) Die Raten müssen etwas höher als € 3.000,00 sein, da der Wert der Raten durch die Verzinsung umso geringer ist, je später sie bezahlt werden.

d) Anton erhält 20 nachschüssige Quartalsraten zu je € 1.300,00 und eine Sonderzahlung von € 5.643,42 drei Jahre nach Erbschaftsantritt.

----------

##-Z 3.3

a)

(1) {{Grafik: Nicht darstellbar.}}

(2) Restbetrag nach 5 Jahren =Barwert der sechsjährigen Rente =

=25000 \*1,03^5 -5000 \*(1,03^3 -1)/(0,03) \*1,03^2 \*=12586,17

Aus der Gleichung 12586,17 =R \*(1,03^6 -1)/(0,03) \*1/(1,03^6) erhält man: R =€ 2.323,38

b) Der Einmalbetrag muss vor dem Bewertungszeitpunkt des Barwerts ausbezahlt werden, da € 24.000,00 <€ 25.000,00 ist und der Barwert daher abgezinst wurde.

----------

##-Z 3.4

a) 25000 =7000 +257,68 \*(1 +i)^(-1/(12)) +... +257,68 \*(1 +i)^(-(60)/(12)) +5000 \*(1 +i) ^(-(60)/(12))

Mit Technologie: i =4,24 %

b) Bei vorschüssiger Bezahlung erfolgen alle Zahlungen früher als bei nachschüssiger Bezahlung.

Die Restschuld wird jeweils am Beginn des Monats verringert.

Da die monatlichen Raten aber gleich hoch bleiben, werden höhere Zinsen verrechnet.

Der Effektivzinssatz wäre bei einer vorschüssigen Zahlung etwas höher.

c) Die sofort fällige Anzahlung ist um € 2.000,00 geringer und damit die am Beginn verbleibende Schuld um € 2.000,00 höher. Der Geldbetrag, für den Zinsen zu bezahlen sind, ist in weiterer Folge also höher als im ursprünglichen Angebot.

Trotzdem bleibt die monatliche zu leistende Rate gleich hoch.

Der Effektivzinssatz wäre also geringer und die Einnahmen des Leasinggebers geringer.

----------

##-Z 3.5

a) 979 =33,04 \*(1 +i)^(-1/(12)) +... +33,04 \*(1 +i)^(-(36)/(12))

Mit Technologie: i =13,93.; ca. 13,9 %

Der angegebene Zinssatz ist korrekt.

b) 979 =979 \*0,05 +979 \*0,012 +33,04 \*(1 +i)^(-1/(12)) +... +33,04 \*(1 +i)^(-(36)/(12))

Mit Technologie: i =19,155.

Effektivzinssatz i ~~19,16 %

j-204 - Lösungen

#### \*\*-4 Schuldtilgung

##-4.001

a) € 159.384,81

b)

h | Z\_h | T\_h

0 | - | -

1 | 6.000,00 | 24.000,00

2 | 4.560,00 | 20.440,00

3 | 3.333,60 | 26.666,40

4 | 1.733,62 | -1.733,62

5 | 1.837,63 | -1.837,63

6 | 1.947,89 | 13.052,11

7 | 1.164,76 | 13.835,24

8 | 334,65 | 5.577,50

-----

h | A\_h | K\_h

0 | - | 100.000,00

1 | 30.000,00 | 76.000,00

2 | 25.000,00 | 55.560,00

3 | 30.000,00 | 28.893,60

4 | 0,00 | 30.627,22

5 | 0,00 | 32.464,85

6 | 15.000,00 | 19.412,74

7 | 15.000,00 | 5.577,50

8 | 5.912,15 | 0,00

-----

c) Durch die Zahlung der Annuitäten wird die Schuld nicht vollständig getilgt sein, da 12 500 =10000 . Daraus ist ersichtlich, dass keinerlei Zinsen berücksichtigt wurden.

----------

##-4.002

a) ursprüngliche Schuld: € 100.000,00

Im 1., 4. und 5. Jahr werden € 20.000,00, im 2. Jahr € 15.000,00 und im 7. Jahr € 25.000,00 zurückbezahlt. Im 3. und 6. Jahr wird nichts zurückbezahlt.

b) Zinssatz i =4,5 % letzte Zeile:

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

8 | 975,80 | 21.684,43 | 22.660,23 | 0,00

----------

##-4.003

h | Z\_h | T\_h

0 | 0,00 | 0,00

1 | 9.000,00 | 21.000,00

2 | 7.110,00 | 12.890,00

3 | 5.949,90 | -5.949,90

4 | 6.485,39 | 43.514,61

5 | 2.569,08 | 28.545,29

Summe | 31.114,37 | 100.000,00

-----

h | A\_h | K\_h

0 | 0,00 | 100.000,00

1 | 30.000,00 | 79.000,00

2 | 20.000,00 | 66.110,00

3 | 0,00 | 72.059,90

4 | 50.000,00 | 28.545,29

5 | 31.114,37 | 0,00

Summe | 131.114,37 | -

----------

##-4.004

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 10.000,00

1 | 300,00 | 700,00 | 1.000,00 | 9.300,00

2 | 279,00 | 2.721,00 | 3.000,00 | 6.579,00

3 | 197,37 | -197,37 | 0,00 | 6.776,37

4 | 203,29 | 2.796,71 | 3.000,00 | 3.979,66

5 | 119,39 | 3.979,66 | 4.099,05 | 0,00

Summe | 1.099,05 | 10.000,00 | 11.099,05 | -

j-205 - Lösungen

##-4.005

a) K\_0 =200000,00

i =9,00 %

A =39738,10

h | Z\_h | T\_h

0 | - | -

1 | 18000,00 | 21738,10

2 | 16043,57 | 23694,53

3 | 13911,06 | 25827,04

4 | 11586,63 | 28151,47

5 | 9053,00 | 30685,11

6 | 6291,34 | 33446,77

7 | 3281,13 | 36456,98

'Si | 78166,72| 200000,00

-----

h | A\_h | K\_h

0 | - | 200000,00

1 | 39 738,10 | 178 261,90

2 | 39 738,10 | 154 567,36

3 | 39 738,10 | 128 740,32

4 | 39 738,10 | 100 583,85

5 | 39 738,10 | 69 903,74

6 | 39 738,10 | 36 456,98

7 | 39 738,10 | 0,00

'Si | 278166,72 | -

-----

b) Die Annuitäten tilgen einerseits die Schuld und decken andererseits auch die anfallenden Zinsen ab. Sinken die Zinsen, werden daher auch die zu bezahlenden Annuitäten geringer.

