Erfassung: Book Access, 4040 Linz

Erfasser: Snezana Kostandinovic

Erfassungsdatum: Mai 2016

TRAUNER VERLAG

BILDUNG

Mathematik

* Erklärungen
* Aufgaben
* Lösungen
* Formeln
* inkl. Übungs-CD-ROM

TINHOF

FISCHER

GERSTENDORF

GIRLINGER

PAUL

HAK II

Inhaltsverzeichnis

\*\*-1 - 1 Lineare Gleichungssysteme 28

\*\*-4 - Meine Ziele 29

\*\*-4 - Worum geht's hier? 30

\*\*-2 - 1.1 Grundbegriffe 31

\*\*-2 - 1.2 Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme 33

\*\*-2 - 1.3 Lösungsfalle linearer Gleichungssysteme in zwei Variablen 42

\*\*-2 - 1.4 Textaufgaben zu linearen Gleichungssystemen 50

\*\*-4 - Übungsaufgaben 55

\*\*-4 - Ziel erreicht? 78

\*\*-1 - 2 Matrizenrechnung 82

\*\*-4 - Meine Ziele 84

\*\*-4 - Worum geht's hier? 85

\*\*-2 - 2.1 Grundbegriffe 88

\*\*-4 - Übungsaufgaben 91

\*\*-2 - 2.2 Rechnen mit Vektoren 93

\*\*-4 - Übungsaufgaben 105

\*\*-2 - 2.3 Rechnen mit Matrizen 108

\*\*-3 - 2.3.1 Addition und Subtraktion von Matrizen 108

\*\*-3 - 2.3.2 Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl 111

\*\*-3 - 2.3.3 Multiplikation von Matrizen 119

\*\*-3 - 2.3.4 Inverse Matrix 136

\*\*-4 - Übungsaufgaben 144

\*\*-2 - 2.4 Lösung linearer Gleichungssysteme mit Matrizen 161

\*\*-4 - Übungsaufgaben 180

\*\*-4 - Ziele erreicht? 197

\*\*-1 - 3 Potenzen mit rationalen Exponenten und Potenzfunktionen 203

\*\*-4 - Meine Ziele 204

\*\*-4 - Worum geht's hier? 204

\*\*-2 - 3.1 Potenzen mit rationalen Exponenten, Wurzeln 206

\*\*-4 - Übungsaufgaben 234

\*\*-2 - 3.2 Potenzfunktionen 256

\*\*-3 - 3.2.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten 256

\*\*-4 - Übungsaufgaben 264

\*\*-3 - 3.2.2 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten 266

\*\*-4 - Übungsaufgaben 268

\*\*-4 - Ziele erreicht? 269

\*\*-1 - 4 Gleichungen höheren Grades und Polynomfunktionen 272

\*\*-4 - Meine Ziele 275

\*\*-4 - Worum geht's hier? 276

\*\*-2 - 4.1 Quadratische Funktionen 279

\*\*-4 - Übungsaufgaben 292

\*\*-2 - 4.2 Quadratische Funktionen im Alltag 297

\*\*-4 - Übungsaufgaben 307

\*\*-2 - 4.3 Quadratische Gleichungen 314

\*\*-4 - Übungsaufgaben 335

\*\*-2 - 4.4 Satz von Vieta 356

\*\*-4 - Übungsaufgaben 362

\*\*-2 - 4.5 Polynomfunktionen 365

\*\*-4 - Übungsaufgaben 378

\*\*-4 - Ziele erreicht? 382

\*\*-1 - 5 Geometrie und Trigonometrie 387

\*\*-4 - Meine Ziele 391

\*\*-4 - Worum geht's hier? 391

\*\*-2 - 5.1 Grundlagen der ebenen Geometrie 394

\*\*-3 - 5.1.1 Dreieck 394

\*\*-3 - 5.1.2 Viereck 419

\*\*-3 - 5.1.3 Kreis 421

\*\*-4 - Übungsaufgaben 426

\*\*-2 - 5.2 Trigonometrie 462

\*\*-3 - 5.2.1 Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkeligen Dreieck 462

\*\*-3 - 5.2.2 Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis 480

\*\*-3 - 5.2.3 Sätze für das allgemeine Dreieck 490

\*\*-3 - 5.2.4 Vermessungsaufgaben 505

\*\*-3 - 5.2.5 Winkelfunktionen als reelle Funktionen 512

\*\*-4 - Übungsaufgaben 531

\*\*-4 - Ziele erreicht? 585

\*\*-2 - Lösungen 592

\*\*-4 - 1 Lineare Gleichungssysteme 592

\*\*-4 - 2 Matrizenrechnung 605

\*\*-4 - 3 Potenzen mit rationalen Exponenten und Potenzfunktionen 632

\*\*-4 - 4 Gleichungen höheren Grades und Polynomfunktionen 652

\*\*-4 - 5 Geometrie und Trigonometrie 682

\*\*-4 - Literaturverzeichnis 734

\*\*-4 - Quellennachweis 737

\*\*-4 - Stichwortverzeichnis 744

j-I

|Zeichenerklärung|

Zeichen: \

Sprechweise: nicht

Erläuterung, Beispiele: \ P Negation der Aussage P

-----

Zeichen: =>

Sprechweise: impliziert aus ... folgt ...

Erläuterung, Beispiele: P => Q P impliziert Q aus P folgt Q

-----

Zeichen: <=>

Sprechweise: äquivalent genau dann

Erläuterung, Beispiele: P <= > Q P äquivalent Q

P genau dann, wenn Q

-----

Zeichen: 'u

Sprechweise: und

Erläuterung, Beispiele: P 'u Q sowohl P als auch Q

-----

Zeichen: 'o

Sprechweise: oder

Erläuterung, Beispiele: P 'o Q entweder P oder Q oder beides

-----

Zeichen: {...}

Sprechweise: Menge mit den Elementen

Erläuterung, Beispiele: A ={a, b, c}

Menge A mit den Elementen a, b und c

-----

Zeichen: 'el

Sprechweise: ist Element aus (von)

Erläuterung, Beispiele: a 'el A

-----

Zeichen: \'el

Sprechweise: ist nicht Element aus (von)

Erläuterung, Beispiele: d \'el A

-----

Zeichen: {x 'el M | P(x)}

Sprechweise: Menge aller Elemente x aus M für die gilt: P von x ist wahr

Erläuterung, Beispiele: {x 'el M | x <3}

-----

Zeichen: {}, \lm

Sprechweise: leere Menge

Erläuterung, Beispiele: enthält kein Element

-----

Zeichen: =

Sprechweise: ist gleich

Erläuterung, Beispiele: bei Mengen: A =B, A \=C

-----

Zeichen: \=

Sprechweise: ist nicht gleich, ist ungleich

Erläuterung, Beispiele: bei Zahlen: 2 =4/2, 3 \=5

-----

Zeichen: 'TM

Sprechweise: ist Teilmenge

Erläuterung, Beispiele: A 'TM B

A ist Teilmenge von B

-----

Zeichen: 'DM

Sprechweise: Durchschnitt(smenge)

Erläuterung, Beispiele: A 'dm B

Durchschnitt(smenge) von A und B

-----

Zeichen: 'VM

Sprechweise: Vereinigung(smenge)

Erläuterung, Beispiele: A 'vm B

Vereinigung(smenge) von A und B

-----

Zeichen: \

Sprechweise: ohne

Erläuterung, Beispiele: A \ B

Differenzmenge A ohne B

-----

Zeichen: Kompl.\_GA

Sprechweise: Komplementärmenge zu A

Erläuterung, Beispiele: Kompl.\_GA =G \ A

Komplementärmenge zu A in Bezug auf G

-----

Zeichen: 'x

Sprechweise: kreuz

Erläuterung, Beispiele: A 'x B

Produktmenge von A und B

-----

Zeichen: (a|b); (a, b)

Sprechweise: geordnetes Paar a, b

Erläuterung, Beispiele: (3|-2)

-----

Zeichen: >

Sprechweise: ist größer

Erläuterung, Beispiele: a >b

-----

Zeichen: <

Sprechweise: ist kleiner

Erläuterung, Beispiele: a <b

-----

Zeichen: >=

Sprechweise: ist größer oder gleich

Erläuterung, Beispiele: a >=b

-----

Zeichen: <=

Sprechweise: ist kleiner oder gleich

Erläuterung, Beispiele: a <=b

-----

Zeichen: 'N

Sprechweise: Menge der natürlichen Zahlen

Erläuterung, Beispiele: 'N ={0, 1, 2, 3, ...}

-----

Zeichen: 'Z

Sprechweise: Menge der ganzen Zahlen

Erläuterung, Beispiele: 'Z ={..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}

-----

Zeichen: 'Z^+

Sprechweise: Menge der positiven ganzen Zahlen

Erläuterung, Beispiele: 'Z^+ ={1, 2, 3, ...}

-----

Zeichen: 'Z^-

Sprechweise: Menge der negativen ganzen Zahlen

Erläuterung, Beispiele: 'Z^- ={..., -3, -2, -1}

-----

Zeichen: 'Z^+\_0

Sprechweise: Menge der positiven ganzen Zahlen einschließlich 0

Erläuterung, Beispiele: 'Z^+\_0 ={0, 1, 2, 3, ...}

-----

Zeichen: 'Q

Sprechweise: Menge der rationalen Zahlen

Erläuterung, Beispiele: 'Q,' 'Q^-, 'Q^+\_0 wie bei 'Z

-----

Zeichen: 'I

Sprechweise: Menge der irrationalen Zahlen

Erläuterung, Beispiele: unendliche nichtperiodische Dezimalzahlen

-----

Zeichen: 'R

Sprechweise: Menge der reellen Zahlen

Erläuterung, Beispiele: 'R^+, 'R^-, 'R^+\_0 wie bei 'Z

-----

j-1

TRAUNER VERLAG

BILDUNG

Bildung die begeistert!

Mathematik

* Erklärungen
* Aufgaben
* Lösungen
* Formeln
* inkl. Übungs-CD-ROM

FRIEDRICH TINHOF

WOLFGANG FISCHER

KATHRIN GERSTENDORF

HELMUT GIRLINGER

MARKUS PAUL

Unter Mitarbeit von

THERESIA KLONNER

HAK II

j-2

|Impressum|

Tinhof u. a., Mathematik II HAK

inkl. Übungs-CD-ROM

1. Auflage 2015

Schulbuch-Nr. 170.777

TRAUNER Verlag, Linz

|Das Autorenteam|

MAG. FRIEDRICH TINHOF,

Bundeshandelsakademie Eisenstadt, Bundes-ARGE-Leiter Mathematik HAK, ARGE-Leiter Mathematik Burgenland

MAG. DIPL.-ING. WOLFGANG FISCHER,

Bundeshandelsakademie Rohrbach, Multiplikator im Bereich standardisierte Reife- und Diplomprüfung aus angewandter Mathematik an BHS

MAG. KATHRIN GERSTENDORF,

Bundeshandelsakademie Landeck, Verfasserin von Übungsaufgaben für die Handelsakademie am Bifie, Multiplikatorin im Bereich standardisierte Reife und Diplomprüfung aus angewandter Mathematik an BHS, ARGE-Leiter-Stv. Mathematik Tirol

OSTR. MAG. HELMUT GIRLINGER,

Lehrer i. R. an der Bundeshandelsakademie Rohrbach, Trainer, Prüfer und Mehrfach-Vorsitzender bei Berufsreifeprüfungen, Testadministrator für das Bifie

MAG. DR. MARKUS PAUL,

Bundeshandelsakademie Innsbruck, Item-Writer für die standardisierte, kompetenzorientierte Reife- und Diplomprüfung, Lektor am FH-Studiengang Tourismus- und Freizeitwirtschaft am Management-Center Innsbruck, ARGE-Leiter Mathematik Tirol

|Approbiert für den Unterrichtsgebrauch|

- an Handelsakademien für den II. Jahrgang im Unterrichtsgegenstand Mathematik und angewandte Mathematik,

Bundesministerium für Bildung und Frauen, GZ 5.048/0028-6/8/2014 vom 3. Oktober 2014.

Dieses Schulbuch wurde auf der Grundlage eines Rahmenlehrplanes erstellt.

Die Auswahl und die Gewichtung der Inhalte erfolgen durch die Lehrer/innen.

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie bekommen dieses Schulbuch von der Republik Österreich für Ihre Ausbildung. Bücher helfen nicht nur beim Lernen, sondern sind auch Freunde fürs Leben.

Wir weisen daraufhin, dass das Kopieren zum Schulgebrauch aus diesem Buch verboten ist - § 42 Absatz (3) der Urheberrechtsgesetznovelle 1996: "Die Befugnis zur Vervielfältigung zum eigenen Schulgebrauch gilt nicht für Werke, die ihrer Beschaffenheit und Bezeichnung nach zum Schul- oder Unterrichtsgebrauch bestimmt sind."

Dieses Buch wurde auf FSC-zertifiziertes Papier gedruckt.

(C) 2015

TRAUNER Verlag +Buchservice GmbH,

Köglstraße 14, A 4020 Linz

Alle Rechte Vorbehalten.

Nachdruck und sonstige Vervielfältigung, auch auszugsweise, nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Verlages.

Lektorat/Produktmanagement: MMag. Wolfgang Jungwirth

Cover- und Layoutentwurf: KISKA GmbH, 5081 Anif-Salzburg, www.kiska.at

Covergestaltung: Bettina Victor

Grafik und Gestaltung: Peter Mittermayr

Schulbuchvergütung/Bildrechte: (C) Bildrecht GmbH/Wien

Gesamtherstellung: TRAUNER Druck GmbH & Co KG

Gedruckt nach der Richtlinie "Druckerzeugnisse" des Österreichischen Umweltzeichens, UW-Nr. 962

ISBN 978-3-99033-330-0

Schulbuch-Nr. 170.777

www.trauner.at

j-3

|Vorwort|

Der vorliegende zweite Band wurde vom Autorenteam auf Basis des aktuellen Lehrplans 2014 der Handelsakademie unter Einbeziehung des aktuellen Kompetenzkataloges überarbeitet.

Wie im ersten Band dieser Buchreihe sind alle Kapitel in ähnlicher Weise aufgebaut:

* Kurzer historischer Überblick zum besprochenen Stoffinhalt
* Angabe der zu erreichenden Lernziele
* Einführendes Beispiel, um Interesse zu wecken und einen Ein- und Ausblick zu geben
* Der "Stoffteil" beinhaltet theoretische Grundlagen sowie vollständig durchgerechnete Beispiele samt Handlungsanweisungen. Es wird dabei darauf geachtet, alle Ausprägungen der Handlungsdimension der Standardmatrix abzudecken. Auch auf die verschiedenen Lerntypen der Schülerinnen und Schüler wird geachtet.
* Der Aufgabenteil beinhaltet eine Vielzahl von überarbeiteten und neuen Aufgaben, die eine optimale Vorbereitung auf die bevorstehende sRDP ermöglichen.
* Am Ende eines Kapitels finden sich zusätzliche Aufgaben unter dem Titel "Ziele erreicht?", die eine kompakte Überprüfung der erreichten Kompetenzen erlauben.
* Zu allen Aufgaben finden sich die Ergebnisse am Ende des Buches. Zu vielen der Aufgaben gibt es auch die vollständig durchgerechneten Lösungen.
* Eine Formelsammlung und eine Übungs-CD-ROM mit zusätzlichen Arbeitsmaterialien ergänzen das vorliegende Buch.

Das vorliegende Buch beinhaltet fünf Kapitel mit folgenden Inhalten:

|Lineare Gleichungssysteme|

Das Kapitel befasst sich mit den verschiedenen Lösungsmöglichkeiten von Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen in zwei Variablen.

|Matrizenrechnung|

Mit vielen anwendungsorientierten Beispielen werden die grundlegenden Rechengesetze für Matrizen und Vektoren erarbeitet. Gozintographen werden in Matrizen transferiert und umgekehrt.

|Potenzen mit rationalen Exponenten und Potenzfunktionen|

Neben dem Rechnen mit Wurzeln geht es hier um Funktionen mit y =x^n und deren Eigenschaften.

|Gleichungen höheren Grades und Polynomfunktionen|

In diesem Kapitel werden Schritt für Schritt die Eigenschaften der quadratischen Funktionen erarbeitet und die drei Lösungsfälle von quadratischen Gleichungen behandelt.

|Geometrie und Trigonometrie|

Aufbauend auf grundlegenden Eigenschaften geometrischer Figuren, werden in diesem Kapitel die Winkelfunktionen definiert. Anwendung finden die Winkelfunktionen dann unter anderem bei Vermessungsaufgaben.

Das Autorenteam

Linz, im März 2015

Die Werke des Mathematikers müssen schön sein wie die des Malers oder Dichters; die Ideen müssen harmonieren wie die Farben oder Worte.

G. H. HARDY, 1877 BIS 1947, BRITISCHER MATHEMATIKER

"Problem" Materielle Welt -> Modellbildung/Abstraktion -> Lösung Mathematik

Lösung Mathematik -> Interpretation/Konkretisierung -> Mathematik

Sämtliche vollständig durchgerechnete Beispiele und Übungsaufgaben werden entsprechend der betroffenen Kompetenzbereiche gekennzeichnet:

A - Modellieren und Transferieren

B - Operieren und Technologieeinsatz

C - Interpretieren und Dokumentieren

D - Argumentieren und Kommuniziere

j-4

Auf diese Seite befindet sich das Inhaltsverzeichnis.

j-5

|Standardmatrix des Kompetenzmodells|

Handlungsdimension

Die charakteristischen mathematischen Tätigkeiten sind ...

|1 Zahlen und Maße|

A Modellieren und Transferieren

für eine Problemstellung mit Zahlen und Maßen ein geeignetes Modell finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen

-----

B Operieren und Technologieeinsatz

mit Zahlen und Maßen operieren und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.

-----

C Interpretieren und Dokumentieren

Zahlen und Maße in ihrem Kontext interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.

-----

D Argumentieren und Kommunizieren

mithilfe von Zahlen und Maßen argumentieren und kommunizieren.

-----

|2 Algebra und Geometrie|

A Modellieren und Transferieren

für eine Problemstellung mithilfe der Algebra und Geometrie ein geeignetes Modell finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen

-----

B Operieren und Technologieeinsatz

mit algebraischen und geometrischen Objekten operieren und situationsgerecht

technische Hilfsmittel einsetzen.

-----

C Interpretieren und Dokumentieren

algebraische und geometrische Objekte in ihrem Kontext interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.

-----

D Argumentieren und Kommunizieren

in der Fachsprache der Algebra und Geometrie argumentieren und kommunizieren.

-----

|3 Funktionale Zusammenhänge|

A Modellieren und Transferieren

ein geeignetes Modell für einen funktionalen Zusammenhang finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen

-----

B Operieren und Technologieeinsatz

mit funktionalen Zusammenhängen operieren und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.

-----

C Interpretieren und Dokumentieren

funktionale Zusammenhänge interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.

-----

D Argumentieren und Kommunizieren

funktionale Zusammenhänge argumentieren und kommunizieren.

|4 Analysis|

A Modellieren und Transferieren

für eine Problemstellung mithilfe der Analysis ein geeignetes Modell finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen

-----

B Operieren und Technologieeinsatz

Operationen in der Analysis durchführen und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.

-----

C Interpretieren und Dokumentieren

Zusammenhänge in der Analysis interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.

-----

D Argumentieren und Kommunizieren

in der Fachsprache der Analysis argumentieren und kommunizieren.

-----

|5 Stochastik|

A Modellieren und Transferieren

für eine Problemstellung mithilfe der Stochastik ein geeignetes Modell finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen.

-----

B Operieren und Technologieeinsatz

Operationen in der Stochastik durchführen und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.

-----

C Interpretieren und Dokumentieren

Zusammenhänge in der Stochastik interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.

-----

D Argumentieren und Kommunizieren

in der Fachsprache der Stochastik argumentieren und kommunizieren.

-----

Alle vollständig durchgerechneten Beispiele und Übungsaufgaben dieses Lehrbuches werden entsprechend der betroffenen Kompetenzbereiche gekennzeichnet:

A - Modellieren und Transferieren

B - Operieren und Technologieeinsatz

C - Interpretieren und Dokumentieren

D - Argumentieren und Kommunizieren

j-6

|Die Übungs-CD-ROM|

Um das Erlernte gleich überprüfen zu können, finden Sie eine Auswahl von Schularbeiten samt Musterlösungen für diesen Jahrgang, die von den Autoren des Schulbuches im Unterricht eingesetzt wurden.

Mit einer Auswahl von Links auf Videos können Sie interessante Unterrichtseinstiege schaffen.

Mit interaktiven Übungen werden Sie auf die Beantwortung von geschlossenen Fragestellungen vorbereitet.

j-7

# \*\*-1 - 1 Lineare Gleichungssysteme

Viele Probleme der modernen Technik und Wissenschaft, wie beispielsweise das Berechnen von mechanischen Spannungen in Werkzeugen und Gebäuden, die Ausbreitung von Schall in Räumen, das Darstellen von Computertomographien am Bildschirm usw., führen auf das Lösen von linearen Gleichungssystemen.

Das Modellieren (Erstellen) der für diese Anwendungen benötigten Gleichungen erfordert viel Fachwissen. Das Lösen der Systeme, die häufig aus Tausenden von Gleichungen in entsprechend vielen Unbekannten bestehen, spezielle, für Computer entwickelte, Algorithmen.

Die Geschichte der linearen Gleichungssysteme reicht 5000 Jahre zurück. Bereits von den frühen Hochkulturen sind Textaufgaben, die auf lineare Gleichungssysteme führen, überliefert. Allgemeine Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen wurden von den Chinesen bereits vor Christi Geburt entwickelt.

Das Substitutionsverfahren, das Sie in diesem Kapitel kennenlernen werden, wurde in Europa erst um ca. 1500 n. Chr. in Lehrbüchern behandelt.

Die Entwicklung des Eliminationsverfahrens wird dem deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauss (1777 bis 1855) zugeschrieben. Dieses Eliminationsverfahren dient als Grundlage jener Algorithmen, mit denen Computer heute Gleichungssysteme lösen.

#### \*\*-4 - Meine Ziele

Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

* Verfahren anwenden, um lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen zu lösen,
* unterschiedliche Lösungsfälle linearer Gleichungssysteme in zwei Variablen
* rechnerisch und grafisch interpretieren und argumentieren,
* lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen ohne Technologieeinsatz lösen,
* lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen für Problemstellungen modellieren,
* die Lösung linearer Gleichungssysteme in Bezug auf die Problemstellung interpretieren und argumentieren.

#### \*\*-4 - Worum geht's hier?

Anton und Berta essen in einem Gasthaus und erhalten folgende Rechnungen;

Anton: 1 Cola und 2 Hamburger: EUR 8,00

Berta: 2 Cola und 1 Hamburger: EUR 7,00

Ermitteln Sie, wie viel ein Cola und wie viel ein Hamburger kostet.

Preis für ein Cola: x

Preis für einen Hamburger: y

Es ergibt sich ein System von zwei linearen Gleichungen in zwei Variablen

(1) x +2y =8

(2) 2x +y =7

Suchen Sie Zahlen für x und für y, die Gleichung (1) und Gleichung (2) erfüllen.

Lösungsmengen der Gleichungen (1) und (2) für ganzzahlige x-Werte:

L\_1 ={(x|y) | x +2y =8} ={(1|3,5), (2|3), (3|2,5), (4|2), ..., (7|0,5)}

L\_2 ={(x|y) | 2x +y =7} ={(1|5), (2|3), (3|1)}

Das Zahlenpaar (2|3) liegt in beiden Lösungsmengen: L =L\_1 'dm L\_2 ={(2|3)}

Ein Cola kostet Euro 2,00 und ein Hamburger kostet Euro 3,00.

(1) x +2y =8

(2) 2x +y =7

ist ein Gleichungssystem mit zwei linearen Gleichungen in zwei Variablen.

j-8

Das hier vorgestellte Suchen der Lösungsmenge führt nicht immer so schnell zum Erfolg. Die Verfahren, die Sie im Folgenden kennenlernen werden, jedoch im Allgemeinen schon.

## \*\*-2 - 1.1 Grundbegriffe

|Definition: Lineares Gleichungssystem in zwei Variablen|

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen in den Variablen x und y hat die Gestalt

(1) a\_1x +b\_1y =c\_1

(2) a\_2x +b\_2y =c\_2

mit den reellen Zahlen a\_1, a\_2, b\_1, b\_2, c\_1 und c\_2 sowie den Variablen x und y.