----------

##-4.006

K\_0 =100.000,00

i\_2 =2 %

A =3.850,68

h ... Ende des Semesters

h | Z\_h | T\_h| A\_h | K\_h

0 | - | - | - | 100.000,00

1 | 2.000,00 | 1.850,68 | 3.850,68 | 98.149,32

2 | 1.962,99 | 1.887,69 | 3.850,68 | 96.261,63

15 | 1.408,75 | 2.441,93 | 3.850,68 | 67.995,46

37 | 75,50 | 3.775,17 | 3.850,68 | 0,00

----------

##-4.007

K\_0 =100000,00

i =7,00 %

A =15000,00

h | Z\_h | T\_h| A\_h | K\_h

0 | - | - | - | 100000,00

1 | 7000,00 | 8000,00 | 15000,00 | 92000,00

2 | 6440,00 | 8560,00 | 15000,00 | 83440,00

3 | 5340,80 | 9159,20 | 15000,00 | 74280,80

4 | 5199,66 | 9800,34 | 15000,00 | 64480,46

5 | 4513,63 | 10486,37 | 15000,00 | 53994,09

6 | 3779,59 | 53994,09 | 57773,67 | 0,00

'Si | 32773,67 | 100000,00 | 132 773,67 | -

----------

##-4.008

a)

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

0 | - | - | - | 25.000,00

1 | 625,00 | 0,00 | 625,00 | 25.000,00

2 | 625,00 | 0,00 | 625,00 | 25.000,00

b) Frau Niggler zahlt nur die jährlich anfallenden Zinsen, von der Schuld wird nichts getilgt.

c) i ~~0,91 %

----------

##-4.009

a) K\_0 =€ 1.000.000,00;

i =4 %; n =30 Jahre

b) K\_0 =€ 1.000.000,00;

i =4 %; n =5 Jahre; A\_4 =224627,11

c) K\_0 =€ 1.000.000,00;

i =4 %; n =15 Jahre; T\_(10) =71081,76

d) K\_0 =€ 100.000,00;

i =4 %; n =10 Jahre; Z\_9 =930,15

----------

##-4.010

a) Z\_8 =€ 18,39; T\_(26) =€ 338,28

b) K\_3 =€ 65.662,40; A\_8 =€ 13.643,52

c) T\_(14) =€ 56.204,77

----------

##-4.011

a) Diagramm 2 zeigt die Rückzahlung einer Annuitätenschuld.

Mit jeder bezahlten Annuität nimmt der Tilgungsanteil zu und der zu bezahlende Zinsanteil ab.

b) Im Diagramm 1 werden nur die Zinsen bezahlt.

Die Restschuld nach 20 Jahren entspricht der Anfangsschuld.

Im Diagramm 3 ist die Annuität geringer als die zu bezahlenden Zinsen.

Es ergibt sich jeweils ein negativer Tilgungsanteil.

Die Restschuld nach 20 Jahren ist größer als die ursprüngliche Schuld.

----------

##-4.012

h | Z\_h | T\_h

0 | 0,00 | 0,00

1 | 35.851,86 | 14.148,14

20 | 2.347,44 | 35.567,27

-----

h | A\_h | K\_h

0 | 0,00 | 543.210,00

1 | 50.000,00 | 529.061,86

20 | 37.914,71 | 0,00

----------

##-4.013

a) K\_0 =€ 100.000,00; i =4 %; 7 volle Annuitäten

b) K\_0 =€ 20.000,00; i =4 %; 4 volle Annuitäten

----------

##-4.014

a) Eine Schuld von € 25.000,00 wird durch jährlich nachschüssige Annuitäten in Höhe von € 2.500,00 zurückbezahlt.

Im 5. Jahr erfolgt zusätzlich eine Sonderzahlung von € 2.500,00.

Im 6. Jahr erfolgt keine Zahlung.

Ab dem 7. Jahr werden € 3.500,00 bezahlt.

A\_6 =€ 0,00

b) Der Zinsanteil im 8. Jahr ist höher als im 7. Jahr.

Es muss also eine Zinssatzerhöhung stattgefunden haben.

j-206 - Lösungen

##-4.014

c)

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

10 | 74,20 | 2.473,24 | 2.547,44 | 0,00

----------

##-4.015

a) Eine Schuld von € 30.000,00 wird durch jährlich nachschüssige Annuitäten in Höhe von € 2.800,00 zurückbezahlt. Im 4. und 5. Jahr werden nur die Zinsen bezahlt.

Im 6. Jahr erfolgt eine Zahlung in Höhe von € 5.000,00.

Ab dem 7. Jahr werden € 3.300,00 bezahlt.

T\_4 =T\_5 =€ 0,00

h | Z\_h | T\_h | A\_h | K\_h

12 | 38,84 | 2.589,41 | 2.628,25 | 0,00

d) Die Tilgungsdauer würde sich erhöhen, da die jährliche Tilgung geringer wäre.

----------

##-Z 4.1

a) Die ursprüngliche Schuld beträgt € 10.000,00.

c) Z\_1 =K\_0 \*i

i =(400)/(10000) =40 %

d) Der für das 3. Jahr anfallende Zinsanteil beträgt € 228,64.

Dieser wird durch die Annuität in Höhe von € 200,00 nicht vollständig gedeckt.