-----

Die Lösungsmenge eines Gleichungssystems in zwei Variablen ist der Durchschnitt der Lösungsmengen der beiden Gleichungen:

L =L\_1 'dm L\_2

-----

Lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen:

a\_1x +b\_1y =c\_1

a\_2x +b\_2y =c\_2

Die Formvariablen a\_1, a\_2, b\_1, b\_2, c\_1 und c\_2 sind bei den folgenden konkreten Beispielen immer reelle Zahlen.

-----

|Definition: Äquivalente Gleichungssysteme|

Gleichungssysteme, die gleiche Lösungsmengen haben, heißen äquivalente Gleichungssysteme.

Ein Gleichungssystem wird gelöst, indem es in ein äquivalentes, aber einfacheres übergeführt wird, dessen Lösungsmenge sich leicht ablesen lässt. Es ist stets zu beachten, dass bei Äquivalenzumformungen die Anzahl der Gleichungen und auch die Anzahl der Variablen sowie der Durchschnitt der Lösungsmengen der ersten und der zweiten Gleichung usw. unverändert bleiben.

## \*\*-2 - 1.2 Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

|Einsetzungsverfähren (Substitutionsverfahren)|

Aus einer der beiden Gleichungen wird eine Variable durch einen Term in der anderen Variable ausgedrückt. Diesen Term setzt man in die andere Gleichung ein und erhält so eine Gleichung in einer Variablen, die man lösen kann.

-----

Hinweis: Wenn nicht anders angegeben, ist die Grundmenge bei linearen Gleichungssystemen die Menge 'R 'x 'R.

##-Beispiel 1.1: Einsetzungsverfähren (B)

Ermitteln Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

(1) x +2y =8

(2) 2x +y =7

mithilfe des Einsetzungsverfahrens.

-----

Lösung:

Aus Gleichung (2) kann die Variable y freigestellt werden:

Der Ausdruck 7 -2x kann für y in der Gleichung (1) eingesetzt werden.

x +2 \*(7 -2x) =8

14 -3x =8

6 =3x

x =2

x in Variable y eingesetzt ergibt:

y =7 -2 \*2 =3

L ={(2|3)}

-----

Hinweis: Die Probe muss im ursprünglichen Gleichungssystem durchgeführt werden.

j-9

|Gleichsetzungsverfahren|

Beim Gleichsetzungsverfahren werden beide Gleichungen nach derselben Variable aufgelöst. Die dadurch entstandenen Terme mit nur einer Variablen werden gleichgesetzt und die Gleichung gelöst.

##-Beispiel 1.2: Gleichsetzungsverfahren (B)

Ermitteln Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

(1) x +2y =8

(2) 2x +y =7

mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens.

-----

Lösung:

Aus beiden Gleichungen kann die Variable x freigestellt werden:

(1) x +2y =8 <=> x =8 -2y

(2) 2x +y =7 <=> 2x =7 -y <=> x =3,5 -0,5y

-----

Durch Gleichsetzen der beiden Terme erhalten Sie:

8 -2y =3,5 -0,5y

4,5 -2y =-0,5y

4,5 =1,5y

y =3

-----

Einsetzen in die erste Gleichung für x ergibt:

x =8 -6 =2

bzw. x =3,5 -0,5 \*3 =3,5 -1,5 =2

L ={(2|3)}

-----

Hinweis: Es könnte auch die Variable y aus beiden Gleichungen freigestellt werden.

-----

Abb.: CARL FRIEDRICH GAUSS, 1777 BIS 1855, DEUTSCHER MATHEMATIKER

|Additionsverfahren, Eliminationsverfahren|

Beim Additionsverfahren wird durch die Addition der beiden Gleichungen eine Variable eliminiert. Dazu multipliziert man eine (oder beide Gleichungen) mit geeigneten Zahlen.

-----

Das Additionsverfahren wird auch als Gauß'sches Eliminationsverfahren bezeichnet.

##-Beispiel 1.3: Additionsverfahren, Eliminationsverfahren (B)

Ermitteln Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

(1) x +2y =8

(2) 2x +y =7

mithilfe des Additionsverfahrens.

-----

Lösung:

(1) x +2y =8 |\*(-2)

(2) 2x +y =7

Die erste Gleichung wird mit -2 multipliziert, um zu erreichen, dass bei der

Variablen x die Koeffizienten -2 und +2 sind.

(1') 2x -4y =-16 +

(2) 2x +y =7 +

-----

(1) x +2y =8

(1') +(2) -3y =-9

Die linken und rechten Gleichungsseiten werden jeweils addiert. Dadurch entsteht die Gleichung -3y =-9, die x nicht mehr enthält. Die Variable x wurde eliminiert.

Die Gleichung (1) wird unverändert übernommen.

x +2y =8

3y =9

-----

x +2y =8

y =3

-----

x +2 \*3 =8

y =3

-----

x =2

y =3

-----

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems lautet daher L ={(2|3)}.

-----

Hinweis: Es könnte auch die zweite Gleichung mit -2 multipliziert werden, um die Variable y zu eliminieren.

-----

Das Gleichungssystem

x +2y =8

2x +y =7

ist äquivalent zum Gleichungssystem

x =2

y =3

j-10

|Grafisches Lösen von Gleichungssystemen|

Stellt man im Gleichungssystem

(1) x +2y =8

(2) 2x +y =7

jeweils die Variable y frei, ergeben sich die Gleichungen von zwei linearen Funktionen.

(1)

x +2y =8 |-x |:2

y =-0,5x +4

-----

(2)

2x +y =7 |-2x

y =-2x +7

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt sich als Schnittpunkt S(2|3) der beiden Geraden.

L ={(2|3)}

-----

Abb.: Grafische Lösungsverfahren:

y =-2x +7

S(2|3)

y =-x/2 +4

Der Schnittpunkt S liegt auf beiden Geraden und ist Lösung des Gleichungssystems.

-----

##-Beispiel 1.4: Grafisches Lösen eines Gleichungssystems mit dem GTR (A, B, C)

Ermitteln Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems grafisch:

(1) x +2y =8

(2) 2x +y =7

Mit dem Befehl (2nd) [CALC]; 5: intersect können Schnittpunkte von Funktionen ermittelt werden. Damit wird das lineare Gleichungssystem grafisch gelöst.

Die Gleichungen (1) und (2) werden in die linearen Funktionen mit

y =-0,5x +4 und y =-2x +7 übertragen.

Die Funktionen werden in den Funktionseditor (Y=) eingegeben.

Die Funktionen werden in ein geeignetes Grafikfenster gezeichnet.

Nach der Auswahl von (2nd) [CALC]; 5: intersect (einfach "5" eingeben) erscheint wieder der Grafikbildschirm.

Der Cursor ist auf einer der Funktionen sichtbar. Mit dem Cursor (nach unten oder nach oben) können Sie die gewünschte Funktion auswählen.

Bestätigen Sie die Frage First curve? mit (ENTER).

Darauf wechselt der Cursor auf die zweite Kurve.

Bestätigen Sie die Frage Second curve? mit (ENTER).

Die Frage Guess? wird wieder mit (ENTEFT) bestätigt.

Man erhält als Lösung den Schnittpunkt: S(2|3)

Interpretation des Schnittpunktes als Lösungsmenge: L ={(2|3)}.

## \*\*-2 - 1.3 Lösungsfalle linearer Gleichungssysteme in zwei Variablen

##-Beispiel 1.5: Gleichungssystem mit leerer Lösungsmenge (B, D)

Lösen Sie das nachstehende lineare Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren. Stellen Sie das Gleichungssystem grafisch dar und begründen Sie mithilfe der Graphen die sich ergebende rechnerische Lösung.

j-11

##- Beispiel 1.6: Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen (Fortsetzung) (B, D)

(1) 3x +y =3 |\*(-2) +

(2) 6x +2y =12 +

-----

3x +y =3

0x =6

Kein x erfüllt die zweite Gleichung.

Daher ist L ={}.

Grafische Lösung:

Der ersten Gleichung entspricht die Gerade g\_1, der zweiten Gleichung die Gerade g\_2.

Die grafische Darstellung von g\_1 und g\_2 zeigt, dass die Geraden zueinander parallel sind (ihre Steigungen k =-3 stimmen überein). Die beiden Graphen haben daher keinen Schnittpunkt, d. h.,

g\_1 'dm g\_2 ={}, L ={}.

-----

##-Beispiel 1.6: Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen (B, D)

Lösen Sie das nachstehende lineare Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren.

Stellen Sie das Gleichungssystem grafisch dar und begründen Sie mithilfe der

Graphen die sich ergebende rechnerische Lösung.

(1) 2x +y =4 |\*(-3) +

(2) 6x +3y =12 +

-----

2x +y =4

0x =0

Die Gleichung 0x +0y =0 ist für alle x- und y-Werte erfüllt.

Aus der Gleichung (1) 2x +y =4 ergibt sich für einen beliebigen x-Wert der y-Wert y =4 -2x.

Die Gleichung (2) ist das Dreifache der Gleichung (1).

Man sagt, die Gleichungen

(1) 2x +y =4 und

(2) 6x +3y =12 sind linear abhängig.

L ={(x|y) | 2x +y =4}

Einige Beispiele für spezielle Lösungen dieses Gleichungssystems:

(-1|6), (0|4), (1|2), (2|0)

Grafische Lösung:

Der ersten Gleichung entspricht die Gerade g\_1, der zweiten Gleichung die Gerade g\_2.

Die grafische Darstellung von g\_1 und g\_2 zeigt, dass die Geraden zusammenfallen.

Die beiden Geraden haben unendlich viele Punkte gemeinsam, d. h., L =g\_1 =g\_2.

-----

Tipp: Zwei Gleichungen heißen linear abhängig, wenn sie sich nur um einen Faktor unterscheiden.

-----

##-Beispiel 1.7: Lösungsfalle eines Gleichungssystems (B, D)

Lösen Sie die nachstehenden linearen Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren.

Stellen Sie die Gleichungssysteme grafisch dar und begründen Sie mithilfe der Graphen die sich ergebenden rechnerischen Lösungen. Vergleichen Sie mit Beispiel 1.3.

1. Fall: Eindeutige Lösung

(1) x +2y =8

(2) 2x +y =7

L ={(2|3)}

-----

(1') y =-x/2 +4

(2') y =-2x +7

Die Geraden g\_1 und g\_2 schneiden einander in einem Schnittpunkt S(2|3).

L =g\_1 'dm g\_2 ={(2|3)}

j-12

##-Beispiel 1.7: Lösungsfälle eines Gleichungssystems (Fortsetzung) (B, D)

2. Fall: Keine Lösung

(1) 4x +2y =8 +

(2) 2x +y =7 |\*(-2) +

0x +0y =-6 f. A.

-----

Es gibt keine Zahlenpaare (x|y), die das Gleichungssystem erfüllen: L ={}

(1') y =-2x +4

(2') y =-2x +7

Die Geraden sind parallel, es gibt keinen Schnittpunkt.

L =g\_1 'dm g\_2 ={}

-----

3. Fall: Unendlich viele Lösungen

(1) 4x +2y =14 +

(2) 2x +y =7 |\*(-2) +

-----

0x +0y =0

Alle Zahlenpaare (x|y), die (1) erfüllen, erfüllen auch (2):

L ={(x|y) | 2x +y =7}

(1') y =-2x +7

(2') y =-2x +7

Die Geraden sind identisch, es gibt unendlich viele Schnittpunkte. Jeder Punkt auf der Geraden ist ein Schnittpunkt.

L =g\_1 'dm g\_2 =g\_1 =g\_2

-----

|Lösungsfalle eines linearen Gleichungssystems|

Ein lineares Gleichungssystem besitzt entweder

* genau eine Lösung,
* keine Lösung oder
* unendlich viele Lösungen.

##-Beispiel 1.8: Bestimmung der Anzahl der Lösungen (D)

Argumentieren Sie, wie viele Lösungen die folgenden linearen Gleichungssysteme besitzen, ohne sie zu lösen.

a)

(1) 3x +2y =8

(2) 1,5x +y =4

-----

Es gilt: (1) =2 \*(2)

Diese Gleichungen sind linear abhängig.

Es gibt daher unendlich viele Lösungen.

-----

b)

(1) 2x +y =10

(2) -6x -3y =5

Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung, da die linke Seite von (2) gleich (-3)-mal der linken Seite von (1) ist.

Die rechte Seite von (1) aber gleich 2-mal der rechten Seite von (2) ist.

Bei Anwendung des Additionsverfahrens heben sich die linken Seiten der Gleichungen zu null auf, während die rechte Seite ungleich null bleibt.

Es ergibt sich eine falsche Aussage.

-----

c)

(1) 2x -y =-17

(2) 3x -y =-24

Die linken Seiten der Gleichungen können nicht durch Multiplikation ineinander übergeführt werden. Das Gleichungssystem hat daher genau eine Lösung. Ebenso kann man argumentieren, dass in a) zwei idente, in b) zwei parallele und in c) zwei einander schneidende Geraden vorliegen.

j-13

## \*\*-2 - 1.4 Textaufgaben zu linearen Gleichungssystemen

|Bewegungsaufgaben|

Im ersten Jahrgang haben Sie sich bereits mit Bewegungsaufgaben befasst. Diese können mithilfe einer linearen Gleichung, linearer Funktionen oder mithilfe eines linearen Gleichungssystems gelöst werden.

##-Beispiel 1.9: Zwei Radfahrer (A, B)

Anja und Bernd wollen den Neusiedlersee mit dem Fahrrad umrunden.

Bernd erzielt mit seinem Fahrrad eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 18 km/h, Anja verwendet ein E-Bike und hat damit eine höhere Durchschnittsgeschwindigkeit von 36 km/h.

Beide starten in Neusiedl und fahren in Richtung Illmitz.

Bernd bekommt einen Vorsprung und startet um 7:00 Uhr, Anja startet um 7:40 Uhr. Ermitteln Sie rechnerisch, wann und wo Anja und Bernd einander wieder treffen.

-----

Lösung:

Es ist sinnvoll, zunächst die Durchschnittsgeschwindigkeiten in Kilometer pro Minute umzuwandeln.

Geschwindigkeit:

Bernd v\_B =18 km/h =0,3 km/min

Anja v\_A =36 km/h =0,6 km/min

-----

Zurückgelegter Weg s in Kilometern nach t Minuten:

Bernd s\_B(t) =0,3 \*t

t ist die Fahrzeit von Bernd in Minuten.

-----

Anja s\_A(t) =0,6 \*(t -40)

Anja fährt 40 Minuten kürzer.

-----

Mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens wird berechnet, wann und wo Anja und Bernd einander wieder treffen.

Dazu setzen Sie s\_B(t) =s\_A(t).

0,3 \*t =0,6 \*(t -40)

0,3 \*t =0,6 \*t -24 |-0,6 \*t

-0,3 \*t =-24 |:(-0,3)

t =80

s\_B(80) =0,3 \*80 =24

s\_A(80) =0,6 \*(80 -40) =24

80 Minuten, nachdem Bernd gestartet ist, treffen Bernd und Anja einander um 8:20 Uhr. Beide haben eine Strecke von 24 km zurückgelegt.

-----

Tipp:

Weg =Geschwindigkeit \*Zeit

s =v \*t

|Aufgaben aus der Wirtschaft|

Lineare Funktionen werden zur Modellierung von Kosten, Tarifen, Erlösen und Gewinnen verwendet. In vielen Beispielen ergibt sich die Lösung durch das Schneiden zweier Geraden. Den Schnittpunkt bestimmt man durch Gleichsetzen der Funktionsterme. Genaugenommen wird das Gleichsetzungsverfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen verwendet.

-----

Tipp: Durch das Schneiden zweier Geraden wird ein lineares Gleichungssystem in zwei Variablen mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens gelöst.

-----

##-Beispiel 1.10: Festnetztarife im Vergleich (A, B)

Martina ist Eigentümerin einer Boutique und möchte unbedingt ihren Festnetzanschluss für Kundenanrufe behalten. Sie hat zwei Tarife zur Auswahl:

Anbieter A: Euro 16,70 Grundgebühr pro Monat und Euro 0,19 pro Gesprächsminute im Inland.

Anbieter B: Euro 9,90 Grundgebühr pro Monat und Euro 0,21 pro Gesprächsminute im Inland.

Ermitteln Sie, für welche Gesprächszeit die Tarife gleich sind.

j-14

##-Beispiel 1.10: Festnetztarife im Vergleich (Fortsetzung) (A, B)

Lösung:

Für x Gesprächsminuten zahlt Martina bei

Anbieter A: T\_A(x) =0,19 \*x +16,70

Anbieter B: T\_B(x) =0,21 \*x +9,90.

Dieses Gleichungssystem kann mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens gelöst werden.

0,19 \*x +16,70 =0,21 \*x +9,90 |-0,21x -16,70

-0,02 \*x =-6,8 |/(-0,02)

x =340

Für eine monatliche Gesprächszeit von 340 min bzw. 5 h 40 min sind die beiden Tarife gleich.

-----

##-Beispiel 1.11: Verzinsung von Sparbüchern (A, B)

Frau Drexler hat Ersparnisse in Höhe von Euro 30.000,00. Einen Teil davon hat sie auf einem gebundenen Sparbuch mit einer Verzinsung von 2,5 % p. a. liegen.

Der Rest liegt jederzeit behebbar auf einem Sparkonto mit einer Verzinsung von 1 % p. a. Insgesamt konnte sie sich letztes Jahr mit dieser Kapitalstreuung über Euro 675,00 Zinserträge vor Abzug der KESt freuen.

Berechnen Sie, welche Geldbeträge sie jeweils am Sparbuch und am Sparkonto angelegt hat.

-----

Lösung:

Kapital am Sparbuch: x Zinsen am Sparbuch: 0,025 \*x

Kapital am Sparkonto: y Zinsen am Sparkonto: 0,01 \*y

x +y =30000 Gleichung für Kapitalien

0,025 \*x +0,01 \*y =675 Gleichung für Zinsen

-----

Dieses Gleichungssystem kann mithilfe des Einsetzungsverfahrens gelöst werden.

x =30000 -y

0,025 \*(30000 -y) +0,01 \*y =675

750 -0,025 \*y +0,01 \*y =675

750 -0,015 \*y =675

-0,015 \*y =-75 |:(-0,015)

y =5000

x =30000 -5000 =25000

Frau Drexler hat Euro 25.000,00 am gebundenen Sparbuch und Euro 5.000,00 am Sparkonto liegen.

-----

#### \*\*-4 - Übungsaufgaben

1.001.)

B

Berechnen Sie die Lösungsmenge mit zwei verschiedenen Lösungsverfahren:

a)

4x -6y =1

3x +2y =5

-----

b)

3x\_1 -4x\_2 =3

5x\_1 +x\_2 =28

-----

c)

x -y =11

x =2y

-----

d)

4x -7y =2

x +3y =10

-----

e)

4x +3y -23 =0

3x -2y +4 =0

-----

f)

5x -6y =52

3x +7y =10

-----

Hinweis: Wenn nicht anders angegeben, ist die Grundmenge bei linearen Gleichungssystemen die Menge 'R 'x 'R.

-----

1.002.)

Ermitteln Sie die Lösungsmenge rechnerisch und grafisch:

a)

3x +y =4

2x +y =6

-----

b)

x\_1 -x\_2 =5

2x\_1 +x\_2 =3

-----

c)

3x +2y =5

x -3y =6

-----

j-15

1.003.)

A, B, C

Lösen Sie rechnerisch und grafisch:

a)

4x\_1 -6x\_2 =1

2x\_1 +2x\_2 =5

-----

b)

18x -35y =1

30x +77y =137

-----

c)

2x +3y =12

7x -2y =17

-----

1.004.)

B

Berechnen Sie die Lösungsmenge mit zwei verschiedenen Lösungsverfahren:

a)

2x +3y =4

x/3 +y/2 =1

-----

b)

x/2 +4y =11

x/3 +y/2 =3

-----

c)

0,08x -0,11y =-0,01

12x +9y =75

-----

d)

2x +3y =6

x/3 +y/2 =3

-----

Tipp: Wir verwenden folgende Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme:

* Einsetzungsverfahren
* Gleichsetzungsverfahren
* Additions-/Eliminationsverfahren
* grafisches Lösungsverfahren

-----

1.005.)

A, B, C

Ermitteln Sie die Lösungsmenge aller Gleichungssysteme rechnerisch und grafisch:

a)

-x +y =1

-3x +3y =9

-----

b)

-x +y =1

-x +3y =9

-----

c)

-x +y =1

-3x +3y =3

-----

1.006.)

A, B, C

Erstellen Sie jeweils ein zu den Graphen passendes lineares Gleichungssystem. Kontrollieren Sie, ob die rechnerische Lösung Ihres Gleichungssystems mit der grafischen Lösung übereinstimmt.

-----

1.007.)

D

Argumentieren Sie, wie viele Lösungen die folgenden Gleichungssysteme haben,

ohne diese zu lösen:

a)

-2x +3y =1

2x -3y =-1

-----

b)

3x +5y =10

2x -3y =10

-----

c)

x +2y =9

0,5x +y =4

-----

d)

7x +y =-3

x -y =-1

-----

e)

0,4x -0,1y =2

2x -0,5y =10

-----

f)

3x +y =9

x +y/3 =21

-----

1.008.)

A, B

Wählen Sie für a, b, c jeweils eine reelle Zahl, so dass das Gleichungssystem die angegebene Anzahl an Lösungen besitzt.

a)

2x +y =3

ax +by =c

unendlich viele Lösungen

-----

b)

2x +y =3

ax +by =c

keine Lösung

-----

c)

2x +y =3

ax +by =c

genau eine Lösung

-----

A - Modellieren und Transferieren

B - Operieren und Technologieeinsatz

C - Interpretieren und Dokumentieren

D - Argumentieren und Kommunizieren

j-16

1.008.)

A, B

d)

2x +y =3

4x +by =6

unendlich viele Lösungen

-----

e)

x +3y =2

ax +6y =3

keine Lösung

-----

f)

5x +y =1

5x +ay =2

genau eine Lösung

-----

1.009.)

Wählen Sie für a, b, c jeweils eine reelle Zahl, so dass das Gleichungssystem die angegebene Anzahl an Lösungen besitzt.

a)

2x +ay =b

6x +3y =15

unendlich viele Lösungen

-----

b)

2x +6y =8

x +by =c

keine Lösung

-----

c)

x +0,5y =a

x +by =2

genau eine Lösung

-----

1.010.)

A, B, D

Schreiben Sie zu den gegebenen Gleichungssystemen einen passenden Text, wenn x und y jeweils für eine Zahl stehen. Berechnen Sie die gesuchten Zahlen und kontrollieren Sie, ob Ihr Text auf die Zahlen zutrifft.

a)

7x =y

x +y =80

-----

b)

2x +5y =17

x -y =5

-----

c)

x +2y =10

x -1/2 y =5

-----

|Bewegungsaufgaben|

1.011.)

A, B

Helmut wohnt in Arnreit und will sich mit seinem Freund Klaus, der in Kirchberg ob der Donau rund 13 km von Helmut entfernt zu Hause ist, treffen.

Helmut fährt mit dem Fahrrad um 13:00 Uhr los und schafft etwa 18 km in der Stunde. Klaus startet um 13:30 Uhr von zu Hause und geht Helmut mit etwa 3,5 km/h entgegen.

Berechnen Sie, wann und wo Helmut und Klaus einander treffen.

-----

1.012.)

A, B

Renata fährt um 9:00 Uhr mit ihrem Motorrad mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von ca. 120 km/h von Eisenstadt in das ca. 230 km entfernte Linz. Um 9:30 Uhr startet Roberto mit einem Lkw von Linz in Richtung Eisenstadt. Roberto fährt mit durchschnittlich 90 km/h.

Berechnen Sie, wann (Uhrzeit angeben) die beiden Fahrzeuge aneinander vorbeifahren. In welcher Entfernung von Linz findet das Treffen statt?

-----

1.013.)

A, B

Irene und Max sind begeisterte Langläufer. Gern bewältigen sie eine 17 km lange Rundloipe. Da Max mit ca. 15 km/h um 5 km/h schneller läuft als Irene, startet Irene meist eine Viertelstunde vor Max.

a) Erstellen Sie ein passendes Gleichungssystem, indem Sie die Funktionsgleichungen aufstellen.

-----

b) Berechnen Sie, wann Max Irene einholt und wie weit sie zu diesem Zeitpunkt vom Loipenziel entfernt sind.

-----

1.014.)

A, B

Die Entfernung Salzburg-Wien beträgt ca. 315 km. Um 7:00 Uhr fährt ein Güterzug von Wien ab und kommt um 12:36 Uhr in Salzburg an. Ein Intercity verlässt um 9:36 Uhr Wien in Richtung Salzburg. Der Intercity fährt 2,2 mal so schnell wie der Güterzug.

Berechnen Sie, wann und wie weit von Salzburg entfernt der Intercity den Güterzug einholt. Wann kommt er in Salzburg an?

-----

|Aufgaben aus der Wirtschaft|

1.015.)

A, B, D

Die Rezeptionistin eines Hotels meldet an das Tourismusamt, dass im Hotel 40 Zimmer mit 66 Betten zur Verfügung stehen. Sie vergisst aber zu sagen, wie viele Ein- und wie viele Zweibettzimmer vorhanden sind.

a) Begründen Sie, ob aus diesen Angaben die Anzahl der Ein- und Zweibettzimmer eindeutig bestimmt werden kann.

-----

b) Berechnen Sie die Anzahl der Ein- und Zweibettzimmer.

-----

1.016.)

A, B

1/4 kg Schinken und 20 dag Aufschnitt kosten zusammen Euro 4,95. Kauft man aber 20 dag Schinken und 30 dag Aufschnitt, so bezahlt man zusammen Euro 5,15. Berechnen Sie, wie teuer 10 dag von jeder Sorte sind.

j-17

1.017.)

A, B

Bei einem Bau erhielten 13 Maurer und 7 Hilfsarbeiter für 15 Arbeitstage zu je 8 Arbeitsstunden zusammen Euro 28.560,00. Ein anderes Mal wurden an 20 Maurer und 9 Hilfsarbeiter für 18 Arbeitstage zu je 9 Arbeitsstunden zusammen Euro 57.024,00 ausbezahlt.

Ermitteln Sie, wie hoch der Stundenlohn für Maurer und wie hoch für Hilfsarbeiter ist.

-----

1.018.)

A, B

Für ein Haus benötigt ein Baumeister 100000 Mauerziegel und 7500 Dachziegel von 315 Tonnen Gesamtmasse. Für ein anderes Haus braucht er 80000 Mauerziegel und 7000 Dachziegel derselben Sorte von 254 Tonnen Gesamtmasse.

Berechnen Sie, wie schwer ein Mauerziegel ist.

-----

1.019.)

A, B

Eine Hausfrau kaufte zwei Waren zu Euro 21,00 pro kg und zu Euro 26,00 pro kg, insgesamt 80 dag um Euro 19,30.

Ermitteln Sie, welche Menge der Ware sie zu Euro 21,00 pro kg eingekauft hat.

-----

1.020.)

A, B

Ein Großhändler verkaufte zwei Stoffballen um zusammen Euro 542,50, den einen mit 20 Prozent Gewinn, den anderen mit 5 Prozent Verlust. Trotz dieses Verlustes blieb ihm noch ein Gesamtgewinn von Euro 42,50.

Berechnen Sie den Selbstkostenpreis für jeden Ballen.

-----

1.021.)

A, B

Von der Kaffeesorte Classic kosten 8 kg der Qualität A und 5 kg der Qualität

B zusammen Euro 80,50.

1 kg der Qualität B ist um 30 % billiger als 1 kg der Qualität A.

Ermitteln Sie, wie viel 1 kg der Qualität A und wie viel 1 kg der Qualität B

kostet.

-----

1.022.)

A, B

Ein Händler hat 8 kg Assam-Tee der Qualität GOP und 10 kg Assam-Tee der Qualität GFBOP eingekauft und Euro 128,00 bezahlt. Beim nächsten Einkauf ist der Preis der GOP-Qualität um 15 % gestiegen, der Preis der GFBOP- Qualität um 10%. Der Händler bezahlt nun für die gleiche Menge wie beim vorigen Einkauf um Euro 15,20 mehr.

Berechnen Sie, wie viel 1 kg der Qualität GOP und wie viel 1 kg der Qualität GFBOP kostet.

-----

1.023.)

A, B

Aus dem "Rechenbüchlein" von Adam Ries: "Item eyner spricht zu dem anderen gib mir 1 pfennig, so hab ich sovil sam dir bleibt, spricht der andere zum ersten gib mir 1 pfennig, so hab ich zwey mal so vil sam dir bleibt. Nun wollt ich gern wissen, wivil eym etzlicher gehabt hat."

-----

Abb.: ADAM RIES, 1492 BIS 1559, DEUTSCHER RECHENMEISTER

-----

1.024.)

A, B

Zwei Esel stöhnen unter der Last ihrer Säcke. Sagt der eine: "Gibst du mir einen Sack, trage ich doppelt so viele Säcke wie du." Darauf der andere: "Gibst du mir aber einen, so tragen wir gleich viele Säcke."

Berechnen Sie, wie viele Säcke jeder hat.

-----

1.025.)

A, B

Ein Betrieb verbraucht in einem Monat 600 kWh Strom und bezahlt dafür Euro 120,00. In einem anderen Monat wird für 575 kWh ein Betrag von Euro 116,00 verrechnet.

Berechnen Sie, wie hoch die Grundgebühr und die Kosten pro kWh sind.

-----

1.026.)

A, B

Frau Maier muss beruflich häufig nach Linz. Sie wohnt dort immer im gleichen Hotel und fährt die 3 km lange Strecke vom Bahnhof ins Hotel für gewöhnlich mit einem Taxi des Unternehmens A und zahlt Euro 7,80. Zufällig steigt sie einmal in ein Taxi des Unternehmens B. Am Taxometer sieht sie mit Erstaunen beim Einsteigen, dass dieses Unternehmen nur 60 Prozent der Grundgebühr von A verrechnet. Trotzdem zahlt sie Euro 7,50 für diese Fahrt. Berechnen Sie die Höhe der Grundgebühr und der Kosten pro gefahrenem km für beide Taxiunternehmen, wenn die Differenz der Kosten pro gefahrenem km bei Unternehmen A und B Euro 0,30 beträgt.

j-18

1.027.)

A, B

Die Gesamtkostenfunktion eines Betriebes ist eine lineare Funktion. Bei einer Produktionsmenge von 70 Stück betragen die Gesamtkosten Euro 3.000,00. Bei einer Produktionsmenge von 30 Stück betragen die Gesamtkosten Euro 1.600,00.

Berechnen Sie die Gleichung der Gesamtkostenfunktion K.

-----

1.028.)

A, B

Herr Sailer verfügt über Ersparnisse in Höhe von Euro 43.500,00. Er hat dieses Geld auf zwei Anlageformen verteilt. Ein Teil ist jederzeit behebbar auf einem Sparkonto mit 0,5 % Zinsen p. a. angelegt. Den anderen Teil hat Herr Sailer auf ein Kapitalsparbuch mit 3 % Zinsen p. a. gelegt.

Im vergangenen Jahr konnte er sich vor Abzug der KESt über einen Zinsertrag von insgesamt Euro 1.267,50 freuen.

a) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der jeweils angelegten Beträge.

-----

b) Berechnen Sie die Höhe der Beträge.

-----

1.029.)

A, B, D

Frau Holzknecht hat ihre gesamten Ersparnisse auf zwei Sparbücher verteilt. Am ersten Sparbuch beträgt die jährliche Verzinsung 2 %, am zweiten Sparbuch beträgt sie 1,5 %. Der gesamte Zinsertrag des letzten Jahres betrug Euro 852,50 vor Abzug der KESt.

Wäre die Verzinsung am ersten Sparbuch 1,5 % und jene am zweiten Sparbuch 2 %, hätte sich Frau Holzknecht über einen um Euro 45,00 höheren Zinsertrag freuen können.

a) Argumentieren Sie, auf welchem Sparbuch Frau Holzknecht mehr Geld angelegt hat.

-----

b) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Geldbeträge auf den Sparbüchern.

-----

c) Berechnen Sie die Höhe der Gesamtersparnis von Frau Holzknecht.

-----

1.030.)

A, B

Herr Sonderegger hat seine Ersparnisse auf einem Kapitalsparbuch zu 3 % p. a. und auf einem Bonussparbuch mit ansteigendem Zinssatz angelegt. Im letzten Jahr wurde das Bonussparbuch mit 2 % p. a. verzinst.

Herr Sonderegger erhielt insgesamt Euro 800,00 Zinsen vor Abzug der KESt. Dieses Jahr wird das Bonussparbuch mit 2,5 % verzinst. Insgesamt kann sich Herr Sonderegger dieses Jahr über Euro 909,75 Zinsertrag vor Abzug der KESt freuen.

a) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der angelegten Geldbeträge. Beachten Sie, dass die Zinsen des ersten Jahres im zweiten Jahr mit den ursprünglichen Geldbeträgen weiterverzinst werden.

-----

b) Berechnen Sie die Höhe der ursprünglich angelegten Geldbeträge.

-----

1.031.)

A, B

Eine Geschäftsfrau kauft ein Haus mitsamt Garten um Euro 185.100,00. Das Haus verkauft sie später mit 12 % Gewinn und den Garten mit einem Verlust von 5 %. Insgesamt bleibt noch ein Gewinn von Euro 18.421,00.

Berechnen Sie, wie viel das Haus und wie viel der Garten im Einkauf gekostet haben.

-----

1.032.)

A, B

Ein Schläger und ein Ball kosten zusammen Euro 1,10. Der Schläger kostet um einen Euro mehr als der Ball.

Ermitteln Sie, wie viel der Ball kostet.

Versuchen Sie diese Aufgabe zunächst im Kopf zu lösen und stellen Sie erst dann die zugehörige Gleichung auf, um auch diese zu lösen.

-----

Zu Übungsaufgabe 1.032:

Ein Baseballschläger und ein Ball kosten zusammen einen Dollar und zehn Cent. Der Schläger kostet einen Dollar mehr als der Ball. Wie viel kostet der Ball? Wer jetzt intuitiv zehn Cent sagt, liegt natürlich daneben (die korrekte Antwort lautet fünf Cent). Nicht möglich? Mehr als die Hälfte der Befragten an den Elite-Unis Harvard, MIT und Princeton gaben bei blitzschnellen Reaktionen falsche Antworten.

(aus: N. Mayer: Von den Mühen des deutlichen Denkens. Die Presse, 3. 7. 2012)

j-19

#### \*\*-4 - Ziel erreicht?

Z 1.1.)

B

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

a)

3x +3y =6

-x -6y =18

-----

b)

30x -7y =13

3x +2 =y

-----

c)

x/4 -y/5 =-19/20

(3x)/5 -(2y)/7 =29/35

-----

Z 1.2.)

A, B, C

Erstellen Sie zu den dargestellten Graphen jeweils ein passendes Gleichungssystem der Form

a\_1x +b\_1y =c\_1

a\_2x +b\_2y =c\_2

Berechnen Sie die Lösung Ihres Gleichungssystems und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis anhand der Grafik.

-----

Z 1.3.)

A, B

Wählen Sie für b jeweils eine Zahl, sodass das Gleichungssystem die angegebene Anzahl an Lösungen besitzt:

a)

7x -4y =5

-21x +by =60

keine Lösung

-----

b)

2x +by =3

x/4 -y =8

genau eine Lösung

-----

c)

2x -5y =10

bx +0,5y =-1

unendlich viele Lösungen

-----

Z 1.4.)

A, B

Martha kauft fünf Flaschen Mineralwasser und zwei Flaschen Limonade. Sie bezahlt Euro 7,33. Hubert kauft acht Flaschen Mineralwasser und vier Flaschen Limonade, gleichzeitig bringt er Leergut im Wert von Euro 3,30 zurück und bezahlt noch Euro 9,46.

a) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Kosten pro Flasche Mineralwasser und pro Flasche Limonade.

-----

b) Berechnen Sie, wie viel jeweils eine Flasche Mineralwasser bzw. Limonade kostet.

-----

Z 1.5.)

A, B

Frau Singer besitzt zwei Sparbücher. Beim ersten beträgt der Jahreszinssatz 2 %, beim zweiten 2,5 %. Die Zinsen betragen insgesamt Euro 615,00. Würde der Jahreszinssatz des ersten Sparbuchs 2,5 % betragen und jener des zweiten 2 %, so würden die Zinsen Euro 600,00 betragen.

Berechnen Sie, wie hoch die in den Sparbüchern angelegten Geldbeträge jeweils sind.

-----

Z 1.6.)

A, B

Der Bahnhof Landeck-Zams ist 75 km vom Hauptbahnhof Innsbruck entfernt. Ein Railjet verlässt um 13:25 Uhr den Bahnhof Landeck-Zams und fährt mit durchschnittlich 108 km pro Stunde in Richtung Innsbruck. Vom Hauptbahnhof Innsbruck startet um 13:55 Uhr ein Personenzug mit durchschnittlich 60 km pro Stunde in Gegenrichtung.

a) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Fahrzeiten der beiden Züge bis zu Ihrem Treffpunkt.

-----

b) Berechnen Sie, wann und in welcher Entfernung von Innsbruck die Züge einander treffen.

j-20

# \*\*-1 - 2 Matrizenrechnung

Bei vielen wirtschaftlichen Problemstellungen lassen sich Größen in einem rechteckigen Schema anordnen. Diese schematische Anordnung heißt Matrix, der Name wurde 1850 von James Joseph Sylvester (1814 bis 1897) eingeführt.

William Rowan Hamilton (1805 bis 1865) zeigte, dass es eine Struktur gibt, die den Rechengesetzen der Algebra ähnlich ist, auch wenn das Kommutativgesetz der Multiplikation nicht gilt. Hamilton schlug den Begriff Vektor für eine einspaltige Matrix vor und entwickelte das Rechnen mit Vektoren.

Arthur Caylay (1821 bis 1895) begründete das Rechnen mit Matrizen, das besonders in den letzten Jahren für die schnelle Erfassung und quantitative Auswertung ökonomischer und technischer Prozesse eine immer größere Bedeutung gewonnen hat.

Ein besonderer Schwerpunkt ist neben dem Lösen linearer Gleichungssysteme die betriebswirtschaftliche Anwendbarkeit. In diesem Zusammenhang ist auch das Erfassen von Betriebsabläufen, Stücklistenprobleme und die Produktionsplanung zu erwähnen.

In der Statistik werden Populationsprobleme mit Matrizen gelöst. In der Bautechnik wird die Spannungsverteilung von Rohren, z. B. bei Stahlschornsteinen, untersucht, in der Mechanik die Kinematik von Robotern, die Statik und Dynamik von Getrieben. Diese Aufzählung ist in keiner Weise vollständig.

-----

Abb.: WILLIAM ROWAN HAMILTON, 1805 BIS 1865, IRISCHER MATHEMATIKER

Abb.: ARTHUR CAYLAY, 1821 BIS 1895, ENGLISCHER MATHEMATIKER

-----

#### \*\*-4 - Meine Ziele

Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

* die Matrizenschreibweise anwenden,
* Matrixelemente interpretieren,
* Matrizen addieren, subtrahieren und multiplizieren,
* inverse Matrizen berechnen,
* lineare Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise darstellen, umformen und lösen,
* die Matrizenrechnung auf wirtschaftliche Aufgabenstellungen anwenden,
* Gozintographen erstellen und interpretieren.

#### \*\*-4 - Worum geht's hier?

In einer Matrix werden Zahlen in einem rechteckigen Zahlenschema zusammengefasst. Eine Matrix ist weder eine Zahl noch ein Term. Um die Zusammengehörigkeit der Zahlen hervorzuheben, wird eine Matrix mit runden Klammern geschrieben.

|Leistungsverflechtungen in einem Betrieb mit drei Abteilungen|

Der Gozintograph ("it goes into") zeigt die Leistungsverflechtungen eines Betriebes mit drei Abteilungen in Leistungseinheiten:

Abteilung A -> 40 -> Abteilung B

Abteilung B -> 60 -> Abteilung A

-----

Abteilung A -> 60 -> Abteilung C

Abteilung C -> 20 -> Abteilung A

-----

Abteilung B -> 40 -> Abteilung C

Abteilung C -> 80 -> Abteilung B

-----

Von der Abteilung A gehen 40 Leistungseinheiten (LE) an die Abteilung B und 60 LE an die die Abteilung C. Von der Abteilung B gehen 60 LE an die Abteilung A usw.

j-21

Zuordnungstabelle:

von (Zeile) an (Spalte)

von / an | A | B | C

A | 0 | 40 | 60

B | 60 | 0 | 40

C | 20 | 80 | 0

-----

Zugehörige Matrix:

'mat

([0; 40; 60]

[60; 0; 40]

[20; 80; 0])

-----

Zuordnung: von Zeile -> nach Spalte

-----

|Distanztabelle|

Es wird die Entfernung in Kilometern vom Ausgangsort (Zeile, links) zum Zielort (Spalte, oben) in Form einer Tabelle angegeben.

Ort | Berlin | Graz | München | Wien

Berlin | 0 | 849 | 587 | 655

Graz | 849 | 0 | 395 | 186

München | 587 | 395 | 0 | 445

Wien | 655 | 186 | 445 | 0

-----

Zugehörige Matrix:

'mat

([0; 849; 587; 655]

[849; 0; 395; 186]

[587; 395; 0; 445]

[655; 186; 445; 0])

Die Matrix ist symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonale. Sie hat 4 Zeilen und 4 Spalten.

-----

## \*\*-2 - 2.1 Grundbegriffe

|Definition: Matrix|

Eine Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema.

-----

Man kann mit Matrizen Rechenoperationen durchführen, die denen mit Zahlen sehr ähnlich sind. Es gibt aber auch typische Unterschiede. So gilt etwa das Kommutativgesetz für die Matrizenmultiplikation nicht.

In der Praxis hat die Matrizenrechnung nicht nur für lineare Gleichungssysteme Bedeutung, sondern auch für lineare Beziehungen allgemeiner Art.

|Definition: m 'x n-Matrix|

Eine m 'x n-Matrix ist ein System von m \*n Elementen a\_(ik) (i =1, 2, ..., m; k =1, 2, ..., n), die in einem rechteckigen Schema von m Zeilen und n Spalten angeordnet sind.

1. Spalte 2. Spalte 3. Spalte n-te Spalte

A ='mat

([a\_(11); a\_(12); a\_(13); ...; a\_(1n)]

[a\_(21); a\_(22); a\_(23); ...; a\_(2n)]

[...; ...; ...; ...; ...]

[a\_(m1); a\_(m2); a\_(m3); ...; a\_(mn)])

1. Zeile

2. Zeile

...

m-te Zeile

-----

a\_(23): lies "a zwei drei"

A ist eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten (sprich kurz: "m mal n"-Matrix). Die Zahlen a\_(ik) heißen Elemente der Matrix.

-----

Das Element a\_(23) steht in der zweiten Zeile und in der dritten Spalte der Matrix.

Für das Matrizenelement a\_(ik) bedeutet also

* der erste Index i die Zeilennummer und
* der zweite Index k die Spaltennummer.

-----

Tipp:

Allgemein ist a\_(ik) das Element

* inder i-ten Zeile
* und der k-ten Spalte.

j-22

|Definition: Quadratische Matrix, Einheitsmatrix, transponierte Matrix|

* Bei einer quadratischen Matrix ist die Anzahl der Zeilen gleich der Anzahl der Spalten.
* Eine quadratische Matrix, die in der Hauptdiagonale nur 1 und sonst 0 hat, heißt Einheitsmatrix E.
* Tauscht man in der Matrix A Zeilen mit Spalten, so erhält man die zugehörige transponierte Matrix A^T.

-----

E ='mat

([1; 0; 0]

[0; 1; 0]

[0; 0; 1;])

3 'x 3-Einheitsmatrix

-----

A ='mat

([a; b]

[c; d])

-----

A^T ='mat

([a; c]

[b; d])

-----

#### \*\*-4 - Übungsaufgaben

2.001.)

A, C

Ort | Berlin | Graz | München | Wien

Berlin | 0 km | 849 km | 587 km | 655 km

Graz | 849 km | 0 km | 395 km | 186 km

München | 587 km | 395 km | 0 km | 445 km

Wien | 655 km | 186 km | 445 km | 0 km

-----

a) Übertragen Sie die Tabelle in eine Matrix A.

Beschreiben Sie die Eigenschaften dieser Matrix.

-----

b) Interpretieren Sie die Bedeutung von a\_(42).

-----

c) Berechnen Sie a\_(43) +a\_(31).

-----

d) Ein Handelsreisender macht folgende Rundreise:

Wien - Berlin - Graz - München - Berlin - Wien.

Schreiben Sie die Gesamtstrecke als Summe der Matrixelemente und berechnen Sie die Gesamtkilometeranzahl der Strecke.

-----

2.002.)

B, C

Gegeben ist die quadratische Matrix:

A ='mat

([3; 8; -1; 8; -1]

[-2; 5; 2; -8; 5]

[-3; -8; -3; 3; 1]

[3; 4; 2; 8; 0]

[4; -7; 1; 0; 6])

a) Lesen Sie die Elemente a\_(51), a\_(43), a\_(25) und a\_(41) ab.

-----

b) Berechnen Sie die Summen:

'Si[j =1;5](a\_(2j)) =**[]**

'Si[j =1;5](a\_(i3)) =**[]**

'Si[j =1](a\_(ij)) =**[]**

-----

## \*\*-2 - 2.2 Rechnen mit Vektoren

|Definition: Zeilen- und Spaltenvektor, transponierter Vektor|

* Eine einzeilige Matrix heißt Zeilenvektor.
* Eine einspaltige Matrix heißt Spaltenvektor.
* Zum Zeilenvektor 'va =(a\_1, a\_2, ..., a\_n) ist der Spaltenvektor 'mat(a\_1|a\_2|...|a\_n) der zugehörige transponierte Vektor

'va^T /'va^T =(a\_1|a\_2|...|a\_n)

-----

Zeilenvektor 'va:

'va =(a\_1, a\_2, ..., a\_n) oder

'va =(a\_1|a\_2|a\_3|...|a\_n) oder

'va =(a\_1 a\_2 a\_3 ... a\_n)

j-23

Zum Spaltenvektor

'vb =(b\_1|b\_2|...|b\_m) ist der Zeilenvektor (b\_1, b\_2, ..., b\_m) der zugehörige transponierte Vektor

'vb^T /'vb^T =(b\_1, b\_2, ..., b\_m).

-----

'vb =(b\_1|b\_2|...|b\_m)

-----

##-Beispiel 2.1: Vektorrechnung in der Betriebswirtschaft

Die Firma Turbo-Oil betreibt eine Erdölraffinerie, in der aus Rohöl veredelte Produkte wie Heizöl (H), Diesel (D) und Kerosin (K) hergestellt werden. Die eingesetzte Fraktionieranlage hat einen durchschnittlichen Öldurchsatz von 10 t/h. Das geförderte Gemenge besteht zu 20 % aus Heizöl, zu 30 % aus Diesel und zu 50 % aus Kerosin. Die durchschnittliche Produktionsmenge pro Stunde beträgt also H: 2 t, D: 3 t und K: 5 t. Diese Zahlen lassen sich als Zeilen- oder Spaltenvektor (Produktionsmenge pro Stunde) schreiben:

'va =(2|3|5)

'va^T =(2, 3, 5)

Nach einer achtstündigen gleichmäßigen Laufzeit und bei einer Gesamtmenge von 8 \*10 t =80 t des Rohöls ergeben sich die produzierten Einzelmengen der drei Produkte H, D und K folgendermaßen.