Der Tilgungsanteil ist daher negativ. Die Restschuld erhöht sich auf € 5.744,64.

e) Im 4. Jahr hätte die Annuität € 229,79 +€ 5.744,64 =€ 5.974,43 geleistet werden müssen.

----------

##-Z 4.2

a) K\_3 =K\_4 +T\_4 =€ 9.625,95 +€ 1.413,62 =€ 11.039,56

i =(Z\_4)/(K\_3) =3,5 %

9625,95 =K\_0 \*1,035^4 -1800 \*(1,035^4 -1)/(0,035)

K\_0 =€ 15.000,00

b) Das Versäumnis kann durch eine Annuität in Höhe von € 3.600,00 nicht vollständig ausgeglichen werden, da für das 5. und 6. Jahr auch Zinsen zu bezahlen sind.

c) 9625,95 =1800 \*((1,028^n -1)/(0,028) \*1/(1,028^n)

n =5,87...

Die Tilgungsdauer beträgt 10 Jahre.

d) Im letzten Jahr sind € 42,92 Zinsen zu bezahlen.

Die zu tilgende Restschuld des Vorjahres beträgt € 1.532,88.

Die letzte Annuität beträgt somit € 1.532,88 +€ 42,92 =€ 1.575,80.

j-207 - Lösungen

#### \*\*-5 Investitionsrechnung

##-5.001

a) € 154.081,42

b) Kapitalwert =€ 4.081,42

c) ja, da positiver Kapitalwert

d) Der Kapitalwert ist für i\_k <13,38 % positiv und die Investition sinnvoll.

----------

##-5.002

a) Der Kapitalwert ist für i\_k <4,2 % positiv und die Investition sinnvoll.

Bei i\_k =2 % ergibt sich ein Kapitalwert in Höhe von 3000 Euro.

----------

##-5.003

a) € 33.585,32

b) Kapitalwert =-€ 6.414,68

c) nein, da negativer Kapitalwert

----------

##-5.004

a) C\_0 =€ 206,37

b) C\_0 =A\_0 +R \*((1 +i\_k)^n -1)/(i\_k) \*1/((1 +i\_k)^n)

----------

##-5.005

R =€ 3.137,63

----------

##-5.006

I: C\_0 =€ 1.246,50;

II: C\_0 =€ 1.719,14; Projekt II vorziehen

j-208 - Lösungen

##-5.007

a) {{Grafik: Nicht darstellbar.}}

b) i\_k ~~11 %

c) ca. 10,91 %

----------

##-5.008

a) I: C\_0 =€ 7.859 und II: C\_0 =€ 9.810

Aufgrund der unterschiedlichen Laufzeiten ist der Kapitalwert keine Grundlage für eine seriöse Entscheidung.

b) A\_I =€ 3.160 und A\_(II) =€ 2.588; A\_I ist höher.

----------

##-5.009

a) i\_k ~~6,9 %; C\_(0,1) =C\_(0,2) ~~€ 6.100

b) Bei i\_k =5 % ist Investition 2, bei i\_k =10 % Investition 1 sinnvoller.

c) Der Kapitaleinsatz müsste um etwas mehr als 5000 Euro verringert werden.

----------

##-5.010

i =8,14 %

----------

##-5.011

I: i\_0 =11,79 % und II: i\_0 =11,41 %;

Projekt I vorziehen

----------

##-5.012

a) Eine Beurteilung mithilfe der Kapitalwertmethode ist aufgrund der unterschiedlichen Nutzungsdauer der Maschinen nicht zu empfehlen.

b) Annuität A: 756; B: 421; Entscheidung für A

c) i\_0: A: 12,68 %; B: 10,92 %; Entscheidung für A

e) i\_(mod): A: 9,84 %; B: 9,2 %; Entscheidung für A

----------

##-5.013

a) Maschine A: C\_0; A " € 1.500; i\_0 " 10,75 %

Maschine B: C\_0; B " € 2.600; i\_0 " 11,89 %

Beide Methoden führen zur Entscheidung für Maschine B.

b) Die Methode des internen Zinssatzes führt stets zur Entscheidung für Maschine B.

Der Kapitalwert C\_(0, B) von Maschine B ist nur im Bereich für i\_k >8,4 % größer als der Kapitalwert C\_(0, A) von Maschine A.

Ab i\_k >8,4 % führen beide Methoden zur selben Kaufentscheidung.

c) i\_k ~~8,41 %

d) i\_(mod): A: 9,4 %; B: 9,11 %; Entscheidung für A

j-209 - Lösungen

##-5.014

a)

Jahr: 1, 2, 3, 4

Einnahmen: 0,35 \*36000

Ausgaben: 0,07 \*36000 +2000

-----

Jahr: 5

Einnahmen: 0,35 \*36000 +7200

Ausgaben: 0,07 \*36000 +2000

b) Pkw kaufen, da i\_0 >i\_k

c) Pkw kaufen, da i\_(mod) >5 %

----------

##-5.015

a) C\_0 =1262; man sollte investieren

b) Die angegebene Annuität ist zu gering, da 445 \*4 =1780 viel geringer als 2000 ist.

c) x =1,1402; x ist der Aufzinsungsfaktor bei einem internen Zinssatz i\_0 =14,02 %.

d) i\_(mod) =9,34 %; man sollte investieren

----------

##-Z 5.1

c) Der interne Zinssatz entspricht der Nullstelle der Kapitalwertkurve.

Für Maschine 1: i =8 %

d) Haben die Veranlagungen unterschiedliche Nutzungsdauer, wird der gleiche Kapitalwert auf eine unterschiedliche Anzahl von Annuitäten verteilt.

Die Veranlagungen haben unterschiedliche Annuitäten.

----------

##-Z 5.2

a) Kapitalwert: (8000)/(1,085) +(9000)/(1,085^2) +(10000)/(1,085^3) +(5000)/(1,085^4) -25000 =1455,32

b) Bei Maschine A wird der Kapitalwert auf 4 Raten, bei Maschine B auf 3 Raten aufgeteilt.