H: 8 \*2 t =16 t (20 % von 80 t)

D: 8 \*3 t =24 t (30 % von 80 t)

K: 8 \*5 t =40 t (50 % von 80 t)

In Vektorform (Produktionsmenge in 8 Stunden) dargestellt, ergibt dies den Produktionsvektor 'vb:

'vb =8 \*'va =8 \*'(2|3|5) =(8 \*2|8 \*3|8 \*5) =(16|24|40)

Bei einem Lagerbestand von 10 t bei H, 15 t bei D und 2 t bei K zu Beginn der Laufzeit erhalten wir nach 8 Stunden folgenden Gesamtlagerbestand für die Produkte H, D und K:

H: 10 t +16 t =26 t

D: 15 t +24 t =39 t

K: 2 t +40 t =42 t

Der Gesamtlagerbestand nach 8-stündiger Laufzeit in Vektorform:

Lagervektor 'vc

'vc ='(10|15|2)

-----

Produktionsvektor 'vb

'vb =(16|24|40)

-----

Gesamtlagervektor 'vi

'vi ='vc +'vb ='mat

([10 +16]

[15 +24]

[2 +40] =(26|39|42)

Der Verkaufserlös Euro des Lagerbestandes ist von den Preisen für die Einzelsorten abhängig:

p\_1 =100 GE pro Tonne für H

p\_2 =200 GE pro Tonne für D

p\_3 =300 GE pro Tonne für K

Für den Verkaufeerlös ergibt sich somit:

E =26 \*p\_1 +39 \*p\_2 +42 \*p\_3 =2600 +7800 +12600 =23000

Der Verkaufserlös beträgt 23000 GE.

-----

Preisvektor 'vp =(p\_1|p\_2|p\_3) =(100|200|300)

j-24

|Definition: Addition und Subtraktion von Vektoren|

Vektoren werden komponentenweise addiert bzw. subtrahiert.

-----

(a\_1|a\_2|...|a\_n) +/-(b\_1|b\_2|...|b\_n) =

=(a\_1 +/-b\_1|a\_2 +/-b\_2|...|a\_n +/-b\_n)

-----

Vektoren mit bis zu drei Komponenten können durch Pfeile mit Spitze (Ende) und Schaft (Anfang) dargestellt werden.

Eine Vektoraddition wird grafisch durchgeführt, indem an die Spitze des ersten Vektors 'va der Schaft (Anfang) des zweiten Vektors 'vb gesetzt wird.

Die Vektorsumme 'va +'vb ergibt sich durch den Pfeil, der am Schaft des ersten Vektors beginnt und an der Spitze des zweiten Vektors endet.

-----

##-Beispiel 2.2: Addition und Subtraktion von Vektoren

a) (2|1) +(1|2) =(2 +1|1 +2) =(3|3)

-----

b) (2|1) -(1|2) =(1|-1)

-----

c) (2|-3|5) +(1|4|-2) =(2 +1|-3 +4|5 +(-2)) =(3|1|3)

-----

|Definition: Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (B)|

Ein Vektor 'va wird mit einer Zahl c multipliziert, indem jede Komponente des Vektors mit c multipliziert wird (c 'el 'R).

-----

c \*(a\_1|a\_2|...|a\_n) =(c \*a\_1|c \*a\_2|...|c \*a\_n)

-----

##-Beispiel 2.3: Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (B)

a) 2 \*(2|1) =(2 \*2|2 \*1) =(4|2)

b) 8 \*(1|-3|4) =(8 \*1|8 \*(-3)|8 \*4) =(8|-24|32)

-----

|Definition: Multiplikation zweier Vektoren - Skalarprodukt|

Multipliziert man einen Zeilenvektor 'va mit einem Spaltenvektor 'vb, die aus gleich vielen Zahlen bestehen, so erhält man als Ergebnis keinen Vektor, sondern eine Zahl, einen Skalar. Das Produkt zweier Vektoren heißt daher Skalarprodukt.

(a\_1, a\_2, ..., a\_n) \*(b\_1|b\_2|...|b\_n) =

=(b\_1, b\_2, ..., b\_n) \*(a\_1|a\_2|...a\_n) =

=a\_1 \*b\_1 +a\_2 \*b\_2 +...+a\_n \*b\_n ='Si[i =1;n](a\_i \*b\_i)

j-25

##-Beispiel 2.4: Addition, Subtraktion und Multiplikation von Vektoren (B)

'va =(1|2|2)

'vb =(5|-3|4)

'va +'vb =(6|-1|6)

'v -'vb =(-4|5|-2)

'va^T \*'vb =(1, 2, 2) \*(5|-3|4) =1 \*5 +2 \*(-3) +2 \*4 =7

-----

##-Beispiel 2.5: Berechnung der Fördermenge mithilfe von Vektoren (A, B)

Die Firma Flint & Stone betreibt zwei Schottergruben, in denen ein Gemenge aus drei Sandsorten S\_1, S\_2 und S\_3 gefördert wird. Die Vektoren der durchschnittlichen Förderleistung in Tonnen pro Stunde lauten für die beiden

Schottergruben:

'va =(2|1|3) und 'vb ='va =(1|2|3) mit dem

Fördermengenvektor (S\_1|S\_2|S\_3)

Berechnen Sie die Gesamtfördermenge bei einer Arbeitszeit von t\_1 =7 Stunden in der ersten und t\_2 =3 Stunden in der zweiten Grube.

t\_1 \*'va +t\_2 \*'vb =(2|1|3) +3 \*(1|2|3) =(17|13|30)

Es werden insgesamt 17 t von S\_1, 13 t von S\_2 und 30 t von Sorte S\_3 gefördert.

Der Vektor (17|13|30) wird als Linearkombination der Vektoren 'va und 'vb bezeichnet.

-----

##-Beispiel 2.6: Materialaufwand bei der Produktion von Fahrzeugen (A, B, C)

Zur Montage eines Lkw-Getriebes, einer Lenkstange und einer Ölwanne braucht man (neben anderen) folgende Artikel in der notierten Anzahl:

Abkürzungen für die folgende Tabelle:

G - Getriebe

L - Lenkstange

Ö - Ölwanne

LA - Lagerbestand

P - Preis/Stück in Euro

... G | L | Ö | LA | P

Schrauben | 5 | 8 | 6 | 1500 | 2,00

Muttern | 0 | 4 | 4 | 1200 | 1,00

Beilagscheiben | 3 | 2 | 5 | 250 | 5,00

Klammern | 2 | 4 | 0 | 200 | 3,00

Bei Matrizen ist zu beachten, dass die Zahlen in den Zeilen und Spalten Unterschiedliches aussagen: Die Elemente etwa der zweiten Spalte geben die benötigten Produkte für die Erzeugung einer Lenkstange an.

-----

Verknüpfung:

Das Beispiel 2.6 fasst das Rechnen mit Vektoren in der Betriebswirtschaftslehre zusammen.

-----

Zugehörige Matrix:

'mat

([5; 8; 6; 1500; 2]

[0; 4; 4; 1200; 1]

[0; 4; 8; 2000; 1]

[3; 2; 5; 250; 5]

[2; 4; 0; 200; 3]

j-26

##-Beispiel 2.6: Materialaufwand bei der Produktion von Fahrzeugen (Fortsetzung) (A, B, C)

a) Es werden 30 Getriebe, 120 Lenkstangen und 30 Ölwannen benötigt. Bestimmen Sie den Materialbedarf, verglichen mit dem Lagerbestand. Verwenden

Sie dabei die Vektorschreibweise.

Für den Materialbedarf gilt:

30 \*(5|0|0|3|2) +120 \*(8|4|4|2|4) +

+30 \*(6|4|8|5|0) =(1290|600|720|480|540) Bedarfsvektor

-----

Interpretation der gegebenen Vektoren:

'va ='mat

([Anzahl der Schrauben]

[Anzahl der Muttern]

[Anzahl der Beilagscheiben]

[Anzahl der Stifte]

[Anzahl der Klammern])

-----

Berechnung der fehlenden Mengen:

(1500|1200|2000|250|200) -(1290|600|720|480|540) =

=(210|600|1280|-230|-340|) Lagerbestandsvektor

Interpretation des Lagerbestandsvektors:

Es fehlen noch 230 Stifte und 340 Klammern.

-----

b) Es werden 10 vollständige Getriebe und 10 Ölwannen benötigt.

Berechnen Sie, wie viele Lenkstangen aus dem verbleibenden Lagerbestand maximal zusammengestellt werden können.

10 \*(5|0|0|3|2) +10 \*(6|4|8|5|0) =10 \*(11|4|8|8|1) =

=(110|40|80|80|20)

-----

Restlagerbestand =(1500|1200|2000|250|200) -(110|40|80|80|20) =(1390|1160|1920|170|180)

-----

Mögliche Lenkstangen (x Stück):

(8|4|4|2|4) <=(1390|1160|1920|170|180) <=>

8'x <=1390 => x <=173

4'x <=1160 => x <=290

4'x <=1920 => x <=480

2'x <=170 => x <=85

4'x <=180 => x <=45

Es sind somit maximal 45 vollständige Lenkstangen möglich, wenn keine Klammern nachbestellt werden.

-----

c) Ermitteln Sie den Materialwert des (ursprünglichen) Lagers bei einem Preisvektor 'vp^T =(2, 1, 1, 5, 3).

Materialwert =(2, 1, 1, 5, 3) \*(1500|1200|2000|250|200) =

=2 \*1500 +1200 +2000 +5 \*250 +3 \*200 =8050

Der Materialwert des Lagers war Euro 8.050,00.

j-27

#### \*\*-4 - Übungsaufgaben

2.003.)

B

'va =(1|3|-1)

'vb =(2|-1|-2)

'vc =(1|1|-5)

'vd =(4|0|0)

a) Berechnen Sie 'va +'vb +'vc und 2'va -3'vb.

-----

b) Berechnen Sie die Skalarprodukte 'va^T \*'vb und 'vb^T \*'vc.

-----

c) Stellen Sie den Vektor 'vd als Linearkombination der drei übrigen Vektoren dar.

Anleitung: 'vd =t\_1 \*'va +t\_2 -'vb +t\_3 'vc Berechnen Sie t\_1, t\_2 und t\_3.

-----

2.004.)

A, B

Ein Unternehmen hat vier Zweigwerke in den Orten A, B, C und D, in denen Pkw, Lkw und Motorräder (Mr) hergestellt werden. Die Produktionsmenge ist durch die ersten vier Spaltenvektoren der Tabelle gegeben:

...| A | B | C | D | P. pro ME in Euro

Pkw | 20000 | 12000 | 4000 | 6000 | 16.000,00

Lkw | 5000 | 10000 | 2000 | 12000 | 280.000,00

Mr | 8000 | 6000 | 12000 | 7000 | 4.000,00

Die Preise in Euro pro Stück werden durch den Vektor

'vp =(16000|280000|4000) angegeben.

a) Berechnen Sie die Gesamtproduktion des Unternehmens.

-----

b) Berechnen Sie den Gesamterlös und die Erlöse der einzelnen Zweigwerke.

-----

2.005.)

A, B

Zur Montage von je einem Produkt A, B oder C benötigt man jeweils vier Materialien, die in folgender Tabelle gegeben sind:

...| A | B | C | Lagerbestand

Material 1 | 3 | 2 | 5 | 100

Material 2 | 1 | 6 | 4 | 80

Material 3 | 4 | 3 | 2 | 60

Material 4 | 2 | 3 | 5 | 90

Es sollen von den Produkten A und B jeweils 5 Stück und vom Produkt C 10 Stück hergestellt werden.

a) Berechnen Sie den Materialbedarf.

-----

b) Berechnen Sie den neuen Lagerbestand nach Herstellung der benötigten Produkte.

j-28

## \*\*-2 - 2.3 Rechnen mit Matrizen

### \*\*-3 - 2.3.1 Addition und Subtraktion von Matrizen

##-Beispiel 2.7: Produktion von zwei Fenstertypen - Teil 1 (A, B)

Ein Betrieb produziert die zwei Fenstertypen I und II und liefert diese an die Firmen A, B, C und D.

Im ersten bzw. zweiten Halbjahr eines Jahres wurden folgende Mengen abgegeben:

2015 1. Halbjahr

... | A | B | C | D

I | 20 | 30 | 10 | 50

II | 50 | 50 | 0 | 40

-----

2015 2. Halbjahr

... | A | B | C | D

I | 20 | 50 | 50 | 10

II | 0 | 50 | 0 | 50

Man kann die Elemente der gegebenen Tabelle in Matrizen übertragen.

Die von den einzelnen Produkten an die einzelnen Händler in diesem Jahr insgesamt abgegebenen Mengen erhält man, indem man die jeweils an gleicher Stelle stehenden Elemente addiert, also:

A ='mat

([20; 30; 10; 50]

[50; 50; 0; 40])

-----

B ='mat

([20; 50; 50; 10]

[0; 50; 0; 50])

-----

A +B ='mat

([20 +20; 30 +50; 10 +50; 50 +10]

[50 +0; 50 +50; 0 +0; 40 +50]) =

='mat

([40; 80; 60; 60]

[50; 100; 0; 90])

-----

|Definition: Addition und Subtraktion von Matrizen|

Zwei m 'x n-Matrizen A und B werden addiert oder subtrahiert, indem man die entsprechenden Elemente addiert bzw. subtrahiert.

Das Ergebnis ist wieder eine Matrix vom Typ m 'x n.

Das Rechnen mit Vektoren ist als Spezialfall in den Rechnungen mit Matrizen enthalten.

'mat

([a\_(11); a\_(12); ...; a\_(1n)]

[a\_(21); a\_(22); ...; a\_(2n)]

[...; ...; ...; ...]

[a\_(m1); a\_(m2); ...; a\_(mn)]) +/-

+/-'mat

([b\_(11); b\_(12); ...; b\_(1n)]

[b\_(21); b\_(22); ...; b\_(2n)]

[...; ...; ...; ...]

[b\_(m1); b\_(m2); ...; b\_(mn)]) =

='mat

([a\_(11) +/-b\_(11); a\_(12) +/-b\_(12); ...; a\_(1n) +/-b\_(1n)]

[a\_(21) +/-b\_(21); a\_(22) +/-b\_(22); ...; a\_(2n) +/-b\_(2n)]

[...; ...; ...; ...]

[a\_(m1) +/-b\_(m1); a\_(m2) +/-b\_(m2); ...; a\_(mn) +/-b\_(mn)])

-----

Hinweis: Das Rechnen mit Vektoren ist als Spezialfall in den Rechnungen mit Matrizen enthalten.

-----

|Addition von Matrizen|

Die Addition von Matrizen ist kommutativ und assoziativ.

Kommutativgesetz: A +B =B +A

Assoziativgesetz: (A +B) +C =A +(B +C)

-----

### \*\*-3 - 2.3.2 Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl

##-Beispiel 2.7: Produktion von zwei Fenstertypen - Teil 2 (B)

Der Betrieb aus dem letzten Beispiel hat sich zum Ziel gesetzt, im 1. Halbjahr 2016 das Ergebnis des 1. Halbjahres 2015 zu verdreifachen.

Berechnen Sie die an die Händler gelieferte Menge.

3 \*A =3 \*'mat

([20; 30; 10; 50]

[50; 50; 0; 40]) =

='mat

([3 \*20; 3 \*30; 3 \*10; 3 \*50]

[3 \*50; 3 \*50; 3 \*0; 3 \*40]) =

='mat

([60; 90; 30; 150]

[150; 150; 0; 120])

Die neue Liefermenge erhält man durch eine Multiplikation der Matrix mit einer Zahl.

j-29

|Definition: Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl|

Eine Matrix wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jedes Element der Matrix mit dieser Zahl c 'el 'R multipliziert.

c \*'mat

([a\_(11); a\_(12); ...; a\_(1n)]

[a\_(21); a\_(22); ...; a\_(2n)]

[...; ...; ...; ...]

[a\_(m1); a\_(m2); ...; a\_(mn)]) =

='mat

([c \*a\_(11); c \*a\_(12); ...; c \*a\_(1n)]

[c \*a\_(21); c \*a\_(22); ...; c \*a\_(2n)]

[...; ...; ...; ...]

[c \*a\_(m1); c \*a\_(m2); ...; c \*a\_(mn)])

-----

|Satz: Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl|

1 \*A =A

c(A +B) =c \*A +c \*B

(c +d) \*A =c \*A +d \*A

c, d 'el 'R

-----

##-Beispiel 2.8: Summe und Differenz von Matrizen

A ='mat

([1; 3; -5]

[4; 0; 1])

B ='mat

([-2; 0; 1]

[12; -1; 0])

-----

A +B ='mat

([1 -2; 3 +0; -5 +1]

[4 +2; 0 -1; 1 +0]) ='mat

([-1; 3; -4]

[6; -1; 1]) =B +A

-----

A -B ='mat

([1 +2; 3 -0; -5 -1]

[4 -2; 0 +1; 1 -0]) ='mat

([3; 3; -6]

[2; 1; 1])

-----

B -A ='mat

([-3; -3; 6]

[-2; -1; -1])

A -B \=B -A A -B =-(B -A)

-----

A +B =B +A

A -B \=B -A

A -B =-(B -A)

-----

|Matrizen mithilfe des grafischen Taschenrechners darstellen|

Im Matrixeditor des GTR ist es möglich, bis zu zehn Matrizen [A] bis [J] zu definieren und gleichzeitig zu speichern.

Bevor Sie eine Matrix definieren, müssen Sie erst den Matrixnamen auswählen:

Drücken Sie dazu die Tasten (2nd) [MATRX] beim GTR und wählen EDIT.

Alle bisher definierten Matrizen werden mit Zeilen- und Spaltenanzahl gezeigt.

Matrizen werden vom GTR in eckigen Klammern geschrieben.

Wählen Sie die zu definierende Matrix aus.

Geben Sie die Anzahl der Zeilen ein. (ENTER)

Geben Sie die Anzahl der Spalten ein. (ENTER)

Jetzt können Sie mit dem Cursor die Elemente einer m 'x n-Matrix auswählen.

Sie geben entsprechende Zahlen ein und schließen mit (ENTER) die Eingabe jedes Elementes ab.

Geben Sie Matrix [A] und Matrix [B] wie beschrieben in den Rechner ein.

Sie verlassen den Matrixeditor mit (2nd) [QUIT].

Führen Sie die Berechnungen mit Matrizen auf dem Normalbildschirm aus, wobei Sie die Namen der Matrizen aus dem Matrixeditor wählen.

j-30

##-Beispiel 2.9: Berechnen einer Matrix (B)

A ='mat

([1; 2]

[3; 4])

B ='mat

([5; 6]

[7; 8])

-----

a) Berechnen Sie:

3 \*A -2 \*B ='mat

([-7; -6]

[-5; -4])

-----

b) Berechnen Sie die Matrix X:

A -B +X =E

'mat

([1 -5 +x\_(11); 2 -6 +x\_(12)]

[3 -7 +x\_(21); 4 -8 +x\_(22)]) =

='mat

([-4 +x\_(11); -4 +x\_(12)]

[-4 +x\_(21); -4 +x\_(22)]) =

='mat

([1; 0]

[0; 1])

-----

x ='mat

([5; 4]

[4; 5]), weil 1 -5 +x\_(11) =1

x\_(11) =5 usw.

-----

X =E +B -A =

='mat

([5; 4]

[4; 5])

-----

Die Regel für die Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl ist umkehrbar:

Haben alle Elemente einer Matrix einen gemeinsamen Faktor, so kann dieser herausgehoben und vor die Matrix gestellt werden.

-----

##-Beispiel 2.10: Herausheben eines gemeinsamen Faktors bei einer Matrix (B)

'mat

([6; 3]

[9; 12]) =3 \*'mat

([2; 1]

[3; 4])

-----

'mat

([0,002; 0,00015]

[0,083; 0] ==10^(-3) \*'mat

([2; 0,15]

[83; 0])

-----

### \*\*-3 - 2.3.3 Multiplikation von Matrizen

Tipp: Das Multiplizieren von Matrizen ist eine Verallgemeinerung des Multiplizierens von Vektoren und wird beispielhaft Schritt für Schritt erklärt.

-----

##-Beispiel 2.11: Ermittlung von Rohstoffbedarf (A, B)

Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen R\_1 und R\_2 die Zwischenprodukte Z\_1 und Z\_2 und daraus die Endprodukte E\_1, E\_2 und E\_3 her.

Die Produktionsmengen für Zwischen- und Endprodukte sind im Folgenden dargestellt:

Ermitteln Sie den Rohstoffbedarf für die Produktion von je einem Stück von E\_1, E\_2 und E\_3.

Lesen Sie aus dem Gozintographen ab:

Zur Herstellung von einem Stück E\_3 benötigt man 5 Stück von Z\_3 und von Z\_2.

Zur Herstellung von einem Stück Z\_1 benötigt man 3 Stück von R\_3 und 4 Stück von R\_2.

-----

Berechnung des Bedarfes:

Für 1 Stück von E\_3 benötigt man 5 Stück der Zwischenprodukte Z\_3 und von Z\_2 usw.

E\_1 =5Z\_1 +Z\_2

E\_2 =3Z\_1 +1Z\_2

E\_3 =5Z\_1 +1Z\_2

Für 1 Stück Z\_3 benötigt man 3 Stück des Rohstoffs R\_1 und 4 Stück von R\_2 usw.

Z\_1 =3R\_1 +4R\_2

Z\_2 =6R\_1 +2R\_2

-----

Der Gozintograph beschreibt hier, welche Mengen man braucht, um je ein Stück eines Zwischenproduktes bzw. eines Endproduktes herzustellen.

j-31

##-Beispiel 2.11: Ermittlung von Rohstoffbedarf (Fortsetzung) (A, B)

Daraus folgt:

E\_1 =5 \*(3R\_1 +4R\_2) +3 \*(6R\_1 +2R\_2)

E\_1 =33R\_1 +26R\_2

Zur Produktion von einem Stück von Produkt E\_1 benötigt man somit 33 Stück R\_1 und 26 Stück R\_2.

-----

Analog gilt:

E\_2 =15R\_1 +14R\_2

E\_3 =21R\_1 +22R\_2

In der folgenden Tabelle sind die erforderlichen Rohstoffmengen je 1 Stück hergestellter Produkte zusammengestellt:

Rohst. | E\_1 | E\_2 | E\_3

R\_1 | 33 | 15 | 21

R\_2 | 26 | 14 | 22

Man kann die Berechnung der einzelnen Endprodukte E\_1, E\_2 und E\_3 auch als Produkt einer Matrix und eines Vektors schreiben und durchführen:

E\_1 ='mat

([3; 6]

[4; 2]) \*(5|3) ='mat

([3 \*5 +6 \*3]

[4 \*5 +2 \*3]) =(33|26)

-----

E\_2 ='mat

([3; 6]

[4; 2]) \*(3|1) ='mat

([3 \*3 +6 \*1]

[4 \*3 +2 \*1]) =(15|14)

-----

E\_3 ='mat

([3; 6]

[4; 2]) \*(5|1) ='mat

([3 \*5 +6 \*1]

[4 \*5 +2 \*1]) =(21|22)

-----

Der Rohstoffbedarf der einzelnen Endprodukte kann als Produkt von zwei Matrizen berechnet werden:

'mat

([3; 6]

[4; 2]) \*

'mat([5; 3; 5]

[3; 1; 1]) =

='mat

([33; 15; 21]

[26; 14; 22])

-----

|Schema von Falk zur Vereinfachung der Multiplikation von Matrizen|

Die erste Matrix A wird in das linke untere Rechteck und diezweite Matrix B in das rechte obere Rechteck eingetragen.

In das rechte untere Rechteck werden die Skalarprodukte geschrieben: A \*B

Falk-Schema

... | ... | ... | E\_1

... | ... | Z\_1 | 5

... | Z\_1 | Z\_2 | 3

R\_1 | 3 | 6 | 33 =3 \*5 +6 \*3

R\_2 | 4 | 2 | 26 =4 \*5 +2 \*3

-----

... | ... | ... | E\_2

... | ... | Z\_1 | 3

... | Z\_1 | Z\_2 | 1

R\_1 | 3 | 6 | 15 =3 \*3 +6 \*1

R\_2 | 4 | 2 | 14 =4 \*3 +2 \*1

-----

... | ... | ... | E\_3

... | ... | Z\_1 | 5

... | Z\_1 | Z\_2 | 1

R\_1 | 3 | 6 | 21 =3 \*5 +6 \*1

R\_2 | 4 | 2 | 22 =4 \*5 +2 \*1

-----

Hinweis: Das Schema von Falk erleichtert das Multiplizieren von Matrizen.

A ='mat

([3; 6]

[4; 2])

-----

B ='mat

([5; 3; 5]

[3; 1; 1])

-----

Interpretation: Man benötigt z. B. 15 Stück von R\_1, um ein Stück von E\_2 herstellen zu können. Man benötigt 26 Stück von R\_2, um ein Stück von E\_1 herstellen zu können.

Aus dem Falk-Schema lassen sich die benötigten Rohstoffmengen für eine Mengeneinheit des Endproduktes direkt ablesen.

-----

##-Beispiel 2.12: Produktionskosten in einem Schichtbetrieb (A, B)

Ein Produktionsbetrieb erzeugt in den Hallen H\_1 und H\_2 in zwei Schichten S\_1 und S\_2 die Produkte A, B und C. Die Produktionshöhe in beiden Hallen je Schicht und die Produktionskosten in den zwei Schichten sind den folgenden Tabellen zu entnehmen: Kosten in beiden Schichten je ME in GE:

... | A | B | C

S\_1 | 3 | 4 | 5

S\_2 | 2 | 3 | 6

j-32

##-Beispiel 2.12: Produktionskosten in einem Schichtbetrieb (Fortsetzung) (A, B)

Produktion in beiden Hallen je Schicht in ME:

... | H\_1 | H\_2

A | 4 | 5

B | 2 | 3

C | 3 | 6

-----

Berechnen Sie die Produktionskosten je Schicht für die beiden Hallen.

Zur Lösung der Aufgabe ist also die Kostenmatrix

'mat

([3; 4; 5]

[2; 3; 6]) mit der Produktionsmatrix

'mat

([4; 5]

[2; 3]

[3; 6]) zu multiplizieren.

Mit dem Schema von Falk ergibt sich:

... | ... | ... | ... | H\_1 | H\_2

... | ... | ... | A | 4 | 5

... | ... | ... | B | 2 | 3

... | A | B | C | 3 | 6

S\_1 | 3 | 4 | 5 | 35 | 57

S\_2 | 2 | 3 | 6 | 32 | 55

-----

Interpretation der Produktmatrix:

Die Produktionskosten betragen in der Halle 1 in der Schicht S1 35 GE und in der Schicht S\_2 32 GE.

Die Produktionskosten betragen in der Halle 2 in der Schicht S1 57 GE und in der Schicht S\_2 55 GE.

-----

Diese Beispiele zeigen, dass die Multiplikation von Matrizen nur dann durchführbar ist, wenn die Anzahl der Spalten der links stehenden Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der rechts stehenden Matrix ist.

|Definition: Multiplikation von Matrizen|

Seien A und B Matrizen, wobei die Zahl der Spalten der Matrix A gleich der Zahl der Zeilen der Matrix B ist.

Ist A eine m 'x p-Matrix und B eine p 'x n-Matrix, dann ist A \*B eine m 'x n-Matrix.

'mat

([a\_(11); a\_(12); ...; a\_(1p)]

[a\_(21); a\_(22); ...; a\_(2p)]

[...; ...; ...; ...]

[a\_(m1); a\_(m2); ...; a\_(mp)]) \*'mat

([b\_(11); b\_(12); ...; b\_(1n)]

[b\_(21); b\_(22); ...; b\_(2n)]

[...; ...; ...; ...]

[b\_(p1); c\_(p2); ...; c\_(pn)]) =

='mat

([c\_(11); a\_(12); ...; c\_(1n)]

[c\_(21); c\_(22); ...; c\_(2n)]

[...; ...; ...; ...]

[c\_(m1); c\_(m2); ...; c\_(mn)])

-----

Dabei gilt z. B.:

c\_(11) =a\_(11) \*b\_(11) +a\_(12) \*b\_(21) +... +a\_(1p) \*b\_(p1) ='Si[k =1;p](a\_(1k) \*b\_(ki))

c\_(ij) =a\_(i1) \*b\_(1j) +a\_(i2) \*b\_(2j) +...+a\_(ip) \*b\_(pj)

Zeilenvektor der Linksmatrix mal Spaltenvektor der Rechtsmatrix

-----

Skalarprodukt:

(a\_1, a\_2, ..., a\_n) \*'mat(b\_1|b\_2|...|b\_n) ='Si[i =1;n](a\_i \*b\_i)

-----

Hinweis: Vereinfachte Rechenregel für das Multiplizieren von Matrizen:

Zeilen links mal Spalten rechts.

-----

Hinweis: Das Kommutativgesetz der Multiplikation gilt für Matrizen im Allgemeinen nicht.

A \*B \=B \*A

-----

|Eigenschaften der Matrizenmultiplikation|

Assoziativgesetz: (A \*B) \*C =A \*(B \*C) =A \*B \*C

Distributivgesetz: A \*(B +C) =A \*B +A \*C

Achten Sie auf die Reihenfolge der Faktoren!

Multiplikation mit Einheitsmatrix: A \*E =E \*A =A

j-33

##-Beispiel 2.13: Multiplikation von zwei Matrizen (B, D)

a) 'mat

([1; 2]

[3; 4]) \*'mat

([1; 1]

[0; 2]) =

='mat

([1 \*1 +2 \*0; 1 \*1 +2 \*2]

[3 \*1 +4 \*0; 3 \*1 +4 \*2]) =

='mat

([1; 5]

[3; 11])

zu a) 2 'x 2 mal 2 'x 2 ergibt 2 'x 2

-----

b) 'mat

([4; 1]

[2; 5]

[6; 0]

[2; 8]) \*'mat

([2; 1; 3]

[5; 1; 0]) =

='mat

([4 \*2 +1 \*5; 4 \*1 +1 \*1; 4 \*3 +1 \*0]

[2 \*2 +5 \*5; 2 \*1 +5 \*1; 2 \*3 +5 \*0]

[6 \*2 +0 \*5; 6 \*1 +0 \*1; 6 \*3 +0 \*0]

[2 \*2 +8 \*5; 2 \*1 +8 \*1; 2 \*3 +8 \*0]) =

='mat

([13; 5; 12]

[29; 7; 6]

[12; 6; 18]

[44; 10; 6])

zu c) 4 'x 2 mal 2 'x 3 ergibt 4 'x 3

-----

d) A ='mat

([1; 0; -2]

[3; 5; 1]

[2; -1; 0])

B ='mat

([4; 3]

[1; -1]

[0; 1])

-----

Überprüfen Sie das Gesetz (A \*B)^T =B^T \*A^T mithilfe der gegebenen Matrizen.

A \*B ='mat

([4; 1]

[17; 5]

[7; 7])

(A \*B)^T ='mat

([4; 17; 7]

[1; 5; 7])

-----

B^T \*A^T ='mat

([4; 1; 0]

[3; -1; 1]) \*'mat

([1; 3; 2]

[0; 5; -1]

[-2; 1; 0]) =

='mat

([4; 17; 7]

[1; 5; 7])

-----

Das Tabellenkalkulationsprogramm Excel bietet auch die Möglichkeit, mit Matrizen zu rechnen. Diese Möglichkeit kann viele aufwändige Rechenvorgänge sehr vereinfachen. Vorweg sei hier erwähnt, dass bei Matrixoperationen die einfache Bestätigung mit "OK", "ENDE" oder "ENTER" nicht zum gewünschten Ziel führt.

-----

* Bei Matrixoperationen ist zunächst der Bereich zu markieren, in dem das Ergebnis stehen soll.
* Danach ist (mithilfe des Funktionsassistenten) die Matrixoperation einzugeben.
* Den Abschluss bildet dann die Bestätigung der Matrixoperation mit der Tastenkombination STRG +UMSCHALT +ENTER.

-----

##-Beispiel 2.14: Multiplikation von zwei Matrizen (B, D)

Berechnen Sie das Produkt A \*B mit

A ='mat

([5; 3]

[9; 7]

[4; 11]) und

B ='mat

([4; 2; 1]

[0; 5; 3])

Geben Sie die beiden Matrizen in entsprechende Excel-Bereiche ein.

Tipp: Schreiben Sie die Matrizen analog dem besprochenen Falk-Schema.

Markieren Sie dann den Bereich, in dem die Produktmatrix stehen soll.

Die Größe der Produktmatrix ist genau zu beachten.

Matrix A

5 | 3

9 | 7

4 | 11

-----

Matrix B

4 | 2 | 1

0 | 5 | 3

-----

Rufen Sie den Funktionsassistenten f^x auf und wählen Sie aus der Kategorie MATH. & TRIGONOM. die Funktion MMULT.

-----

Geben Sie im folgenden Fenster nacheinander die Bereiche an, in denen die beiden Matrizen stehen (einfach markieren).

j-34

##-Beispiel 2.14: Multiplikation von zwei Matrizen (Fortsetzung) (B, D)

Achtung:. Beenden Sie die Rechenanweisung mit STRG UMSCHALT ENTER!

Im zuvor markierten Bereich finden Sie jetzt die Produktmatrix.

Matrix A

5 | 3

9 | 7

4 | 11

-----

Matrix B

4 | 2 | 1

0 | 5 | 3

20 | 25 | 14

36 | 53 | 30

16 | 63 | 37

-----

### \*\*-3 - 2.3.4 Inverse Matrix

Neben der Matrizenmultiplikation ist die Berechnung der inversen Matrix von besonderer Bedeutung, da sie zur Lösung von Matrizengleichungen und den damit zusammenhängenden technischen und ökonomischen Problemen benötigt wird.

Von Bedeutung ist die inverse Matrix auch bei der Lösung von Gleichungssystemen.

-----

Verknüpfen:

Die inverse Matrix kann man zum Lösen von linearen Gleichungssystemen verwenden.

-----

Im Allgemeinen gilt: A \*B \=B \*A

Für die inverse Matrix gilt: A \*A^(-1) =A^(-1) \*A =E

-----

|Definition: Inverse Matrix|

Die zu einer gegebenen quadratischen Matrix A gehörige inverse Matrix A^(-1) ist eine quadratische Matrix, für die gilt:

A \*A^(-1) =A^(-1) \*A =E

-----

Man beachte, dass sich eine inverse Matrix nur zu einer quadratischen Matrix bilden lässt. Die Berechnung einer inversen Matrix ohne technische Hilfsmittel ist sehr rechen intensiv. Anhand eines einfachen Beispiels wird eine mögliche Vorgangsweise erklärt.

-----

Hinweis: Im Allgemeinen ist diese Methode der Berechnung der inversen Matrix mühsam.

Mit Technologieunterstützung reduziert sich die Berechnung der inversen Matrix auf einen Knopfdruck.

-----

##-Beispiel 2.15: Inverse Matrix (B)

Bilden Sie die inverse Matrix zu

A ='mat

([3; 4]

[7; 9]),

d. h., gesucht ist

A^(-1) ='mat

([b\_(11); b\_(12)]

[b\_(21); b\_(22)]), sodass gilt

A \*A^(-1) =E ='mat

([1; 0]

[0; 1]).

Soll das Produkt A \*A^(-1) =E sein, so müssen folgende Bedingungsgleichungen erfüllt werden:

3b\_(11) +4b\_(21) =1

7b\_(11) +9b\_(21) =0

b\_(11) =-9 'u b\_(21) =7

-----

3b\_(12) +4b\_(22) =0

7b\_(12) +9b\_(22) =1

b\_(12) =4 'u b\_(22) =-3

-----

A^(-1) ='mat

([-9; 4]

[7; -3])

-----

Probe:

'mat

([3; 4]

[7; 9]) =A

-----

A^(-1) ='mat

([-9; 4]

[7; -3]) 'mat

([1; 0]

[0; 1]) =E

-----

Probe:

'mat

([-9; 4]

[7; -3]) =A^(-1)

-----

A ='mat

([3; 4]

[7; 9]) 'mat

([1; 0]

[0; 1]) =E

-----

Sie erhalten:

'mat

([b\_(11); b\_(12)]

[b\_(21); b\_(22)]) =A^(-1)

-----

A ='mat

([3; 4]

[7; 9]) 'mat

([1; 0]

[0; 1]) =E

-----

##-Beispiel 2.16: Inverse Matrix mithilfe von EXCEL berechnen (B)

Berechnen Sie die inverse Matrix A^(-1) zur Matrix A mit

A ='mat

([1; 0; 2]

[2; -1; 3]

[4; 1; 8])

Geben Sie zunächst die Elemente der gegebenen 3 'x 3-Matrix in geeigneter Form in Excel ein.

Markieren Sie dann den (3 'x 3)-Zielbereich und rufen Sie den Funktionsassistenten f^x auf.

j-35

##-Beispiel 2.16: Inverse Matrix mithilfe von EXCEL berechnen (Fortsetzung) (B)

Matrix A

1 | 0 | 2

2 | -1 | 3

4 | 1 | 8

-----

Mit der Rechenanweisung STRC +UMSCHALT +ENTER erhalten Sie die inverse Matrix. Im vorher markierten Bereich steht jetzt die inverse Matrix A^(-1).

-----

Die Funktion MINV für eine inverse Matrix findet man in der Kategorie MATH. & TRIGONOM.

Im nächsten Fenster geben Sie den Bereich der zu invertierenden Matrix ein (einfach markieren).

Matrix A

1 | 0 | 2

2 | -1 | 3

4 | 1 | 8

-----

inverse Matrix

-11 | 2 | 2

-4 | 0 | 1

6 | -1 | -1

-----

##-Beispiel 2.17: Inverse Matrix mithilfe eines GTR (B)

Ermitteln Sie die inverse Matrix A^(-1) zur Matrix

A ='mat

([1; 0; 2]

[2; -1; 3]

[4; 1; 8]).

Geben Sie zunächst die gegebene Matrix ein.

Verlassen Sie danach das Matrix-EDIT-Menü mit (2nd) [QUIT].

Wählen Sie danach die zu invertierende Matrix [A].

In der Anzeige steht jetzt [A].

Wenn Sie jetzt (x^(-1)) ENTER eingeben, erhalten Sie die inverse Matrix.

(Anmerkung: Nicht [A]^(-1) verwenden.)

A^(-1) ='mat

([-11; 2; 2]

[-4; 0; 1]

[6; -1; -1])

-----

Hinweis:

-1.2E -13 =-1,2 \*10^(-13) ~~0

Der Ausdruck -1.2E-13 kommt durch rechnerinternes Runden zustande.

j-36

#### \*\*-4 - Übungsaufgaben

2.006.)

A, C

Stellen Sie folgenden Gozintographen

R\_1 -> 2 -> E\_1

R\_1 -> 3 -> E\_2

-----

R\_2 -> 1 -> E\_1

R\_2 -> 2 -> E\_2

-----

R\_3 -> 4 -> E\_1

R\_3 -> 2 -> E\_2

-----

a) in einer Tabelle und

b) in einer Matrix dar.

c) Interpretieren Sie die dargestellten Leistungsverflechtungen für die beiden Endprodukte.

-----

2.007.)

A

Erstellen Sie aus den Angaben der Tabelle einen Gozintographen, der den Rohstoffbedarf für die vier Endprodukte darstellt.

...| E\_1 | E\_2 | E\_3 | E\_4

R\_1 | 5 | 6 | 2 | 3

R\_2 | 8 | 4 | 7 | 2

-----

2.008.)

A, C

Folgende Matrix zeigt den Bedarf an drei Rohstoffen R\_1, R\_2 und R\_3, der für zwei Endprodukte E\_3 und benötigt wird:

A ='mat

([4; 2]

[3; 6]

[1; 8])

a) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 4 in der Matrix.

-----

b) Stellen Sie den Rohstoffbedarf durch einen Gozintographen dar.

-----

2.009.)

A, B

Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen R\_1, R\_2 und R\_3 die Zwischenprodukte Z\_1, Z\_2 und Z\_3 und daraus die Endprodukte E\_3 und E\_2 her.

-----

a) Erstellen Sie die Matrix, die den Rohstoffbedarf für die Produktion der Zwischenprodukte angibt.

-----

b) Erstellen Sie die Matrix, die den Bedarf an Zwischenprodukten für die beiden Endprodukte angibt.

-----

c) Berechnen Sie eine Matrix, die den Rohstoffbedarf für die Produktion der Endprodukte angibt.

-----

2.010.)

B

'mat

([-6; 7; 0]

[1; 0; 1]) +'mat

([5; -8; 2]

[-3; 1; 4]) +'mat

([2; 1; -2]

[3; -5; -6]) =**[]**

-----

2.011.)

B

6 \*'mat

([3; -2]

[7; -5]) +9 \*'mat

([-2; 1]

[-5; 4]) \*'mat

([1; 0]

[0; 1]) =**[]**

-----

2.012.)

B

a) 'mat

([-6; 2; -7]

[0; 1; 0]) \*(2|1|2) =**[]**

-----

b) 'mat

([3; 1]

[8; -2]

[0; 1]) \*'mat

([-1; 2; 0; 2]

[0; 4; 3; 1]) =**[]**

-----

c) 'mat

([1; -5; 2]

[0; 3; -2]

[-3; 1; -4]) \*(x|x|z) =**[]**

-----

d)'mat

([2; 3; 0; 1]

[-3; 7; 2; 0]

[1; 1; 0; -1]

[5; 7; 1; -3]) \*(x\_1|x\_2|x\_3|x\_4|) =**[]**

-----

Hinweis: Schreiben Sie bei jeder Matrizenmultiplikation die Zeilen- und Spaltenzahl der verwendeten Matrizen an:

m 'x p mal p 'x n ergibt m 'x n

j-37

2.013.)

B

A ='mat

([1; 2]

[-2; 3])

-----

B ='mat

([0; 3]

[1; 4])

-----

C ='mat

([-2; 1]

[2; -3])

-----

Berechnen Sie:

a) A +B

b) B -A

c) B \*C

d) C \*B

-----

2.014.)

B, D

Gegeben sind die Matrizen

A ='mat

([1; 2]

[3; 4]) und

B ='mat

([2; -1]

[1; 0]) und der Vektor

'vx =(3|2).

-----

Führen Sie folgende Rechnungen durch:

a) 3 \*A +2 \*B

b) (A +B) \*'vx

c) A \*'vx +B \*'vx

d) Begründen Sie, warum die Lösungen in b) und c) gleich sind.

-----

2.015.)

B

B ='mat

([1; 4]

[3; 2]

[-1; 0])

Ermitteln Sie die transponierte Matrix B^T und die Produkte B \*B^T und B^T \*B.

-----

2.016.)

B, D

Überprüfen Sie mit den Matrizen aus Beispiel 2.014 die Aussage:

A^T \*B^T =(B \*A)^T

-----

2.017.)

B, C

A ='mat

([2; 0]

[1; 1]

[3; 0])

-----

B ='mat

([3; 1]

[1; 2]

[1; 2])

-----

Berechnen Sie

a) A^T \*B und B \*A^T.

b) A \*B^T und B^T \*A.

Vergleichen Sie die Ergebnisse.

-----

2.018.)

B, C

A ='mat

([1; -3; 2]

[3; -4; 1]

[2; -5; 3])

-----

B ='mat

([2; 5; 6]

[1; 2; 5]

[1; 3; 2])

a) Vergleichen Sie die Produkte A \*B und B \*A.

b) Vergleichen Sie A^T \*B mit B^T \*A.

-----

2.019.)

A, B

Bei einer Prüfung wurden insgesamt fünf Aufgaben gestellt, deren richtige Lösungen unterschiedlich bewertet wurden. Vier Studentengruppen (mit je 40 Studenten) erzielten folgende Punktezahlen:

Abkürzung für die folgende Tabelle:

Nr. - Nr. der Aufgaben und Zahl der Studenten mit richtiger Lösung

A - Aufgabe

Punktz. - Punktezahl bei den Aufgaben

Nr | A 1 | A 2 | A 3 | A 4 | A 5

Gruppe A | 3 | 15 | 10 | 30 | 14

Gruppe B | 16 | 12 | 12 | 24 | 8

Gruppe C | 8 | 5 | 15 | 20 | 20

Gruppe D | 10 | 8 | 14 | 10 | 25

Punktz. | 3 | 2 | 1 | 2 | 3

-----

a) Stellen Sie die Berechnung der Gesamtpunktezahl als Matrizenmultiplikation dar.

Berechnen Sie die Gesamtpunktezahl für jede Gruppe.

-----

b) Ermitteln Sie, welche Gruppe das beste Ergebnis erzielt hat.

-----

2.020.)

B

Ein Betrieb produziert Fenster, Türen und Schränke. In der Tabelle ist der Produktionsplan für das erste und das zweite Halbjahr 2012 angegeben.

... | Fenster | Türen | Schränke

1. Halbjahr | 20 | 0 | 30

2. Halbjahr | 30 | 10 | 20

-----

Zur Produktion der geplanten Absatzmengen werden vier Rohstoffe benötigt. Der mengenmäßige Verbrauch an Rohstoffen je produzierter Einheit der drei Güter ist in folgender Tabelle gegeben:

... | Fenster | Türen | Schränke

Liter Farbe | 2 | 0 | 1

Glasscheiben | 3 | 1 | 0

Beschläge | 1 | 2 | 1

Schlösser | 0 | 1 | 0

j-38

Berechnen Sie die für die Produktion benötigten Rohstoffe in jedem Halbjahr mithilfe einer Matrizenoperation.

Geben Sie das Ergebnis in Tabellenform an.

-----

2.021.)

A, B, D

Ein Tischlereibetrieb erhält von einem Produzenten für Fertigteilhäuser einen Zulieferauftrag. Zur Produktion der bestellten Fenster sind außer Holz noch Glasscheiben (Stück), Beschläge (Stück) und Farbe (Liter) notwendig.

Durch den dargestellten Gozintografen sind die Beziehungen in diesem zweistufigen Produktionsprozess definiert:

Rohstoffe -> Zwischenprodukte Fenstertyp -> Endprodukte Typ des Fertigteilhauses

Rohstoffe:

- Glasscheiben R\_1

- Beschläge R\_2

- Farbe (Liter) R\_3

-----

Zwischenprodukte Fenstertyp:

- Typ I Z\_1

- Typ II Z\_2

-----

Endprodukte Typ des Fertigteilhauses:

- "SMAL" E\_1

- "STANDARD" E\_2

- "LUXUS" E\_3

-----

a) Das Unternehmen möchte den Rohstoffbedarf ermitteln, der für die Produktion von je einer Mengeneinheit der Endprodukte E\_1, E\_2 bzw. E\_3 benötigt wird.

Erstellen Sie eine Matrix, die den Zusammenhang zwischen Rohstoffen und Endprodukten angibt. Verwenden Sie das Falk-Schema.

-----

b) Erklären Sie, wie man in einem Rechenschritt jene Rohstoffmengen (Glas, Beschläge, Farbe) ermitteln kann, die bereitgestellt werden müssen, damit 10

Einheiten vom Haus "Small" (E\_1), 3 Einheiten vom Haus "Standard" (E\_2) und 2 Einheiten vom Haustyp "Luxus" (E\_3) hergestellt werden können.

Geben Sie eine verbale Antwort.

-----

2.022.)

A, B, D

In einem Ort konkurrieren zwei Bio-Lebensmittelhändler um die Gunst der Kunden. Ein Preisvergleich ergab folgende Einzelpreise in Euro:

Abkürzungen für die nachfolgende Tabelle:

Preis - Preis pro Einheit

S - Semmel

B - Butter

Preis| 1 Sl | 1 Ei | 1 kg B | 1 kg Käse

Kaufmann A | 0,20 | 0,28 | 8,80 | 13,00

Kaufmann B | 0,18 | 0,29 | 8,40 | 16,00

-----

Zwei Kunden haben täglich folgenden Bedarf:

Abkürzungen für die nachfolgende Tabelle:

Mengen - Menge der gekauften Produkte pro Tag

Stk - Stück

S - Semmeln

B - Butter

Mengen | S Stk | Eier Stk | B kg | Käse kg

Kunde Mayer | 6 | 6 | 0,25 | 0,3

Kunde Huber | 10 | 3 | 0,50 | 0,1

-----

a) Übertragen Sie die beiden Tabellen in zwei Matrizen.

-----

b) Berechnen Sie unter der Voraussetzung, dass alle Waren bei einem Händler gekauft werden, welcher Kunde bei welchem Händler am billigsten kauft.

Führen Sie die Rechnung in Matrixform aus und achten Sie auf die richtige Verkettung. Geben Sie das Ergebnis als Matrix an.

Wo sollte Kunde Huber einkaufen?

Wo sollte Kunde Mayer einkaufen?

Begründen Sie Ihre Antworten.

j-39

2.023.)

A, B, C

Der gegebene Gozintograph stellt die Verflechtung zwischen Rohstoffen, Zwischenprodukten und Endprodukten dar.

Rohstoffe R\_1, R\_2 -> Zwischenprodukte Z\_1, Z\_2, Z\_3 -> E\_1, E\_2, E\_3

a) Übertragen Sie den im Gozintographen dargestellten Zusammenhang zwischen Rohstoffen, Zwischenprodukten und Endprodukten in zwei Matrizen.