Man wird sich für die Maschine B entscheiden, da die Annuitäten dieser Maschine höher sind.

c) 25000 \*(1 +i\_(mod))^4 =8000 \*1,04^3 +9000 \*1,04^2 +10000 \*1,04 +5000

Modifizierter interner Zinssatz i\_(mod) =8,1 %

Entscheidung für Maschine B, da deren modifzierter interner Zinssatz höher ist.

---------

#### \*\*-6 Kurs- und Rentabilitätsrechnung

##-6.001

a) K\_0' =(97,5)/(100) \*3000000 =2925000

K =0,06 \*3000000 =180000

Der Kaufpreis beträgt € 2.925.000,00 und der Kupon ist € 180.000,00.

j-210 - Lösungen

##-6.001

b) T =K\_0 =€ 3.000.000,00

----------

##-6002

a) C\_(2. 5. 2014) =147,7

b) K\_0' =(147,7)/(100) \*5000 =7385

c) K =0,0137 \*5000 =€ 68,50

d) T =K\_0 =€ 5.000,00

----------

##-6.003

a)

Größe | Wert

Stückelung | € 1.000,00

Verzinsung | 4,15 %

Laufzeit | 30 Jahre

Emissionskurs | 99,72

Tilgungskurs | 100

Nominalwährung | EUR

b) K\_0' =(99,72)/(100) \*1000 =997,2

c) K =€ 41,50

d) T =€ 1.000,00

----------

##-6.004

a) C\_(16. 4. 2014) =109,1 5

Größe | Wert

Stückelung | € 1.000,00

Verzinsung | 4,75 %

Laufzeit | 7 Jahre

Emissionskurs | 100,89

Tilgungskurs | 100

Emittent | voestalpine AG

Emissionsvolumen | € 500.000.000,00

-----

c) K\_0' =(100,89)/(100) \*1000 =1008,90

d) K =€ 47,50

e) T =€ 1.000,00

----------

##-6.005

a) T =€ 3.000.000,00

b) K =€ 180.000,00; K\_0' =€ 3.486.653,75; C\_0 =116,22

----------

##-6.006

a) T =K\_0' =€ 1.000,00

b) K =€ 30,00; K\_0' =€ 1.121,74; C\_0 =112,17

j-211 - Lösungen

##-6.007

K =€ 135.000,00; K\_0' =€ 2.613.020,60;

C\_0 =87,1; T =3.120.000,00

----------

##-6.008

Rendite i' ~~3,236 %

----------

##-6.009 Anna kann eine Rendite i' von etwa 4,35 % erwarten.

----------

##-6.010 Katharina kann eine Rendite i' von etwa 5,498 % erwarten.

----------

##-6.011

a) Emissionskurs

C\_0 =(44230)/(50000) =88,46

b) Effektivverzinsung ohne Berücksichtigung der KESt; i' ~~10,41 %

----------

##-6.012

a) Kaufpreis K\_0' =€ 98.500,00

b) Kurs C =C(0,05) =94,9243

c) Steigen die Rendite i' oder der Marktzinssatz i\_M, so fällt der Kurs und damit der Kaufpreis der Anleihe.

----------

##-6.013

a) Rendite i' ~~5,13753 %

b) Kaufpreis K\_0' =€ 50.600,00; Kuponzahlung K =€ 2.687,50; Tilgungsbetrag T =K\_0 =€ 50.000,00

c) Rendite i' ~~4,3013 %

d) Herr M. sollte kaufen, da die Rendite mit etwa 6,2456 % größer als der Marktzinssatz ist: i' >i\_M

----------

##-6.014

a) Kurs C(i' =3,182 %) =95,78

b) Kurs C(0,03182) =98,19

----------

##-6.015

c)

A | B | C

Jahr | t in Jahren | Zahlung

2010 | 0 | -€ 109,00

2011 | 1 | € 3,90

2012 | 2 | € 3,90

2013 | 3 | € 3,90

2014 | 4 | € 3,90

2015 | 5 | € 3,90

2016 | 6 | € 3,90

2017 | 7 | € 3,90

2018 | 8 | € 3,90

2019 | 9 | € 3,90

2020 | 10 | € 103,90

2,85 % =IKV(C2:C12)1

j-212 - Lösungen

##-6.016

a) Kurs C(i' =3,424 %) =96,09

b) C(i\_M) =100 \*i \*(1 -(1 +i\_M)^(-n))/(i\_M) +(C\_n)/((1 +i\_M)^n)

c) Kurs C(0,03424) =96,09

Die beiden Kurse stimmen überein.

----------

##-6.017

i' ~~6,53483 %; Die Angabe der Österreichischen Kontrollbank ist richtig.

----------

##-6.018

a)

Anleihe 1: i' ~~5,6458 %

Anleihe 2: i' ~~4,2 %

b) Die Anleihe 1 ist für den Käufer ertragreicher.

----------

##-6.019

a)

Anleihe 1: i' ~~4,6361 %

Anleihe 2: i' ~~4,25 %

b) Die Anleihe 1 ist für den Käufer ertragreicher.

----------

##-6.020

a)

Anleihe 1: i' ~~5,755 %

Anleihe 2: i' ~~3,6581 %

Anleihe 3: i' ~~2,9487 %

b) Ein Anleger sollte sich für die Anleihe 1 entscheiden.

----------

##-6.021

a)

Anleihe 1: i' ~~7,2086 %

Anleihe 2: i' ~~2,536 %

Anleihe 3: i' ~~4,2862 %

b) Ein Anleger sollte sich für die erste Anleihe entscheiden.

----------

##-6.022

a) Kaufpreis K\_0' =€ 98.500,00

b) Kurs C(0,05) =103,546

c) Steigt die Rendite i' oder der Marktzinssatz i\_M, so fällt der Kurs, da bei höherer Verzinsung die Rückflüsse stärker abgezinst werden. Daher sinkt der Barwert und somit der Kurs der Anleihe.

----------

##-6.023

a) i:A =6,24 %; i\_B =6,65 %

Der Investor soll vor KESt die Anleihe B wählen, weil ihre Rendite höher ist als die von A.

b) i\_A =5,07 %; i\_B =4,81 %

Der Investor soll nach einer KESt von 25 % die Anleihe A wählen, weil in diesem Fall ihre Rendite höher ist als die von B.

Die KESt von 25 % verändert also die Auswahl.

----------

##-6.024 Da der Tilgungsbetrag gleich dem Nennwert ist, ist der Tilgungskurs C\_n =100.

C(i\_M) ='Si[t=1;n](100 \*i \*(1 +i\_M)^(-t)) +100 \*(1 +i\_M)^(-n)

Summenformel für geometrische Reihen:

s\_n =a\_1 \*(1 -q^n)/(1 -q) mit

a\_1 =100 \*i \*(1 +i\_M)^(-1);

a\_2 =100 \*i \*(1 +i\_M)^(-2);

q =(a\_2)/(a\_1) =(100 \*i \*(1 +i\_M)^(-2))/(100 \*i \*(1 +i\_M)^(-1)) =(1 +i\_M)^(-1)

-----

s\_n =100 \*i \*(1 +i\_M)^(-1) \*(1 -((1 +i\_M)^(-1))^n)/(1 -(1 +i\_M)^(-1))

s\_n =100 \*i \*(1 +i\_M)^(-1) \*(1 -(1 +i\_M)^(-n))/(1 -1/(1 +i\_M))

s\_n =100 \*i \*1/(1 +i\_M) \*(1 -(1 +i\_M)^(-n))//((1 +i\_M -1)/(1 +i\_M))

s\_n =100 \*i \*(1 -(1 +i\_M)^(-n))/(i\_M)

C(i\_M) =s\_n +100 \*(1 +i\_M)^(-n)

C(i\_M) =100 \*i \*(1 -(1 +i\_M)^(-n))/(i\_M) +100 \*(1 +i\_M)^(-n)

j-213 - Lösungen

##-6.025

a) Nominalwert K\_0 =€ 5.000,00; Emissionskurs C\_0 =98; Tilgungskurs C\_5 =100

b) Aufzinsen mit dem Aufzinsungsfaktor (1 +i'):

4900 (1 +i')^5 =250 \*((1 +i')^5 -1)/i') +5000

c) Rendite i' ~~5,468 %. Die Rendite stimmt mit der von Excel gelieferten überein.

----------

##-Z 6.1

a) Die Zinszahlung beträgt jährlich 4 % des Nominalwerts der Anleihen.

Der Nominalwert liegt daher bei € 10.000,00.

Frau Traxl besitzt 10 Stück der Anleihe.

Sie hat dafür 1,02 \*€ 10.000,00 =€ 10.200,00 bezahlt.

b) C\_7 +4 \*((1 +i')^7 -1)/(i') =102 \*(1 +i')^7

c) Die Rendite wird für Frau Traxl geringer, da die Zinszahlungen über einen kürzeren Zeitraum erfolgen und ihre Höhe nicht an die geänderte Laufzeit angepasst werden.

Allerdings erhält sie den Tilgungsbetrag früher und kann das erhaltene Geld vielleicht besser investieren.

d) Der faire Preis bei i\_M =5 % beträgt ca. 98.

Die Nominalverzinsung der Anleihe liegt unter dem Marktzins.

Damit die Rendite der Anleihe nicht unter den Marktzinssatz fällt, muss ihr Preis unter 100 liegen.

----------

##-Z 6.2

a) Nominalwert: € 50.000,00

Emissionskurs C\_0 =(52000)/(50000) \*100 =104

Kupon: € 1.750,00

Nominalzinssatz i =(1750)/(50000) =3,5 %

b) Rendite der Anleihe: 52000 =1750 \*(1 -(1 +i)^(-5))/i +50000 \*(1 +i)^(-5)

i =2,64 % i

Effektivverzinsung der Maschine: 50000 =9000 \*(1 -(1 +i)^(-5))/i +10000 \*(1 +i)^(-5)

i =2,9 %

Herr Steiner sollte die Maschine kaufen, da deren Effektivverzinsung höher als die Rendite der Anleihe ist.

c) Fehler: In der Berechnung wurde auch für den Tilgungsbetrag die KESt berechnet.

j-214 - Quellennachweis

##### \*\*-Quellennachweis

Seite 3: Adobe Stock: Young high school students (#5131585). (c) Yuri Arcurs.

Seite 7: Statistik zur Weltbevölkerung (Die Presse).

Seite 7: Jost Bürgi (www.profcardy.com/matematicos).

Seite 7: John Napier (cwx.prenhall.com).

Seite 7: Logarithmentafeln Henry Briggs (cs.nott.ac.uk).

Seite 12: Adobe Stock: Schachfiguren (#294120). (c) Michael Mccloskey.

Seite 14: Leonhard Euler (Wikimedia Commons, gemeinfrei).

Seite 15: Adobe Stock: Gateway arch (#4890056). (c) Randy McKown.

Seite 31: Hector und die Entdeckung der Zeit (www.buch.de).

Seite 37: Adobe Stock: color pills (#61476012). (c) tycoon101.

Seite 42: Versuchsaufbau: Messung der Wassertemperatur. (c) Friedrich Tinhof.

Seite 42: Display TI-84 Plus. (c) Friedrich Tinhof.

Seite 44: Pierre-Francois Verhulst (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 46: Adobe Stock: Sunflower (#11505885). (c) Kurhan.

Seite 47: Adobe Stock: Großtrappe laufend (#29361908). (c) barantza.

Seite 49: Adobe Stock: Child cutting out scissors paper (#55298662). (c) Gennadiy Poznyakov.

Seite 51: Adobe Stock: Autobahnalltag (#8915679). (c) Aamon.

Seite 51: Adobe Stock: coffee machine (#52689722). (c) winston.