-----

b) Berechnen Sie mithilfe der Matrizen aus a) eine Matrix, die den Zusammenhang zwischen Rohstoffen und Endprodukten angibt.

Lesen Sie aus dieser Matrix ab, wie viele Einheiten R\_1 für eine Einheit E\_1 benötigt werden.

-----

c) Interpretieren Sie das Ergebnis der Produktmatrix in Worten.

-----

d) Berechnen Sie, welche Rohstoffmengen bereitgestellt werden müssen, wenn daraus 3 Einheiten von E\_1, 5 Einheiten von E\_2 und 10 Einheiten von E\_3 hergestellt werden sollen.

-----

## \*\*-2 - 2.4 Lösung linearer Gleichungssysteme mit Matrizen

In diesem Kapitel lernen Sie, wie man lineare Gleichungssysteme mit Technologieunterstützung und mithilfe von Matrizen löst. Das mühsame rechnerische Lösen, besonders bei einer größeren Anzahl von Gleichungen, fällt dann weg.

-----

##-Beispiel 2.18: Lineare Gleichungssysteme mit Matrizen lösen (B)

Lösen Sie das Gleichungssystem:

(1) 2x +6y +z =-4

(2) 3x -2y +2z =5

(3) -x +3y -z =-4

-----

A ='mat

([2; 6; 1]

[3; -2; 2]

[-1; 3; -1])

-----

'vx =(x|y|z)

-----

'vb =(-4|5|-4)

-----

Bilden Sie A \*'vx:

A \*'vx ='mat

([2; 6; 1]

[3; -2; 2]

[-1; 3; -1]) \*(x|y|z) =

='mat

([2x +6y +z]

[3x -2y +2z]

[-x +3y -z])

Der Matrizengleichung A \*'vx ='vb entspricht somit das Gleichungssystem:

'mat

([2; 6; 1]

[3; -2; 2]

[-1; 3; -1]) \*(x|y|z) =(-4|5|-4)

oder

2x +6y +z =-4

3x -2y +2z =5

-x +3y -z =-4

-----

Hat die Koeffizientenmatrix eine inverse Matrix, so folgt aus A \*'vx ='vb durch Multiplikation mit A^(-1) von links:

A^(-1) \*A \*'vx =A^(-1) \*'vb

E \*'vx =A^(-1) \*'vb

'vx =A^(-1) -'vb

-----

(x|y|z) ='mat

([-0,8; 1,8; 2,8]

[0,2; -0,2; -0,2]

[1,4; -2,4; -4,4]) \*(-4|5|-4) =(1|-1|0) d. h., x =1, y =-1 und z =0.

L ={(1|-1|0)}

-----

Bezeichnen Sie

* mit A die Matrix aus den Koeffizienten des Gleichungssystems,
* mit 'vx den gesuchten Lösungsvektor und
* mit 'vb den Vektor der rechten Gleichungsseite.

j-40

|Lösung eines Gleichungssystems mit inverser Matrix|

Ist A invertierbar, dann hat das Gleichungssystem A \*'vx ='vb die Lösung 'vx

=A^(-1) \*'vb.

-----

##-Beispiel 2.19: Lineares Gleichungssystem mit Excel (B)

Berechnen Sie mit Excel die Lösungsmenge für:

(1) 2x +6y +z =-4

(2) 3x -2y +2z =5

(3) -x +3y -z =-4

-----

Geben Sie zunächst die Koeffizientenmatrix A und den Vektor 'vb ein.

Berechnen Sie die inverse Matrix von A.

Markieren Sie dann den Bereich, in dem der Lösungsvektor stehen soll.

Multiplizieren Sie dann die inverse Matrix A^(-1) mit dem Vektor 'vb.

Im zuvor markierten Bereich erhalten Sie den Lösungsvektor und damit die Lösungsmenge

L ={(1|-1|0)}.

-----

Hinweis: Ist die Koeffizientenmatrix nicht invertierbar, erhält man eine Fehlermeldung.

-----

3.55E-15 =3,55 \*10^(-15) ~~0

Eine weitere Möglichkeit, die Lösungsmenge von Gleichungssystemen zu berechnen, bietet der GTR mit dem Befehl rref(.

Anhand eines einfachen Beispiels wird die Wirkung dieses Befehls veranschaulicht.

-----

##-Beispiel 2.20: Lineares Gleichungssystem mit 2 Variablen (B)

Berechnen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems:

(1) -x +y =-3

(2) 4x +y =2

-----

Durch Anwendung von Äquivalenzumformungen (Gaußverfahren) entstehen äquivalente Gleichungssysteme.

-1x +1y =-3 | I

4x +1y =2 | II

'mat

([-1; 1; -3]

[4; 1; 2])

-----

1x -1y =3 | I\_(neu) =I\_(alt) \*(-1)

0 +5y =-10 | II\_(neu) =II\_(alt) +(-4) \*I\_(neu)

'mat([1; -1; 3]

[0; 5; -10])

-----

1x +0 =1 | I\_(neu) =I\_(alt) +(1) \*II\_(neu)

0 +1y =-2 | II\_(neu) =\_(alt) \*(1/5)

'mat

([1; 0; 1]

[0; 1; -2])

-----

Die Lösungsmenge ist: L ={(1|-2)}

Dem letzten Gleichungssystem

1x +0 =1

0 +1y =-2

entspricht somit die erweiterte Matrix:

'mat

([1; 0; 1]

[0; 1; -2])

-----

Tipp: Lösen eines Gleichungssystems mit der zugehörigen reduzierten, zeilengestaffelten Matrix.

j-41

Die Äquivalenzumformungen des Gaußverfahrens werden auf die Matrizenrechnung übertragen. Das Ergebnis heißt reduzierte zeilengestaffelte Matrix (reduced row echelon form), aus der sich die Lösung eines linearen Gleichungssystems ablesen lässt.

Der Befehl rref des GTR berechnet aus einer gegebenen erweiterten Matrix die reduced row echelon form, aus der man dann die Lösungsmenge des Gleichungssystems abliest.

-----

##-Beispiel 2.21: Lineares Gleichungssystem - Befehl rref - 2 Variable (B)

Berechnen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems mit dem GTR:

(1) -x +y =-3

(2) 4x +y =2

-----

erweiterte Matrix:

'mat

([-1; 1; -3]

[4; 1; 2])

Geben Sie die erweiterte Matrix [A] ein.

Verlassen Sie danach das MATRIX-EDIT-Menü mit (2nd) [QUIT].

Wählen Sie aus dem MATRIX-MATH-Menü den Befehl B:rref(. [ENTESR]

In der Anzeige steht jetzt rref(.

Wählen Sie danach Matrix [A].

In der Anzeige steht jetzt rref([A]. Nach einem weiteren [ENTER] erhalten Sie die gewünschte Matrix, aus der wir die Lösung des Gleichungssystems ablesen können.

Mit [MATH]; 1:Frac [ENTER] kommen Sie zur Bruchdarstellung der Matrixelemente. Aus der reduzierten zeilengestaffelten Matrix

'mat

([1; 0; 1]

[0; 1; -2]) ergibt sich die Lösungsmenge L ={(1|-2)}.

-----

##-Beispiel 2.22: Lineares Gleichungssystem - Befehl rref - 3 Variable (B)

Berechnen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems:

(1) 2x\_1 +2x\_2 +x\_3 =20

(2) x\_1 +2x\_2 +3x\_3 =30

(3) 3x\_1 +2x\_2 +2x\_3 =28

-----

erweiterte Matrix:

'mat

([2; 2; 1; 20]

[1; 2; 3; 30]

[3; 2; 2; 28])

Geben Sie die erweiterte Matrix in [A] ein und führen Sie die oben besprochenen Schritte aus.

Aus der reduzierten zeilengestaffelten Matrix

'mat

([1; 0; 0; 2]

[0; 1; 0; 5]

[0; 0; 1; 6]) ergibt sich die Lösungsmenge

L ={(2|5|6)}.

-----

Hinweis: Aus Platzgründen können im Eingabefenster nicht alle Elemente der Matrix gleichzeitig im Sichtfeld dargestellt werden.

-----

##-Beispiel 2.23: Sonderfall 1: Unendlich viele Lösungen (B)

Berechnen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems:

(1) 3x\_1 +x\_2 =6

(2) 6x\_1 +2x\_2 =12

-----

erweiterte Matrix:

'mat

([3; 1; 6]

[6; 2; 12])

Geben Sie die erweiterte Matrix in [A] ein und führen die weiteren besprochenen Schritte aus.

Mit [MATH]; 1:Frac [ENTER] Verhalten wir wieder die Bruchdarstellung.

Aus der letzten Zeile der reduzierten zeilengestaffelten Matrix

'mat

([1; 1/3; 2]

[0; 0; 0]) erkennt man hier einen Spezialfall der Lösung.

Die zweite Zeile der Matrix ergibt die Gleichung 0 \*x\_1 +0 \*x\_2 =0, die für alle geordneten Zahlenpaare des 'R 'x 'R erfüllt ist.

Daraus folgt, dass die Lösungsmenge allein durch die Gleichung x\_1 +1/3 x\_2 =2 definiert ist. Das heißt x\_2 =-3x\_1 +6.

Für die Lösungsmenge gilt somit: L ={(x\_1|x\_2) | 3x\_1 +x\_2 =6}

Grafisch sind die Geraden, die durch die beiden gegebenen Gleichungen bestimmt sind, identisch. Es gibt unendlich viele Elemente in der Lösungsmenge.

j-42

##-Beispiel 2.24: Sonderfall 2: Keine Lösung (B)

Berechnen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems:

(1) 2x\_1 +3x\_2 =6

(2) 4x\_1 +6x\_2 =24

-----

erweiterte Matrix:

'mat

([2; 3; 6]

[4; 6; 24])

Geben Sie die erweiterte Matrix in [A] ein.

Führen Sie die weiteren besprochenen Schritte aus.

Aus der letzten Zeile der reduzierten zeilengestaffelten Matrix

'mat

([1; 3/2; 0]

[0; 0; 1]) erkennt man auch hier einen Spezialfall der Lösung.

Aus der zweiten Zeile der Matrix erhalten Sie die Gleichung 0 \*x\_1 +0 \*x\_2 =1.

Es gibt keine reellen Zahlenpaare, die diese Gleichung erfüllen. Somit hat dieses Gleichungssystem keine Lösung. L ={}

Grafisch sind die beiden durch die Gleichungen bestimmten Geraden parallel und haben somit keinen Schnittpunkt.

-----

##-Beispiel 2.25: Produktionsverflechtung (Leontief-Modell) (A, B, C)

Eine Volkswirtschaft besteht vereinfacht aus den drei Sektoren Ackerbau (A), Viehzucht (V) und Industrie (I). Die drei Sektoren sind produktionstechnisch miteinander verflochten:

Sie decken ihren eigenen Bedarf und beliefern einander. Außerdem soll für die Nachfrage auf dem Markt produziert werden.

Die Verflechtung der drei Sektoren ist in dem folgenden Gozintograph dargestellt:

A -> 0,2 -> V -> 0,4 -> V -> 0,1 -> I

A -> 0,2 -> V -> 0,4 -> V -> 0,1 -> A

A -> 0,4 -> A -> 0,3 -> I

I -> 0,2 -> V

-----

Die Verflechtung kann auch durch eine Tabelle oder durch eine (Produktions) Matrix A dargestellt werden, die angibt, wie viel von einem Sektor benötigt wird, um eine Einheit herzustellen:

Abkürzungen für die nachfolgende Tabelle:

A - Ackerbau

V - Viehzucht

I - Industrie

von / nach | A | V | I

Ackerbau | 0,4 | 0,2 | 0,31

Viehzucht | 0,1 | 0,4 | 0,1

Industrie | 0 | 0,2 | 0,7

-----

A ='mat

([0,4; 0,2; 0,3]

[0,1; 0,4; 0,1]

[0; 0,2; 0,7])

Interpretation der Angabe:

Der Wert 0,4 besagt, dass vom Ackerbau 0,4 ME benötigt werden, um 1 ME im Ackerbau herzustellen.

Der Wert 0,2 besagt, dass vom Ackerbau 0,2 ME benötigt werden, um 1 ME in der Viehzucht herzustellen.

Der Wert 0,3 besagt, dass vom Ackerbau 0,3 ME benötigt werden, um 1 ME in der Industrie herzustellen.

x\_1 produzierte ME vom Ackerbau

x\_2 produzierte ME von der Viehzucht

x\_3 produzierte ME von der Industrie

Der Ackerbau benötigt 0,4 x\_1 ME von sich selbst, die Viehzucht benötigt 0,2 x\_2 ME vom Ackerbau und die Industrie benötigt 0,3 x\_3 ME vom Ackerbau.

-----

Abb.: WASSILY LEONTIEF, 1905 BIS 1999, PROFESSOR FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN

-----

Tipp: Leontief entwickelte die Input-Output-Analyse, für deren Ausarbeitung und Anwendung bei wichtigen wirtschaftlichen Problemen er 1973 den Nobelpreis für Ökonomie erhielt.

j-43

##-Beispiel 2.25: (Fortsetzung)

Vom Ackerbau werden y\_1 ME für die Nachfrage außerhalb der drei Sektoren, den Markt, benötigt.

In einer geschlossenen Volkswirtschaft gilt:

Bedarf der Sektoren +Nachfrage des Marktes =Gesamtproduktion

Für den Ackerbau gilt: 0,4x\_1 +0,2x\_2 +0,3x\_3 +y\_1 =x\_1

Für die Viehzucht gilt: 0,1x\_1 +0,4x\_2 +0,1x\_3 +y\_2 =x\_2

Für die Industrie gilt: 0,2x\_2 +0,7x\_3 +y\_3 =x\_3

-----

In Matrixschreibweise erhält man folgende Gleichung:

'mat

([0,4; 0,2; 0,3]

[0,1; 0,4; 0,1]

[0; 0,2; 0,7]) \*(x\_1|x\_2|x\_3) +

+(y\_1|y\_2|y\_3) =(x\_1|x\_2|x\_3)

-----

In allgemeiner Matrizenschreibweise:

A \*'vx +'vy ='vx

wobei A die Produktionsmatrix, y der Marktvektor und x der Gesamtproduktionsvektor ist.

-----

Leontief-Modell:

A \*'vx +'vy ='vx

A Produktionsmatrix

'vx Gesamtproduktionsvektor

'vy Marktvektor

-----

Es stellen sich nun grundsätzlich zwei Fragen:

a) Welche Mengen 'vy können dem Markt überlassen werden, wenn ein Produktionsvektor 'vx vorgegeben ist?

-----

b) Welche Gesamtproduktion 'vx muss eingeplant werden, wenn die Nachfrage 'vy vorgegeben ist?

-----

a) Berechnen Sie, wie viele Mengeneinheiten an den Markt abgegeben werden können, wenn im Ackerbau 150 ME, in der Viehzucht 110 ME und in der Industrie 90 ME produziert werden können.

Um den Marktvektor 'vy ausrechnen zu können, muss die Gleichung nach 'vy umgeformt werden.

A \*'vx +'vy ='vx |-A \*'vx

'vy ='vx -A \*'vx

'vy =E \*'vx -A \*'vx |'vx herausheben

'vy =(E -A) \*'vx

-----

'vy =('mat

([1; 0; 0]

[0; 1; 0]

[0; 0; 1]) -'mat

([0,4; 0,2; 0,3]

[0,1; 0,4; 0,1]

[0; 0,2; 0,7])) \*(150|110|90) ='mat

([0,6; -0,2; -0,3]

[-0,1; 0,6; -0,1]

[0; -0,2; 0,3]) \*(150|110|90) =(41|42|5)

41 ME im Ackerbau, 42 ME in der Viehzucht und 5 ME in der industrie können mit den vorgegebenen Produktionszahlen an den Markt abgegeben werden.

-----

b) Berechnen Sie, wieviel produziert werden muss, damit je 60 ME im Ackerbau und in der Viehzucht an den Markt abgegeben werden können.

Die Gleichung, die Sie in a) umgeformt haben, muss noch nach 'vx aufgelöst werden. Dazu multiplizieren Sie die Gleichung von links mit (E -A)^(-1):

'vy =(E -A) \*'vx

(E -A)^(-1) \*'vy =(E -A)^(-1) \*(E -A) \*'vx

(E -A)^(-1) \*'vy ='vx

-----

x ='mat

([0,4; -0,2; -0,3]

[-0,1; 0,4; -0,1]

[0; -0,2; 0,3])) \*(60|60|0) =(200|150|100|)

Um die geforderten Mengeneinheiten an den Markt abgeben zu können, müssen 200 ME im Ackerbau, 150 ME in der Viehzucht und 100 ME in der Industrie produziert werden.

-----

E ist die 3 'x 3-Einheitsmatrix:

E ='mat

([1; 0; 0]

[0; 1; 0]

[0; 0; 1])

-----

j-44

#### \*\*-4 - Übungsaufgaben

2.024.)

B

Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichungssysteme mit dem Befehl rref und - wenn möglich - mithilfe der inversen Matrix.

a)

x -y =-3

y +z =2

2x +z =-4

-----

b)

3x +2y -z =9

x -y +2z =7

4x +y +z =16

-----

c)

3x\_1 +2x\_2 -3\_3 =5

x\_1 -x\_2 +2x\_3 +2x\_4 =-3

-x\_1 +4x\_2 +2x\_3 -4x\_4 =2

4x\_1 +2x\_3 -x\_4 =-2

-----

d)

3x\_1 +2x\_2 -3x\_3 =5

x\_1 -x\_2 +2x\_3 +2x\_4 =-3

-x\_1 +4x\_2 +2x\_3 -4x\_4 =2

3x\_2 +4x\_3 -2x\_4 =-1

-----

2.025.)

B, C, D

Interpretieren Sie die Ergebnismatrix in Hinblick auf die Anzahl der Lösungen. Begründen Sie Ihre Entscheidung und ermitteln Sie die Lösungsmenge.

a) rref(A) ='mat

([1; 0; 5]

[0; 1; 3])

-----

b) rref(A) ='mat

([1; 1,5; 0]

[0; 0; 1])

-----

c) rref(A) ='mat

([1; 1,5; 3]

[0; 0; 0])

-----

d) rref(A) ='mat

([1; 0; 0,6; 0]

[0; 1; -1,4; 0]

[0; 0; 0; 1])

-----

e) rref(A) ='mat

([1; 0; 0; 2]

[0; 1; 0; 3]

[0; 0; 1; 4])

-----

f) rref(A) ='mat

([1; 0; 0; 1]

[0; 1; 0; 2]

[0; 0; 1; -3])

-----

2.026.)

A, B, C

Aus zwei Rohstoffen A und B werden über die Zwischenprodukte C und D die Endprodukte E und F erzeugt.

A -> 2 -> C -> 4 -> E

A -> 2 -> C -> 3 -> F

A -> 4 -> D -> 5 -> E

A -> 4 -> D -> 4 -> E

-----

B -> 2 -> C -> 4 -> E

B -> 2 -> C -> 3 -> F

B -> 3 -> D -> 5 -> E

B -> 3 -> D -> 4 -> F

-----

a) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 5 im Gozintographen.

-----

b) Ermitteln Sie aus dem Gozintographen die Produktionsmatrizen und die Gesamtproduktionsmatrix.

-----

c) Berechnen Sie, wie viele Rohstoffeinheiten man für die Produktion von 150 ME von E und 200 ME von F bereitstellen muss.

-----

Hinweis: In GeoGebra erhält man die reduzierte zeilengestaffelte Form durch den Befehl Treppennormalform [Matrix].

-----

2.027.)

A, B, C

Der Gozintograph zeigt den Zusammenhang zwischen den beiden Rohstoffen R\_1 und R\_2, den drei Zwischenprodukten Z\_1, Z\_2 und Z\_3 sowie den beiden Endprodukten E\_1 und E\_2.

a) Erstellen Sie eine Matrix, die den Rohstoffbedarf für die Produktion der Zwischenprodukte angibt.

j-45

b) Erstellen Sie die Matrix, die den Bedarf an Zwischenprodukten für die beiden Endprodukte angibt.

-----

c) Stellen Sie den Rohstoffbedarf für die Produktion der Endprodukte in Matrixform dar.

Interpretieren Sie in dieser Matrix die Bedeutung der Elemente der ersten Zeile.

Interpretieren Sie in dieser Matrix die Summe der Elemente der ersten Zeile.

-----

d) Von jedem Endprodukt sollen 20 Stück produziert werden.

Berechnen Sie, welche Mengen an Zwischenprodukten dafür benötigt werden.

-----

2.028.)

A

In einer Werkstatt werden drei verschiedene Werkstücke W\_1, W\_2 und W\_3 hergestellt. Dazu werden aus vier verschiedenen Rohstoffen R\_1, R\_2, R\_3 und R\_4 drei Zwischenprodukte Z\_1, Z\_2 und Z\_3 gefertigt. Aus den drei Zwischenprodukten entstehen die drei Werkstücke. Den Materialbedarf in Mengeneinheiten (ME) zeigen folgende Tabellen:

... | Z\_1 | Z\_2 | Z\_3

R\_1 | 2 | 3 | 0

R\_2 | 2 | 1 | 1

R\_3 | 1 | 2 | 3

R\_4 | 0 | 2 | 0

-----

... | W\_1 | W\_2 | W\_3

Z\_1 | 2 | 2 | 3

Z\_2 | 2 | 3 | 1

Z\_3 | 1 | 0 | 1

-----

Erstellen Sie den dazugehörigen Gozintographen, der die gesamte Produktionsverflechtung beschreibt.

-----

2.029.)

A, B

Eine Modeabteilung stellt Badekleidung in vier Modellen Kreta (K), Mykonos (M), Rhodos (R) und Santorin (S) her. Zur Produktion werden die beiden Maschinen A und B durchlaufen. Die verschiedenen Produkte benötigen unterschiedliche Arbeitszeiten auf den Maschinen (in Minuten pro Stück), die in folgender Tabelle zusammengestellt sind:

... | K | M | R | S

A | 5 | 4 | 3 | 6

B | 4 | 3 | 6 | 2

-----

Von den Produkten K, M, R, und S werden 25, 30, 40 bzw. 50 Mengeneinheiten benötigt. Berechnen Sie, wie lange die Maschinen jeweils von den verschiedenen Produkten beansprucht werden.

-----

2.030.)

Die beiden Matrizen J\_1 und J\_2 stellen die Verkaufszahlen in 1000 Stück einer Firma für drei Produkte A, B und C in vier Regionen Nord, Ost, Süd und West dar.

J\_1 sind die Zahlen für das erste Produktionsjahr,

J\_2 sind die Zahlen für das zweite.

-----

J\_1 ='mat

([1,5; 1,8; 2,5; 0,9]

[3,0; 3,1; 2,5; 4,8]

[3,4; 3,6; 3,7; 2,5]),

-----

J\_2 ='mat

([3,2; 3,5; 3,0; 1,5]

[4,4; 5,0; 3,5; 3,7]

[3,9; 3,0; 4,5; 4,9])

-----

a) Ermitteln Sie, welches Produkt in welcher Region im ersten bzw. im zweiten Produktionsjahr am meisten produziert wurde.

Wie groß war diese Produktionsmenge?

-----

b) Berechnen Sie J\_1 +J\_2. Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Matrix.

-----

c) Interpretieren Sie die zweite Zeile der Summenmatrix J\_1 +J\_2.

-----

d) Berechnen Sie J\_2 -J\_1 und interpretieren Sie die Bedeutung dieser Matrix.

j-46

e) Interpretieren Sie die dritte Spalte der Differenzmatrix J\_2 -J\_1.

-----

f) Ausgehend vom Ergebnis des ersten Jahres soll eine Absatzsteigerung von 20 % in allen Produkten und allen Regionen für das zweite Jahr erzielt werden. Erstellen Sie eine Formel, die die Differenz zwischen den tatsächlich erreichten und den geplanten Verkaufszahlen angibt und berechnen Sie diese Differenz.

-----

2.031.)

A, B

Die voestalpine AG in Linz stellt Stahl her. Neben anderen Rohstoffen werden Eisenerz und Steinkohle benötigt. Der Bedarf dieser Mengen (in Tonnen) innerhalb von drei Wochen wird in folgender Tabelle aufgeschlüsselt.