Seite 52: Adobe Stock: Spring (#41300092). (c) keller.

Seite 53: Adobe Stock: weiße seerosen (#820421). (c) Marc Heiligenstein.

Seite 53: Adobe Stock: Finanzspritze (#4158380). (c) Daniel Hohlfeld.

Seite 54: Adobe Stock: Hand Holds Petri Dish with Bacteria Culture (#15958005). (c) Alexander Raths.

Seite 54: Adobe Stock: People on the planet earth (#13157950). (c) alma\_sacra.

Seite 54: Adobe Stock: Atom, Nuklear (#6215856). (c) Dark Vectorangel.

Seite 55: Adobe Stock: Kernkraftwerk Temelin in Rapsfeld (#11604743). (c) williem.

Seite 56: Adobe Stock: female skeleton with transparent muscles (#260388). (c) AlienCat.

Seite 56: Ötzi - der Mann aus dem Eis (www.iceman.it).

Seite 56: chernobyl nuclear power plant (Wikimedia Commons).

Seite 57: Dr. Paul am Großglockner. (c) Markus Paul.

Seite 57: Versuchsaufbau mit Kunststofffolie. (c) Fritz Tinhof.

Seite 58: Adobe Stock: Moniereisen im Beton (#56789643). (c) StudioLaMagica.

Seite 59: Adobe Stock: Zuckerrüben (#4482854). (c) Rebel.

Seite 59: Das Menü eines Jungstieres (Universität für Bodenkultur Wien).

Seite 59: Adobe Stock: Pfefferminztee (#45026709). (c) Nadine Conrad.

Seite 60: Adobe Stock: arbre en bulle (#6945489). (c) NJ.

Seite 61: Adobe Stock: Bullying (#40997722). (c) Olaf Speier.

Seite 62: Transitlawine rollt (Transitforum, APA).

Seite 62: Lkw-Fahrten Brennerautobahn (tirol.gv.at).

Seite 63: Weltbevölkerung nach Regionen (Österreichisches Gesellschafts- und Wirtschaftsmuseum).

Seite 66: Adobe Stock: Seismograph for drilling (#52251355). (c) shamtor.

Seite 71: 100 US-Dollar-Schein Vorderseite (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 75: C25 3-month money market rates (www.ecb.int).

Seite 78: For sale by owner (www.principalspage.com).

Seite 80: Adobe Stock: Rotes Sparkassenbuch, in dem sich Geldscheine befinden (#50853889). (c) Jörg Lantelme.

Seite 90: Adobe Stock: Grundstück zu verkaufen (#44563684). (c) DOC RABE Media.

Seite 90: Adobe Stock: Geld 427 (#62026626). (c) K.-U. Häßler.

Seite 91: Adobe Stock: Percentages destroy your dreams (#26573981). (c) 3d world.

Seite 91: Adobe Stock: classical bank facade (#125747). (c) mr\_funkenstien.

Seite 92: Honda CBR 600 RR (www.honda.de).

Seite 93: Adobe Stock: Neuverschuldung (#58950248). (c) blende11.photo.

Seite 94: Adobe Stock: lachende Frau beim backen (#29570229). (c) Light Impression.

Seite 95: Adobe Stock: sparen, sparschwein (#60741775). (c) Trueffelpix.

Seite 99: Adobe Stock: Scales. 3d (#9613222). (c) Maksym Yemelyanov.

Seite 111: Adobe Stock: Scales. 3d (#9613222). (c) Maksym Yemelyanov.

Seite 116: Adobe Stock: button würfel 3d jetzt kaufen später zahlen (#28472549). (c) mopsgrafik.

j-215 - Quellennachweis

Seite 116: Ratenzahlung (www.neckermann.at).

Seite 117: KIA Magentis (www.kia.at).

Seite 119: Adobe Stock: wald #2 (#1134420). (c) Val Thoermer.

Seite 120: Adobe Stock: Baustoffe (#10452161). (c) focus finder.

Seite 120: Adobe Stock: A small cottage in the sunny day, vector illustration (#31351381). (c) Flavijus Piliponis.

Seite 123: Adobe Stock: spielglück (#242978). (c) Thomas Aumann.

Seite 124: Adobe Stock: running (#2997059). (c) falkjohann.

Seite 124: Sterbetafel (Statistik Austria).

Seite 125: Adobe Stock: Birthday Cake - Twenty (#5729196). (c) JJAVA.

Seite 125: Pensionsermittlung (Die Presse, 9. 2. 2012).

Seite 126: Adobe Stock: rente (#1219921). (c) photoGrapHie.

Seite 127: Adobe Stock: Baugrund (#5051625). (c) bilderbox .

Seite 127: Adobe Stock: red saloon car (#2268128). (c) Violetstar.

Seite 128: Logo AK Wien (wien.arbeiterkammer.at).

Seite 129: Scans diverser Werbeprospekte.

Seite 130: Adobe Stock: family-playground 06 (#24974604). (c) Patrizia Tilly.

Seite 130: Adobe Stock: Holzstempel auf Dokument: Erbschaft (#41439845). (c) Gina Sanders.

Seite 131: Adobe Stock: Leasingvertrag (#1454143). (c) silke heyer.

Seite 133: Adobe Stock: Scales. 3d (#9613222). (c) Maksym Yemelyanov.

Seite 142: Adobe Stock: Geldscheine im Briefumschlag - Darlehen (#73674044). (c) magele.

Seite 143: Adobe Stock: Geld 427 (#62026626). (c) K.-U. Häßler.

Seite 143: Adobe Stock: Neuverschuldung (#58950248). (c) blende11.photo.

Seite 144: Adobe Stock: Man with the symbol of the percentage (#29764014). (c) Texelart.

Seite 150: Adobe Stock: Tischler an der Fräsmaschine (#36690117). (c) Kzenon.

Seite 151: Adobe Stock: Tischler beim Sägen (#22056706). (c) Kzenon.

Seite 157: Druckmaschine der Firma Trauner. (c) Clemens Ascher.

Seite 160: Adobe Stock: chaine de montage (#1144002). (c) Philippe Minisini.

Seite 161: Adobe Stock: Austria Invest Concept (#65684402). (c) xtock.

Seite 162: Adobe Stock: puzzle\_circle\_finance (#28394298). (c) Stefan Yang.

Seite 162: Comic "Internationale Automobilerzeugungs AG" (Quelle unbekannt).

Seite 163: Adobe Stock: Autoverkäufer (#12239578).

Seite 166: Andritz-Anleihe (Die Presse).

Seite 167: Wertpapier: Mantel und Kuponbogen (www.oenb.at).

Seite 178: Bundesanleihe (Österreichische Kontrollbank AG).

Screenshots von Tabellen, Graphen und Auswertungen wurden mithilfe von am Markt bekannten Tabellenkalkulationsprogrammen, CAS und GTR erstellt.

Alle übrigen Grafiken und Fotos sind Eigentum des TRAUNER Verlags.

j-216 - Stichwortverzeichnis

##### \*\*-Stichwortverzeichnis

A

Abnahme, beschränkte 41

-, exponentielle 10

Abnahmefaktor 9

Abnahmerate 9

Abnahmevorgänge 35

absolute Änderung 33

absoluter Zuwachs 10

Aktie 165

al pari 168

Änderung, absolute 33

Änderungsrate 9, 33

Anfangsmenge 33

Anleihen 165, 167

-, öffentliche 167

Annuität 132, 134, 152

Annuitätenmethode 152

Annuitätenschuld 136, 140

Anschaffungskosten 148

antizipative Verzinsung 70

äquivalente Zinssätze 85, 109

Äquivalenzprinzip 133

Äquivalenzprinzip 77, 82, 99

Asymptote 11

Aufgeld 176

Ausgabekurs 168

Ausgaben, laufende 148

B

Bakterienwachstum 34

Bankschuldverschreibungen 167

Barwert 69, 77

-, Rente 103

-, Sparbuch 97

Barwertformel 72, 76

beschränkte Abnahme 41

beschränkte Zunahme 41

beschränktes Wachstum 40

Bestand 33

Bezugszeitpunkt 69

Bundesanleihe 165

C

Cashflow 77

D

dekadischer Logarithmus 19

dekursive Verzinsung 70

dekursiver Zinseszins 76

Depotleasing 117

durchschnittliche Verzinsung 80

durchschnittlicher Zinssatz 80

E

effektiver Zinssatz 170

Effektivverzinsung 113, 128

Effektivzinssatz 114

Eigentumswohnung 110

einfache Zinsen 70

einfache Zinsrechnung 72

Einnahmen, laufende 148

Emissionskurs 168, 173

Endwert 69

-, Sparbuch 96

Endwertformel 72, 76

Entlogarithmieren 19

eulersche Zahl 14

Excel, Rentenrechnung 103

Exponentialfunktion 9, 10

Exponentialgleichung 16, 22

exponentielle Abnahme 10

exponentielle Wachstumsfunktion 34

exponentielle Zunahme 10

exponentielles Wachstum 13, 34

F

fairer Preis 171

festverzinsliche Wertpapiere 167

Final Value 69, 97

Folge, geometrische 99

Formeln, Jahresrenten 102

Full-Pay-out-Leasing 117

G

ganzjährige Rente 100

ganzjährige Verzinsung 70

gemischte Verzinsung 81

geometrische Folge 99

geometrische Reihe 99, 100

Glockenkurve 15

Größen, marktabhängige 168

-, nominelle 168

H

Halbwertsdicke 58

Halbwertszeit 35

Hühnermast 48

I

Infusion 41

interner Zinssatz 152, 153

Investitionsentscheidung 149, 152, 153, 154

Investitionsrechnung 147

Investitionsverfahren 159

ISMA-Methode 110

J

Jahresrente, unterjähriger Zinssatz 107

Jahresrenten, Formeln 102

Jahreszinssatz, nomineller 83

j-217 - Stichwortverzeichnis

K

Kaninchenpopulation 45

Kapital 69

-, Verzinsung 8

Kapitaleinsatz 148

Kapitalisieren 70

Kapitalwert 149, 150

Kapitalwertmethode 149

Kaufempfehlung 174

Kaufpreis 166, 168

Kettenlinie 15

Kompetenzmodell, Standardmatrix 5

Kondensator 41

Konversion, Schuld 141

Konversionsregel 141

Konvertierung, Schuld 141

Kredit 114

Kreditumschuldung 112, 113

Kuponzahlungen 166, 168

Kurs 166

Kursformel 173

L

laufende Ausgaben 148

laufende Einnahmen 148

Leasing 117

Lieferantenkredit 73

lineare Wachstumsfunktion 33

lineares Wachstum 13, 33

Liquidationserlös 148

Logarithmen 7

-, Rechenregeln 20

-, spezielle 19

-, Umrechnung 23

Logarithmieren 19

Logarithmus 18, 19

-, dekadischer 19

-, natürlicher 19

Logarithmusfunktion 23, 24

logistisches Wachstum 44

M

marktabhängige Größen 168

marktkonform 167

Marktwert 171

Marktzinssatz 171

modifizierter interner Zinssatz 154

N

nachschüssige Rente 98

natürlicher Logarithmus 19

Net Present Value 149

Newtonsches Abkühlgesetz 42

Nominalzinssatz 83

nominelle Größen 168

nomineller Jahreszinssatz 83

Nutzungsdauer 148

O

öffentliche Anleihen 167

pari, al 168

-, über 168

-, unter 168

Pensionsvorsorge 109

Pfandbriefe 167

Preis, fairer 171

Present Value 69, 77, 97

R

Rate, Rente 104

Raten 98

Ratenberechnung 121

Ratengeschäft 116

Ratenzahlung 116

Rechnen mit Logarithmen 17