... | Eisenerz | Steinkohle

1. Woche | 90 | 80

2. Woche | 70 | 70

3. Woche | 60 | 50

-----

Drei verschiedene Lieferanten können die Rohstoffe liefern (Preise in Euro pro Tonne).

Abkürzungen für die folgende Tabelle:

Energie - Energie GmbH

Eisen - Eisen und Co

Kohle - AG

... | Energie | Eisen | Kohle

Eisenerz | 135 | 130 | 125

Steinkohle | 235 | 240 | 242

-----

Berechnen Sie, welcher Lieferant der kostengünstigste ist.

-----

2.032.)

A, B

Ein Schiffsbauunternehmen bietet drei Yachttypen an: Adria, Karibik und Marmara. Die Yachten benötigen unter anderem unterschiedliche Mengen an Stahl, Holz, Glas, Isolation, Farbe und Arbeit, deren Zusammenstellung die folgende Tabelle in ME zeigt:

... | Stahl | Holz | Glas

Ardia | 5 | 25 | 12

Karibik | 9 | 16 | 18

Marmara | 8 | 14 | 10

-----

... | Isolation | Farbe | Arbeit

Ardia | 6 | 9 | 17

Karibik | 8 | 11 | 21

Marmara | 9 | 10 | 19

-----

a) Der Produktionsplan für das nächste halbe Jahr sieht die Herstellung von 8 Yachten Adria, 7 Yachten Karibik und 6 Yachten Marmara vor.

Berechnen Sie das dafür benötigte Rohmaterial.

-----

b) Bestimmen Sie den Wert der gesamten Produktionsfaktoren, wenn die Kosten für je eine Einheit Stahl 15 GE, Holz 8 GE, Glas 10 GE, Isolationsmaterial 6 GE, Farbe 7 GE und Arbeit 15 GE betragen.

-----

c) Berechnen Sie, was eine Yacht von jedem Typ kostet.

-----

d) Ermitteln Sie die Gesamtkosten für die nächste Produktionsperiode, wenn 8 Yachten Adria, 6 Yachten Karibik und 9 Yachten Marmara gebaut werden sollen, die Kosten aber generell um 9 % gestiegen sind.

-----

2.033.)

A, B, C

Die Wählerströme einer Stadt von einer ersten Wahl zu einer zweiten Wahl sind in folgendem Gozintographen für die vier Parteien A, B, C und D dargestellt.

------

Erklärungen:

Von den Wählern der Partei A der ersten Wahl haben bei der zweiten Wahl 30 % wieder A gewählt, 20 % haben B, 20 % haben C gewählt und 30 % haben sich für D entschieden.

0,3 +0,2 +0,2 +0,3 =1

j-47

a) Ergänzen Sie im Gozintographen den Wählerstrom innerhalb der eigenen Partei für die Parteien B, C und D.

-----

b) Erstellen Sie die Wählerstrommatrix für diesen Vorgang.

-----

c) Berechnen Sie, wie die Stimmen für die vier Parteien bei der ersten Wahl verteilt waren, wenn beim Ergebnis der zweiten Wahl die Verteilung 10800 Stimmen für A, 2800 für B, 10000 für C und 17400 für D ergab.

-----

d) Begründen Sie, warum sich nur eine Partei als Wahlsieger feiern lassen kann.

-----

2.034.)

A, B, C, D

In einer Firma für Naturkosmetik werden nach eigenem Rezept Pflegecremes hergestellt und verkauft. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel Gramm (g) von einigen wichtigen Zutaten jeweils in einer Pflegecremepackung enthalten ist:

Abkürzungen für die folgende Tabelle:

M - Mandelölcreme

R - Regenerationscreme

T - Thymiancreme

... | M | R | T

Bienenwachs | 10 | 5 | 10

Lanolin | 30 | 10 | 30

Mandelöl | 50 | 15 | 20

-----

a) Erstellen Sie einen passenden Gozintographen, der den Zusammenhang zwischen den Zutaten und den einzelnen Pflegecremes darstellt.

-----

b) Interpretieren Sie die Bedeutung der folgenden Berechnung.

'mat

([10; 5; 10]

[30; 10; 30]

[50; 15; 20]) \*(50|100|50) =(1500|4000|5000)

Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 4000 im Ergebnisvektor.

-----

c) Entscheiden Sie, ob für die Herstellung von je 35 Cremes der drei Sorten 1 kg Bienenwachs ausreicht.

-----

d) Die Naturkosmetikfirma hat 750 g Bienenwachs, 2 kg Lanolin und 2,35 kg Mandelöl zu den drei Produkten Mandelölcreme, Regenerationscreme und Thymiancreme verarbeitet.

Berechnen Sie, wie viele Packungen der einzelnen Cremes die Firma jeweils hergestellt hat.

-----

2.035.)

A, B

Leontief-Modell:

Eine Volkswirtschaft besteht aus den Zweigen Landwirtschaft, Industrie und Dienstleistungen. Die folgende Tabelle zeigt die Verflechtung der Zweige. Die Zahlen geben den Bedarf der Wirtschaftszweige pro Mengeneinheit (ME) an.

Abkürzungen für die folgende Tabelle:

L - Landwirtschaft

I - Industrie

D - Dienstleistungen

... | L | I | D

Landwirtschaft | 0,2 | 0,6 | 0,1

Industrie | 0,3 | 0,1 | 0,3

Dienstleistungen | 0 | 0,6 | 0,1

-----

a) Stellen Sie den Sachverhalt in einem Gozintographen dar.

-----

b) Berechnen Sie, wie viel ME jeweils an den Markt abgegeben werden können, wenn die Landwirtschaft 200 ME, die Industrie 150 ME und der Dienstleistungssektor 130 ME ihrer Produkte hersteilen.

-----

c) Berechnen Sie, wie viel ME von jedem Sektor produziert werden müssen, damit die Landwirtschaft und die Industrie jeweils 135 ME und der Dienstleistungssektor 45 ME am Marktabsetzen können.

j-48

#### \*\*-4 - Ziele erreicht?

Z 2.1.)

B, C, D

Gegeben sind folgende Matrizen:

A ='mat

([2; 0; 1]

[2; 4; -5]),

-----

B ='mat

([1; -5; 7]

[-3; 2; 1]),

-----

C ='mat

([2; 1]

[2; -1]) und

-----

D =(3|-2)

-----

a) Kreuzen Sie an, welche der folgenden Matrizenoperationen möglich sind und begründen Sie Ihre Entscheidung, warum die restlichen Operationen nicht möglich sind.

**[]** B -2 \*A

**[]** A^T

**[]** B^(-1)

**[]** 2 \*C -3 \*D

**[]** A \*C

**[]** C^(-1) \*D

-----

b) Berechnen Sie die durchführbaren Operationen.

-----

Z 2.2.)

D

Multipliziert man eine 5 'x 3-Matrix A mit einer Matrix B, erhält man eine 5 'x 7-Matrix A \*B. Erklären Sie, wie viele Zeilen und Spalten die Matrix B haben muss.

-----

Z 2.3.)

A, C, D

In einer Malerei werden aus den Grundfarben Rot, Blau und Weiß die Mischfarben Rosa, Violett und Lila gemischt. In der folgenden Tabelle sind die Mischungsverhältnisse in ME bezogen auf jeweils 1 ME der Mischfarbe angegeben.

... | Rosa | Violett | Lila

Rot | 0,5 | 0,4 | 0,6

Blau | 0 | 0,4 | 0,4

Weiß | 0,5 | 0,2 | 0

-----

Berechnen Sie, wie viele ME Rot, Blau und Weiß zur Herstellung von 10 ME Rosa, 8 ME Violett und 5 ME Lila benötigt werden.

Argumentieren Sie, welche Berechnung stimmt und lesen Sie die gesuchte Lösung ab.

a) 'mat

([0,5; 0,4; 0,6]

[0; 0,4; 0,4]

[0,5; 0,2; 0]) \*(10|8|5) =(11,2|5,2|6,6)

-----

b) (10 8 5) \*'mat

([0,5; 0,4; 0,6]

[0; 0,4; 0,4]

[0,5; 0,2; 0]) =(7,5 8,2 9,2)

-----

Z 2.4.)

A, C

Die drei Filialen eines Modegeschäfts bestellen jeweils einen geschätzten Bedarf einer Herbstkollektion. Fehlt einer Filiale ein bestimmtes Teil bzw. eine bestimmte Größe, bezieht sie das gewünschte Produkt falls möglich von einer anderen Filiale.

Im folgenden Gozintographen ist die prozentuelle Verteilung der selbst verkauften, bzw. an andere Filialen abgegebenen Kleidungsstücke dargestellt.

Filiale Landeck -> 0,05 -> Filiale Innsbruck

Filiale Landeck -> 0,93 -> Filiale Landeck

Filiale Landeck -> 0,02 -> Filiale Kufstein -> 0,05 -> Filiale Innsbruck

Filiale Innsbruck -> 0,99 -> Filiale Innsbruck

Filiale Kufstein -> 0,03 -> Filiale Landeck

Filiale Kufstein -> 0,92 -> Filiale Kufstein

Filiale Kufstein -> 0,05 -> Filiale Innsbruck

-----

Erstellen Sie eine zur dargestellten Verflechtung passende Matrix. Entnehmen Sie Ihrer Matrix, an welcher Stelle der Eigenbedarf der Filiale Kufstein abgelesen werden kann.

j-49

Z 2.5.)

A, B

Stellen Sie das gegebene Gleichungssystem durch eine Matrizengleichung dar:

a)

x +3y +2z =1

2x -y +3z =-9

3x +2y -z =10

-----

b) Lösen Sie diese Matrizengleichung.

-----

Z 2.6.)

A, B

Zwei auf dem Markt erhältliche Vitaminpräparate haben folgende Inhaltsstoffe pro 100 g:

... | Multivitamin | Maxivitamin

Vitamin C | 2 g | 3 g

Vitamin E | 1 g | 1 g

Vitamin B | 1 g | 2 g

Füllstoff | 96 g | 94 g

-----

Man will aus beiden Präparaten ein Mischpräparat herstellen, das 19 g Vitamin C und 8 g Vitamin E enthält.

a) Ermitteln Sie, wie viel Vitamin B das Mischpräparat enthält.

-----

b) Berechnen Sie, wie viel Füllstoff das Mischpräparat hat.

j-50

# \*\*-1 - 3 Potenzen mit rationalen Exponenten und Potenzfunktionen

Die Babylonier konnten bereits die dritte Wurzel aus einer Zahl ziehen. In der abendländischen Antike gab es den Begriff der irrationalen Zahl nicht. Wenn irrationale Zahlen auftauchten, wurden sie durch rationale Näherungen ersetzt.

Allerdings verlangte eines der berühmtesten Probleme der griechischen Mathematik das Auffinden einer dritten Wurzel: das delische Problem. Nach einer Sage soll das Orakel des Apollon in Delos als Mittel zur Beendigung einer in Griechenland herrschenden Pest geraten haben, das Volumen des würfelförmigen Altars des Apollon zu verdoppeln, d. h., die dritte Wurzel aus zwei zu konstruieren: x^3 =2, also x = ^(3)'w(2).

-----

Verdoppelung des Würfelvolumens:

V =a^3

V' =2 \*V

x^3 =2 \*a^3

Seitenkante x =?

-----

#### \*\*-4 - Meine Ziele

Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

* Wurzeln als Potenzen mit rationalen Exponenten darstellen,
* die Rechenregeln für Wurzeln anwenden,
* die Eigenschaften von Potenzfunktionen beschreiben,
* in Formeln, die Potenzen mit rationalen Exponenten enthalten, die gegenseitige Abhängigkeit der Größen interpretieren und erklären.

#### \*\*-4 - Worum geht's hier?

Ein Quadrat hat eine Fläche von 2 m^2.

Wie lang ist eine Seite x des Quadrates? Für die Fläche des Quadrates gilt: A =x^2

Suchen Sie eine Zahl, die quadriert 2 ergibt: x^2 =2

Symbolisch schreibt man diese Zahl als Quadratwurzel aus 2: x ='w(2)

Mithilfe eines Taschenrechners berechnet man: x ~~1,4142

Die Seitenlange des Quadrates beträgt somit ca. 1,4142 m.

-----

Ein würfelförmiges Gefäß soll genau 2 Liter Wasser fassen.

Wie lang muss eine Würfelkante x (in dm) sein?

Für das Volumen eines Würfels gilt: V =x^3

Suchen Sie eine Zahl, deren dritte Potenz 2 ergibt: x^3 =2

Symbolisch schreibt man diese Zahl als dritte Wurzel aus 2: x = ^(3)'w(2)

Mithilfe eines Taschenrechners berechnet man: x ~~1,2599

Die Länge der Seitenkante des Würfels beträgt somit ca. 1,2599 dm.

-----

|Wurzeln|

Was ist also beispielsweise 'w(2)?

Aus dem Beispiel erkennen wir:

'w(2) =b genau dann, wenn b^2 =2 und b >=0.

'w(2) =b <=> b^2 =2 'w(2) ~~1,4142

-----

Welchen Zahlenwert ergibt ^(3)'w(2)?

Aus dem Beispiel erkennen wir:

^(3)'w(2) =b genau dann, wenn b^3 =2 und b >=0.

^(3)'w(2) =b <=> b^3 =2 ^(3)'w(2) ~~1,2599

-----

Welchen Zahlenwert ergibt ^(7)'w(21)?

Es gilt:

^(7)'w(21) =b genau dann, wenn b^7 =21 und b >=0.

^(7)'w(21) =b <=> b^7 =21 ^(7)'w(21) ~~1,5449

j-51

## \*\*-2 - 3.1 Potenzen mit rationalen Exponenten, Wurzeln

Das Wurzelziehen ist eine Umkehrung des Potenzierens:

'w(4) =2, da 2^2 =4 ^(3)'w(8) =2, da 2^3 =8

'w(9) =3, da 3^2 =9 ^(3)'w(27) =3, da 3^3 =27

'w(16) =4, da 4^2 =16 ^(3)'w(64) =4, da 4^3 =64

-----

|Definition: Wurzel|

Die n-te Wurzel aus einer nicht negativen Zahl a ist diejenige nicht negative Zahl b, deren n-te Potenz gleich a ist.

b = ^(n)'w(a) <=> b^n =a

^(n)'w(a) heißt n-te Wurzel von a.

a heißt Radikand.

n heißt Wurzelexponent.

b heißt n-te Wurzel von a.

-----

b = ^(n)'w(a) <=> b^n =a

für a, b 'el 'R^+\_0, n 'el 'N \ {0, 1}

-----

* Das Wurzelziehen ist eine Umkehrung des Potenzierens.
* Das Wurzelziehen wird auch Radizieren genannt.
* Das Wurzelziehen ist nur für Zahlen größer gleich null definiert.
* Für x ='w(-1) müsste z. B. gelten: x^2 =-1. Aber das Quadrat von reellen Zahlen ist immer größer gleich null.
* Wurzeln sind im Allgemeinen irrationale Zahlen und lassen sich somit nicht in Bruchform darstellen.

radix: lateinisch für Wurzel.

Das Wurzelzeichen 'w erinnert an den Buchstaben r für radix.

-----

|Spezielle Wurzeln|

^(n)'w(a^n) =( ^(n)'w(a))^n =a

für a 'el 'R^+\_0 und n 'el 'N \ {0, 1}

Potenzieren und Radizieren heben einander auf.

-----

^(n)'w(1) =1, da 1^n =1

für alle n 'el 'N \ {0, 1}

-----

^(n)'w(0) =0, da 0^n =0

für alle n 'el 'N \ {0, 1}

-----

^(2)'w(a) ='w(a)

vereinfachte Schreibweise für die Quadratwurzel

-----

##-Beispiel 3.1: Rechnen mit Wurzeln (B, D)

Berechnen und begründen Sie:

a) 'w(25) =5; da 5^2 =25

b) ^(3)'w(125) =5; da 5^3 =125

c) ^(6)'w(64) =2; da 2^6 =64

d) 'w(0,01) =0,1; da 0,1^2 =0,01

e) 'w(0,04) =0,2; da 0,2^2 =0,04

f) ^(5)'w(0) =0; da 0^5 =0

g) ^(5)'w(1); da 1^5 =1

-----

Die Definition der Wurzel erklärt zwar den Zusammenhang mit dem Potenzieren.

Für das Berechnen von Wurzeln ist die Definition aber nur in Spezialfällen zielführend.

Das Berechnen von Wurzeln ist sehr aufwändig und wird daher hier mit Technologie- Unterstützung durchgeführt.

Taschenrechner verfügen über Tasten für die

* Quadratwurzel,
* Kubikwurzel und
* n-te Wurzel.

j-52

In Excel gibt es allerdings nur die Funktion WURZEL(Zahl) für die Quadratwurzel.

Für n-te Wurzeln müssen Sie eine andere Vorgangsweise anwenden. Dazu ist es notwendig, Wurzeln als Potenzen mit rationalen Hochzahlen darzustellen.

Es gibt einen Zusammenhang zwischen dem Wurzelziehen und dem Potenzieren:

^(3)'w(a^3) =a, da a^3 =a^3 also gilt ^(3)'w(a^3) =a^3 =a

-----

^(3)'w(a^6) =a^2, da (a^2)^3 =a^6, also gilt ^(3)'w(a^6) =a^(6/3) =a^2

-----

^(3)'w(a^9) =a^3, da (a^3)^3 =a^9, also gilt ^(3)'w(a^9) =a^(9/3) =a^3

-----

^(3)'w(a^(12)) =a^4, da (a^4)^3 =a^(12), also gilt ^(3)'w(a^(12)) =a^((12)/3) =a^4

Somit kann ^(3)'w(a) als Potenz geschrieben werden:

^(3)'w(a) =a^(1/3), da (a^(1/3))^3 =a^(1/3 \*3) =a

-----

Tipp: Potenzieren von Potenzen:

(a^n)^m =a^(n \*m)

-----

|Definition: Potenzen mit rationalen Exponenten|

Potenzen mit rationalen (gebrochenen) Hochzahlen können als Wurzeln geschrieben werden:

a^(1/n) = ^(n)'w(a) für a 'el 'R^+\_0 und n 'el 'N \ {0}

-----

^(n)'w(a) =a^(1/n), da (a^(1/n))^n =a

-----

Hinweis: Damit können Berechnungen mit Wurzeln auf die Rechengesetze für das Potenzieren zurückgeführt werden:

Das Rechnen mit Wurzeln wird zu einem Rechnen mit Potenzen!

-----

##-Beispiel 3.2: Wurzeln in Potenzschreibweise 1 (A, B)

Schreiben Sie als Potenz und berechnen Sie, wenn möglich:

a) ^(3)'w(8) =8^(1/3) =2

b) ^(3)'w(27) =27^(1/3) =3

c) ^(6)'w(64) =64^(1/6) =2

d) 'w(0,01) =0,01^(1/2) =0,1

e) 'w(0,04) =0,04^(1/2( =0,2

f) 'w(x +1) =(x +1)^(1/2)

g) ^(5)'w(x^5) =(x^5)^(5/5) =x^(5/5) =x^1 =x

h) ^(5)'w(x^3) =(x^3)^(1/5) =x^(3/5)

i) 'w(1/x) ='w(x^(-1)) =(x^(-1))^(1/2) =x^(-1/2)

j) ^(5)'w(1/x) = ^(5)'w(x^(-1)) =(x^(-1))^(1/5) =x^(-1/5)

-----

Schreiben Sie als Wurzel:

k) 4^(1/7) = ^(7)'w(4)

l) 2^(1/3) = ^(3)'w(2)

m) 8^(1/4) = ^(4)'w(8)

n) 0,003^(1/2) ='w(0,003)

o) (2x +3)^(1/3) = ^(3)'w(2x +3)

p) x^(7/8) =(x^7)^(1/8) = ^(8)'w(x^7)

q) x^(-1/3) =(x^(-1))^(1/3) = ^(3)'w(x^(-1)) = ^(3)'w(1/x)

r) (x +1)^(-1/3) = ^(3)'w((x +1)^(-1)) = ^(3)'w(1/(x +1))

-----

|Wurzel- und Potenzschreibweise|

^(n)'w(a) =a^(1/n) ^(n)'w(a^m) =a^(m/n)

-----

^(n)'w(a^n) =a^(n/n) =a

n-te Wurzel und n-te Potenz heben einander auf.

-----

a^(-1/n) =1/( ^(n)'w(a)) =(1/a)^(1/n)

a^(-m/n) =1/( ^(n)'w(a^m))

-----

^(n)'w(a^m) =a^(m/n)

Speziell gilt: 'w(a^2) =a

j-53

##-Beispiel 3.3: Wurzeln in Potenzschreibweise überführen (A)

a) ^(3)'w(3^2) =3^(2/3)

b) ^(5)'w(4^3) =4^(3/5)

c) ^(7)'w(b^3) =b^(3/7)

d) 'w(x^2) =x

e) ^(3)'w((a +1)^3) =a +1

f) ^(6)'w((a +b)^5) =(a +b)^(5/6)

g) ^(5)'w(2^4) =2^(4/5) =2^(0,8)

h) ^(3)'w(a^6) =a^(6/3) =a^2

i) 1/( ^(n)'w(a^(n +2))) =a^(-(n +2)/2) für a >0

-----

Hinweis: Vorsicht

^(n)'w(a +b) \= ^(n)'w(a) + ^(n)'w(b)

'w(a +b) \='w(a) +'w(b)

'w(9 +4) \='w(9) +'w(4) =3 +2 =5

'w(9 +4) ='w(13) ~~3,6056

-----

##-Beispiel 3.4: Potenzen in Wurzelschreibweise überführen (A)

a) 2^(3/4) = ^(4)'w(2^3)

b) 3^(2/3) = ^(3)'w(3^2)

c) 5^(3/4) = ^(4)'w(5^3)

d) a^(3/5) = ^(5)'w(a^3)

e) (3x -1)^(2/3) = ^(3)'w((3x -1)^2)

f) (a -b)^(5/8) = ^(8)'w((a -b)^5)

g) a^(4/5) = ^(5)'w(a^4)

h) a^(-1/2) =1/('w(a))

i) 0,01^(-3/2) =100^(3/2) =10^3 =1000

-----

|Satz: Rechnen mit Wurzeln|

Für Wurzeln, also Potenzen mit rationalen Exponenten, gelten die schon bekannten Rechenregeln für Potenzen.

-----

|Addition und Subtraktion von Wurzeln|

Wie bei den Potenzen können auch bei den Wurzeln nur Ausdrücke mit gleicher Basis und gleichen Wurzelexponenten zusammengefasst werden.

##-Beispiel 3.5: Addition und Subtraktion von Wurzeln (B)

a) 'w(2) +5 \*'w(2) -2 \*'w(2) =(1 +5 -2) \*'w(2) =4 \*'w(2)

-----

b) 'w(2) +5 \*'w(3) +3 \*'w(2) -2 \*'w(3) =4 \*'w(2) +3 \*'w(3)

-----

c) 3 \* ^(3)'w(3) -2 \* ^(3)'w(3) +4 \* ^(3)'w(3) =5 \* ^(3)'w(3)

-----

d) ^(7)'w(a) +6 \* ^(7)'w(a) -3 \* ^(7)'w(a) =(1 +6 -3) \* ^(7)'w(a) =4 \* ^(7)'w(a)

-----

e) ^(5)'w(a) +4 \* ^(3)'w(a) +2 \* ^(5)'w(a) -3 \* ^(3)'w(a) =3 \* ^(5)'w(a) + ^(3)'w(a)

-----

r \* ^(n)'w(a) +/-s \* ^(n)'w(a) =(r +/-2) \* ^(n)'w(a)

-----

|Multiplikation und Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten|

Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten können entsprechend der Potenzregel

a^n \*b^n =(a \*b)^n bzw. (a^n)/(b^n) =(a/b)^n zusammengefasst werden.