Reihe, geometrische 99, 100

Reinvestitionszinssatz 154

relativer Zuwachs 10

Rendite 170

Rente 96, 98

-, Barwert 103

-, ganzjährige 100

-, nachschüssige 98

-, Rate 104

-, vorschüssige 98

-, Zinssatz 106

Renten, unterjährige 108, 110, 122

Rentenbeginn 98

Rentendauer 98, 105

Rentenende 98

Rentenkonvertierung 111, 124

Rentenperiode 98

Rentenrechnung 96

-, Excel 103

-, Grundaufgaben 103

Rentenrest 105

Rentenumwandlung 111

Restschuld 134

Restwert 148

Restwertleasing 117

Rückfluss 148

j-218 - Stichwortverzeichnis

S

Sättigungswert 40, 44

Schuld, Konversion 141

-, Konvertierung 141

Schulden 132

Schuldtilgung 132, 133

Seismograph 66

Sekundärmarktrendite 171

Skonto 73

Solver 86

Sparbuch, Barwert 97

-, Endwert 96

spezielle Logarithmen 19

Spracherwerb 49

Standardmatrix, Kompetenzmodell 5

steigende Zinssätze 78

stetige Aufzinsungsformel 84

stetige Verzinsung 84

T

Tageszinsformel 72

theoretische Verzinsung 81

Tilgung 134

Tilgungsbetrag 168

Tilgungsdauer 134

Tilgungsplan 132, 134

Time-Value-of-Money 69

TVM-Solver 86

U

über pari 168

unter pari 168

unterjährige Renten 108, 110, 122

unterjährige Verzinsung 70, 83

unterjähriger Zinssatz 83

-, Jahresrente 107 Usance 68

V

Verbraucherkreditgesetz 113

Verdoppelungszeit 35

Verzinsung, antizipative 70

-, dekursive 70

-, durchschnittliche 80

-, ganzjährige 70

-, gemischte 81

-, Kapital 8

-, stetige 84

-, theoretische 81

-, unterjährige 70, 83

Verzinsungsdauer 69, 82

Verzinsungsperiode 71

vorschüssige Rente 98

W

Wachstum 33

-, beschränktes 40

-, exponentielles 13, 34

-, lineares 13, 33

-, logistisches 44

Wachstumsfunktion, exponentielle 34

-, lineare 33

Wachstumsmodelle 7

Weltenergieverbrauch 39

Wertpapiere 165

-, festverzinsliche 167

Wiedergewinnungsfaktor 152

Wiederveranlagungszinssatz 154

Z

Zahlungsstrom 77

Zerfall 33

-, radioaktives Material 9

Zerfallskonstante 35

Zinsen 68, 70

-, einfache 70

Zinseszins, dekursiver 76

Zinseszinsen 70

Zinseszinsrechnung 76

Zinsfälligkeit 71

Zinsfuß 69

Zinsperiode 70

Zinsrechnung, einfache 72

Zinssatz 69, 70, 122

-, durchschnittlicher 80

-, effektiver 170

-, interner 152, 153

-, modifizierter interner 154

-, Rente 106

-, unterjähriger 83

Zinssätze, äquivalente 85, 109

-, steigende 78

Zinstage 71

Zinstermin 70

Zinszahlungen 168

Zinszuschlag 71

Zunahme, beschränkte 41

-, exponentielle 10

Zunahmevorgänge 35

Zuwachs, absoluter 10

-, relativer 10

Zuwachsfaktor 8, 9

Zuwachsrate 8

j-219

Zeichen Sprechweise Erläuterung, Beispiele

| | (Absolut-)Betrag von, absolut

|a| absolut a

-----

'Si Summe 'Si[i=1;n](a\_i =a\_1 +a\_2 +... +a\_n)

G, D, L Grund-, Definitions- und Lösungsmenge

L ={-2, 3}

-----

[a; b] abgeschlossenes Intervall

[a; b] ={x 'el 'R | a <=x <=b}

-----

]a; b], [a; b[ halboffenes Intervall

]a; b] ={x 'el 'R | a <x <=b}

-----

]a; b[ offenes Intervall

]a; b[ ={x 'el 'R | a <x <b}

-----

'w() (Quadrat-)Wurzel aus#

'w(a) (Quadrat-)Wurzel aus a

----------

|Funktionen|

f: D -> W

D Definitionsmenge, W Wertemenge

-----

x -> y =f(x)

x zugeordnet y, y ist Funktion von x

-----

f ={(x | y) | y =f(x)}

Funktion in Mengenschreibweise

-----

f^(-1): x -> y =f^(-1)(x)

Umkehrfunktion zu f: x -> y =f(x) mit y =f(x) <=> x =f-1(y)

----------

|Geometrische Zeichen|

|| parallel

== kongruent

~~ ähnlich

'wi Winkel

'rw rechter Winkel

|AB| Länge der Strecke AB

sin(x) Sinus von x

cos(x) Kosinus von x

tan(x) Tangens von x

----------

|Weitere Zeichen|

log\_a(x) Logarithmus von x zur Basis a

lg(x) =log\_(10)(x) Logarithmus von x zur Basis 10

ln(x) =log\_('e)(x) Logarithmus von x zur Basis e

lb(x) =log\_2(x) Logarithmus von x zur Basis 2

'e eulersche Zahl, 'e =2,718281828 ...

'pi Kreiszahl Pi, 'pi =3,141592653 ...

----------

TRAUNER VERLAG

BILDUNG

Mathematik

* Erklärungen
* Aufgaben
* Lösungen
* Formeln
* inkl. Übungs-CD-ROM

Die Bände dieser Mathematikreihe sind für den Unterricht an kaufmännischen höheren Schulen erstellt. Besonderes Augenmerk wird auf die Kompetenzorientierung gelegt. Die Bücher bieten eine optimale Vorbereitung auf die standardisierte Reife- und Diplomprüfung.

-----

ISBN 978-3-99062-103-5

SBNr. 175.742

-----

Mich gibt es auch als E-Book

ISBN 978-3-99062-104-2

SBNr. Kombi E-Book 176.825