-----

##-Beispiel 3.6: Multiplikation und Division von Wurzeln (B)

a) 'w(3) \*'w(5) ='w(3 \*5) =(15)

-----

b) (2 -'w(3)) \*'w(2) =2 \*'w(2) -'w(6)

-----

c) ^(3)'w(2) \* ^(3)'w(x^4) = ^(3)'w(2 \*x^4)

-----

d) ('w(125))/('w(5)) ='w((125)/5) ='w(25) =5

-----

e) ^(5)'w(1/(32)) =( ^(5)'w(19)/( ^(5)'w(2^5)) =1/2

-----

f) ( ^(3)'w(2 \*x^2))/( ^(3)'w(2 \*x)) = ^(3)'w((2 \*x^2))/(2 \*x) = ^(3)'w(x)

-----

g) ( ^(3)'w(9a^2))/( ^(3)'w(3a)) = ^(3)'w((9a^2)/(3a)) = ^(3)'w(3a)

-----

h) ^(3)'w((2a^6)/27)) =( ^(3)'w(2) \* ^(3)'w(a^6))/( ^(3)'w/27)) =(a^2 \* ^(3)'w(2))/3

-----

^(n)'w(a) \* ^(n)'w(b) = ^(n)'w(a \*b)

( ^(n)'w(a))/( ^(n)'w(b)) = ^(n)'w(a/b)

b >0

j-54

|Teilweises Wurzelziehen|

Oft kann ein Wurzelausdruck vereinfacht werden, indem die Radikanden so als Produkt dargestellt werden, dass aus jeweils einem der Faktoren die Wurzel gezogen werden kann.

-----

^(n)'w(a^n \*b) = ^(n)'w(a^n) \* ^(n)'w(b^n) =a \* ^(n)'w(b)

Für das teilweise Wurzelziehen ist es vorteilhaft, wenn man einige Quadrat- und Kubikzahlen im Kopf hat:

n | n^2 | n^3

2 | 4 | 8

3 | 9 | 27

4 | 16 | 64

5 | 25 | 125

6 | 36 | 216

7 | 49 | 343

8 | 64 | 512

9 | 81 | 729

-----

##-Beispiel 3.7: Teilweises Wurzelziehen (B)

a) 'w(12) ='w(4 \*3) ='w(4) \*'w(3) =2 \*'w(3)

-----

b) 'w(125) ='w(25 \*5) ='w(5^2) \*\*w(5) =5 \*'w(5)

-----

c) 'w(250) = ^(3)'w(125 \*2) = ^(3)'w(5^3) \* ^(3)'w(2) =5 \* ^(3)'w(2)

-----

d) 'w(9a^3) ='w(9a^2) \*'w(a) =3a \*'w(a)

-----

e) ^(3)'w(54 \*x^4 \*y^5) = ^(3)'w(2 \*3^3 \*x^3 \*x \*y^3 \*y^2) =

= ^(3)'w(3^3 \*x^3 \*y^3) \*'w(2 \*x \*y^2) =3 \*x \*y \* ^(3)'w(2 \*x \*y^2)

-----

f) ^(7)'w(a^(21) \*b^(15)) = ^(7)'w(a^(21) \*b^(14)) \*'w(b) =a^3 \*b^2 \* ^(7)'w(b)

-----

##-Beispiel 3.8: Binomische Formeln mit Wurzeln (B)

a) ('w(6) +'w(3))^2 =6 +2 \*'w(18) +3 =9 +6 \*'w(2)

-----

b) (3 \*'w(2) -2 \*'w(3))^2 =9 \*2 -2 \*3 \*'w(2) -2 \*'w(3) +4 \*3 =30 -12 \*'w(6)

-----

c) ('w(3) -'w(2)) \*('w(3) +'w(2)) =3 -2 =1

-----

d) (2 -'w(3))^3 =8 -3 \*4 \*'w(3) +3 \*2 \*3 -3 \*'w(3) =26 -15 \*'w'(3)

-----

|Binomische Formeln:|

(a +b)^2 =a^2 +2ab +b^2

(a -b)^2 =a^2 -2ab +b^2

(a -b) \*(a +b) =a^2 -b^2

(a -b)^3 =a^3 -3a^2b +3ab^2 -b^3

-----

('w(3))^2 ='w(3) \*'w(3) =3

('w(3))^3 ='w(3) \*'w(3) \*'w(3) =3 \*'w(3)

-----

|Ausdruck unter die Wurzel bringen|

Faktoren vor einer Wurzel können unter die Wurzel gebracht werden, wenn man sie mit dem Wurzelexponenten potenziert.

-----

##-Beispiel 3.9: Ausdruck unter die Wurzel bringen (B)

a) 5 \*'w(3) ='w(5^2 \*3) ='w(75)

-----

b) a^2 \* ^(3)'w(b) = ^(3)'w(a^6 \*b)

-----

c) 3 \* ^(3)'w(2/9) = ^(3)'w((27 \*2)/9) = ^(3)'w(6)

-----

d) x/y \* ^(3)'w((y^4)/(x^2)) = ^(3)'w((x^3 \*y^4)/(y^3 \*x^2)) = ^(3)'w(xy)

-----

e) x \*y^2 \* ^(3)'w(2 \*x^2) = ^(3)'w(2 \*x^3 \*x^2 \*y^6) = ^(3)'w(2 \*x^5 \*y^6)

-----

|Multiplikation und Division von Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten|

Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten müssen vor der Multiplikation oder Division auf einen gemeinsamen Wurzelexponenten erweitert werden.

-----

##-Beispiel 3.10: Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten (B)

a) ^(3)'w(2) \* ^(5)'w(3) =2^(1/3) \*3^(1/5) =2^(5/(3 \*5)) \*3^(3/(5 \*3)) = ^(15)'w(2^5 \*3^3)

-----

b) 'w(x) \* ^(3)'w(y^5) =x^(1/2) \*y^(5/3) =x^(3/(2 \*3)) \*y^((5 \*2)/(3 \*2)) = ^(6)'w(x^3 \*y^(10))

-----

c) ( ^(5)'w(a))/( ^(7)'w(a)) = ^(35)'w((a^7)/(a^5)) = ^(35)'w(a^2)

-----

^(n)'w(a) \*^(m)'w(b) = ^(n \*m)'w(a^m \*b^n)

da ^(n)'w(a) \* ^(m)'w(b) =a^(1/n) \*b^(1/m) =

=a^(m/(n \*m)) \*b^(n/(m \*n)) = ^(n \*m)'w(a^m \*b^n)

( ^(n)'w(a))/( ^(m)'w(b)) = ^(n \*m)'w((a^m)/(b^n))

j-55

|Vereinfachen von Wurzelexponenten, Potenzieren von Wurzeln|

Da Wurzeln Potenzen mit rationalen Exponenten sind, können die Exponenten beliebig erweitert und gekürzt werden:

a^(3/4) =a^(6/8) =a^(9/(12)) =...

also ^(4)'w(a^3) = ^(8)'w(a^6) = ^(12)'w(a^9) =...

-----

^(n \*p)'w(a^(m \*p)) = ^(n)'w(a^m)

da ^(n \*p)'w(a^(m \*p)) =a^((m \*p)/(n \*p)) = ^(n)'w(a^m)

-----

##-Beispiel 3.11: Vereinfachen von Wurzelexponenten (B)

a) ^(6)'w(2^3) =2^(3/6) =2^(1/2) ='w(2)

b) ^(4)'w(49) = ^(4)'w(7^2) ='w(7)

c) ^(6)'w(a^3) ='w(a)

d) ( ^(5)'w(x^2))^3 = ^(5)'w(x^6) =x \* ^(5)'w(x)

-----

( ^(n)'w(a^m)^q = ^(n)'w(a^(m \*q))

|Verschachtelte Wurzeln|

##-Beispiel 3.12: Verschachtelte Wurzeln (B)

a) 'w('w(37)) = ^(4)'w(37)

b) 'w( ^(3)'w(a)) = ^(6)'w(a)

c) 'w('w('w('w(a)))) = ^(2 \*2 \*2 \*2)'w(a) = ^(16)'w(a)

d) ^(3)'w(a \*'w(b)) = ^(3)'w('w(a^2 \*b)) = ^(6)'w(a^2 \*b)

-----

^(m)'w( ^(n)'a) = ^(m \*n)'w(a) = ^(n)'w( ^(m)'w(a))

-----

Hinweis: Faktoren zwischen Schachtelwurzeln sind zuerst unter die innere Wurzel zu bringen.

-----

Die Kürzungs- und Erweiterungsregel hat zur Folge, dass es nicht sinnvoll ist, Wurzeln mit ungeraden Wurzelexponenten für negative Zahlen zu definieren.

Der Ausdruck ^(3)'w(-8) =-2 ist zwar eindeutig definiert, da (-2)^3 =-8, aber mit der Potenzregel ergibt sich dann folgender Widerspruch:

-2 = ^(3)'w(-8) = ^(6)'w(((-8)^2) = ^(6)'w(64) =2

Um solche Widersprüche zu vermeiden, werden Wurzeln nur für nichtnegative Zahlen definiert.

-----

|Rationalmachen (Wurzelfreimachen) des Nenners|

Das Rationalmachen des Nenners ist ein Relikt aus früheren, technologiefreien Zeiten der Mathematik und dient der übersichtlichen Darstellung von Formeln und Ergebnissen.

Durch geeignetes Erweitern kann man einen Bruch mit Wurzeltermen im Nenner in einen Bruch mit rationalem Nenner (ohne Wurzel) umformen.

-----

##-Beispiel 3.13: Rationalmachen des Nenners (B)

a) 1/('w(29) =('w(2))/('w(2) \*'w(2)) =('w(2))/2

-----

b) 3/( ^(3)'w(x^2)) =(3 \* ^(3)'w(x))/( ^(3)'w(x^2 \*x)) =

=(3 \* ^(3)'w(x))/( ^(3)'w(x^2 \*x)) =(3 \* ^(3)'w(x))/( ^(3)'w(x^3)) =(3 \*^(3)'w(x))/x

-----

Hinweis: Die Berechnung von

('w(2))/2 ~~1,414214/2 =0,707107 ist ohne Technologie einfacher durchzuführen als die händische Division von

1/('w(2)) ~~1/1,414214 ~~0,707107.

j-56

|Rechnen mit Potenzen mit rationalen Hochzahlen|

Statt mit Wurzeln kann auch mit Potenzen mit rationalen Hochzahlen gerechnet werden.

-----

##-Beispiel 3.14: Rechnen mit Potenzen mit rationalen Hochzahlen (B)

Lösen Sie die folgenden Aufgaben unter Verwendung der Rechengesetze für Potenzen:

a) 'w(2) \* ^(4)'w(8) =2^(1/2) \*2^(3/4) =2^(2/4 +3/4) =2^(5/4) = ^(4)'w(2^5) ~~2,4

-----

b) ^(3)'w(5^2) \* ^(5)'w(5^3) =5^(2/3 +3/5) =

=5^((10 +9)/(15)) =5^((19)/(15)) = ^(15)'w(5^(19)) ~~7,7

-----

c) ( ^(5)'w(2^3) \*'w(2^3))/( ^(3)'w(2^2)) =

=(2^(3/5) \*2^(3/2))/(2^(2/3)) =

=2^(3/5 +3/2 -2/3) =2^((18 +45 -20)/30) =2^((43)/(30)) = ^(30)'w(2^(43)) ~~2,7

-----

d) ( ^(3)'w(a^2) \*'w(a^5))/( ^(12)'w(a^7)) =(a^(2/3) \*a^(5'/2))/(a^(7/12)) =

=a^(2/3 +5/2 -7/(12)) =a^((8 +30 -7)/(12)) =a^((31)/(12)) = ^(12)'w(a^(31))

-----

e) ( ^(5)'w(x^3) \*x^3)/( ^(3)'w(x^2)) =

=(x^(3/5) \*x^3)/(x^(2/3)) =

=x^(2/5 +3 -2/3) =x^((9 +45 -10)/(15)) =

=x^((44)/(15)) = ^(15)'w(x^(44))

-----

f) ( ^(3)'w(x^2))/( ^(5)'w(x^4) \* ^(4)'w(x^3)) =(x^(2/3))/(x^(4/5) \*x^(3/4)) =

=x^(2/3 -4/5 -3/4) =x^((40 -48 -45)/(60)) =x^(-(53)/(60)) =1/(x^((53)/(60)) =1/( ^(60)'w(x^(53))

-----

In der Physik und in der Wirtschaft gibt es zahlreiche Zusammenhänge, die sich durch Potenzen mit ganzen und rationalen Exponenten darstellen lassen.

|Physikalische Anwendungen|

##-Beispiel 3.15: Kinetische Energie einer Masse (A, B, D)

Der Zusammenhang zwischen der kinetischen Energie Euro und der Masse m eines Körpers, der sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, ist gegeben durch E =(m \*v^2)/2.

a) Formen Sie die Formel nach der Variablen v um.

-----

b) Erklären Sie, wie sich die Geschwindigkeit verändern muss, damit sich die kinetische Energie verdoppelt.

-----

c) Erklären Sie, wie sich die Geschwindigkeit verändert hat, wenn sich die kinetische Energie um das n-fache erhöht hat.

-----

Lösung:

a) v ='w((2 \*E)/m)

-----

b) v' ='w((2 \*2 \*E)/m) ='w(2) \*'w((2 \*E)/m) ~~1,41 \*v

d. h., die Geschwindigkeit muss ca. um den Faktor 1,41, also um ca. 41 % erhöht werden.

-----

c) v' ='w((2 \*n \*E)/m) ='w(n) \*'w((2 \*E)/m) ='w(n) \*v

d. h., die Geschwindigkeit muss sich um den Faktor 'w(n) erhöht haben.

j-57

##-Beispiel 3.16: Drittes Keplersches Gesetz (B, D)

Johannes Kepler hat bewiesen, dass sich die Quadrate der Umlaufzeiten T\_1 und T\_2 zweier Planeten wie die dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen a\_1 und a\_2 verhalten:

((T\_1)/T\_2))^2 =((a\_1)/a\_2))^3

a) Formen Sie die Formel nach der Variablen T\_1 um.

-----

b) Zeigen Sie: Ein Planet, dessen Halbachse um den Faktor k größer ist als jene eines anderen Planeten, hat eine Umlaufzeit, die um den Faktor k^(3/2) länger ist als jene des anderen Planeten.

-----

c) Zeigen Sie diese Regel anhand der Daten der Planeten Neptun und Erde.

-----

Lösung:

a) T\_1 =T\_2 \*((a\_1)/a\_2))^(3/2)

-----

b) T\_1 =T\_2 \*((k \*a\_2)/a\_2))^(3/2) =T\_2 \*k^(3/2) mit a\_1 =k \*a\_2

-----

c) Verhältnis der Halbachsen von Neptun und Erde: 4496/149,6 ~~30

Umlaufzeit von Neptun: T\_1 =1 \*30^(3/2) ~~164,3

Die Umlaufzeit beträgt ca. 164,3 Jahre (exakt sind es 164,78 Jahre).

-----

Abkürzungen für die folgende Tabelle:

Entfernung ---| Entfernung Sonne, große Halbachse in 10^6 km

UZ - Umlaufzeit in (Erd-)Jahren

Planeten | Entfernung | UZ

Merkur | 57,9 | 0,241

Venus | 108,2 | 0,615

Erde | 149,6 | 1

Mars | 227,9 | 1,881

Jupiter | 778,3 | 11,86

Saturn | 1427 | 29,46

Uranus | 2870 | 84,01

Neptun | 4496 | 164,78

-----

|Wirtschaftliche Anwendung: Cobb-Douglas-Funktionen|

In der Wirtschaftsmathematik spielen sogenannte Cobb-Douglas-Funktionen eine große Rolle, die den Zusammenhang zwischen Arbeits- und Kapitaleinsatz und dem entsprechenden Output erklären: Y =A^('al) \*K^(1 -'al)

Y Produktionsoutput

A Arbeitseinsatz

K Kapitaleinsatz

'al Produktionselastizität

-----

##-Beispiel 3.17: Rechnen mit Cobb-Douglas-Funktionen (A, B, C, D)

a) Schreiben Sie die Cobb-Douglas-Funktion Y =A^(0,75) \*K^(0,25) in Wurzelschreibweise.

-----

b) Erklären Sie, um wie viel Prozent sich der Output Y verändert, wenn

(1) der Arbeitseinsatz verdoppelt wird,

(2) der Kapitaleinsatz verdoppelt wird.

-----

c) Erklären Säe, um das Wievielfache der Kapitaleinsatz verändert werden muss, um den Output zu verdoppeln.

-----

d) Stellen Sie Formel nach der Variablen K um.

-----

Lösung:

a) Y =A^(3/4) \*K^(1/4) = ^(4)'w(A^3) \* ^(4)'w(K) = ^(4)'w(A^3 \*K)

-----

b)

(1) Y = ^(4)'w((2A)^3 \*K) = ^(4)'w(2^3) \* ^(4)'w(A^3 \*K) ~~ =1,68 \* ^(4)'w(A^3 \*K)

d. h., der Output steigt ca. um den Faktor 1,68, also um ca. 68 %.

-----

(2) Y = ^(4)'w(A^3 \*2K) = ^(4)'w(2) \* ^(4)'w(A^3 \*K) ~~1,19 \* ^(4)'w(A^3 \*K)

d. h., der Output steigt ca. um den Faktor 1,19, also um ca. 19 %.

-----

c) Y =2 \* ^(4)'w(A^3 \*K) = ^(4)'w(A^3 \*2^4K) = ^(4)'w(A^3 \*16K)

d. h., der Kapitaleinsatz muss um das 16-fache gesteigert werden.

-----

d)

Y =A^(3/4) \*K^(1/4) |4

Y^4 =A^3 \*K

K =(Y^4)/(A^3)

j-58

#### \*\*-4 - Übungsaufgaben

3.001.)

B, D

Berechnen Sie die Wurzelwerte.

Begründen Sie mithilfe der Potenzschreibweise:

a) 'w(4) =2 da 2^2 =4

b) 'w(49) =**[]**, da **[]**

c) 'w(100) =**[]**, da **[]**

d) ^(3)'w(1000) =**[]**, da **[]**

e) ^(3)'w(64) =**[]**, da **[]**

f) ^(3)'w(1/(27)) =**[]**, da **[]**

g) ^(4)'w(16) =**[]**, da **[]**

h) ^(4)'w(0,0016) =**[]**, da **[]**

i) ^(5)'w(0,00001) =**[]**, da **[]**

j) ^(4)'w(0) =**[]**, da **[]**

-----

3.002.)

D

Erklären Sie anhand des folgenden Ausdrucks, warum aus negativen Zahlen nicht die Quadratwurzel gezogen werden kann.

'w(-4) =x <=> x^2 =-4

-----

3.003.)

A, B

Schreiben Sie als Potenz und vereinfachen Sie, falls möglich:

^(n)'w(a) =a^(1/n)

-----

a) ^(3)'w(49

b) ^(3)'w(125)

c) ^(4)'w(16)

d) 'w(0,09)

e) 'w(0,16)

f) 'w(a +b^2)

g) ^(3)'w(a^3)

h) ^(7)'w(x^2)

i) 'w(1/(a^3))

-----

3.004.)

Berechnen Sie (1) mit einem Taschenrechner und (2) mit Excel die Wurzeln:

a) 'w(2)

b) ^(3)'w(2)

c) ^(6)'w(2^5)

d) ^(3)'w(('pi)/(200))

-----

3.005.)

A

Schreiben Sie als Potenz und vereinfachen Sie, falls möglich:

^(n)'w(a^m) =a^(m/n)

-----

a) ^(5)'w(5^2)

b) ^(3)'w(2^2)

c) ^(6)'w(a^5)

d) ^(5)'w(a^5)

e) ^(4)'w((x +y)^4)

f) ^(3)'w((x -y)^2)

-----

3.006.)

A

Schreiben Sie als Potenz mit rationalem Exponenten:

a) ^(5)'w(a)

b) ^(n)'w(b)

c) ^(5)'w(a^4)

d) ^(3)'w(1/c)

e) 1/( ^(5)'w(5a^7))

f) ^(3)'w(a^2 +b^2)

-----

3.007.)

A

Schreiben Sie als Wurzel:

a^(1/n) = ^(n)'w(a)

a^(-n) =1/(a^n)

1/(a^(-n)) =a^n

-----

a) 2^(1/4)

b) 3^(1/5)

c) 9^(1/8)

d) 0,05^(1/2)

e) (3a +1)^(1/4)

f) a^(5/6)

g) a^(-1/4)

h) (a +b)^(-1/5)

-----

3.008.)

A

Schreiben Sie als Wurzel:

a^(m/n) = ^(n)'w(a^m)

-----

a) 4^(2/5)

b) 10^(3/4)

c) x^(3/4)

d) y^(4/7)

e) (2a -3)^(3/4)

f) (x -y)^(2/3)

-----

3.009.)

A, B

Schreiben Sie mithilfe des Wurzelzeichens und berechnen Sie:

a) 8^(1/3)

b) 16^(1/4)

c) 32^(0,2)

d) 25^(0,5)

e) (1/1024)^(-1/(10))

f) (1/8)^(-1/3)

g) 4^(-1/2)

h) 0^(2/3)

i) 1^(7/8)

j) 9^(-1/2)

k) 16^(0,75)

l) -8^(1/3)

m) 8^(-1/3)

n) 0,008^(1/3)

o) 16^(0,25)

p) 36^(1,5)

q) 16^(-0,25)

r) 1000^(-3/4)

s) 0,0016^(-0,75)

-----

Anleitung:

a^(0,2) =a^(1/5) = ^(5)'w(a)

2^(10) =1024

-----

3.010.)

A

Mithilfe des Wurzelzeichens ist anzuschreiben:

a^(1,5) =a^(3/2) ='w(a^3)

-----

a) a^(2/3)

b) b^(7/8)

c) c^(9/2)

d) (a +b)^(1/2)

e) (x +y)^(-1/4)

f) x^(-4/3)

g) (2a -3b)^(2/n)

h) (u +v)^((n +1)/(n +2))

i) a^(-3/2)

j) -a^(3/2)

k) a^(-2/3)

l) (a^2 +2ab +b^2)^(1/3)

m) a^(3/4)

n) a^(1/2)

o) b^(5/6)

p) x^(-1/2)

q) z^(-0,2)

r) a^(-1,2)

s) x^(-3,75)

-----

Anleitung:

a^(-3,75) =a^(-(15)/4)

j-59

3.011.)

A, B

Schreiben Sie x als Wurzel für a, b, c 'el 'R^+:

a) x^4 =c^3

b) x^(12) =b

c) x^7 =a^5

d) 3'pix^2 =a

-----

3.012.)

a) Gilt 'w(a^2 \*b^2) =a \*b?

Überprüfen Sie die Behauptung mit den Zahlen a =3 und b =4.

Argumentieren Sie mithilfe der Potenzregeln.

-----

b) Gilt 'w(a^2 +b^2) =a +b?

Überprüfen Sie die Behauptung mit den Zahlen a =3 und b =4.

Argumentieren Sie mithilfe der binomischen Formel.

-----

3.013.)

B

Ziehen Sie die Wurzel so weit wie möglich und vereinfachen Sie:

a) 'w(8)

b) ^(3)'w(8)

c) 'w(54)

d) ^(3)'w(54)

e) ^(3)'w(24)

f) ^(3)'w(192)

g) ^(3)'w(81)

h) 'w(29 +'w(72) -'w(50)

i) ^(3)'w(24) +2 \* ^(3)'w(81) - ^(3)'w(192)

j) ^(3)'w((32)/(81))

k) 8 \*'w(125) -5 \*'w(80) +2 \*'w(20)

-----

Teilweises Wurzelziehen:

^(n)'w(a^n \*b) = ^(n)'w(a^n) \* ^(n)'wb =a \* ^(n)'wb

-----

Für das teilweise Wurzelziehen ist es vorteilhaft, wenn man einige Quadrat- und Kubikzahlen im Kopf hat:

n | n^2 | n^3

2 | 4 | 8

3 | 9 | 27

4 | 16 | 64

5 | 25 | 125

6 | 36 | 216

7 | 49 | 343

8 | 64 | 512

9 | 81 | 729

-----

3.014.)

B

Ziehen Sie die Wurzel so weit wie möglich und vereinfachen Sie:

a) 'w(a^3)

b) ^(3)'w(a^5)

c) ^(4)'w(a^7)

d) ^(3)'w(a^8)

e) ^(3)'w(a^(29))

f) ^(5)'w(a^(25) \*b^(21))

g) ^(3)'w(x^(14) \*y)

h) ^(3)'w(81a^4 \*b^3 \*c^2 \*d)

-----

3.015.)

B

Bringen Sie den Faktor vor der Wurzel unter die Wurzel und vereinfachen Sie:

-----

a \* ^(n)'w(b) = ^(n)'w(a^n \*b)

-----

a) 3 \*'w(5)

b) 3 \* ^(3)'w(5)

c) 3^2 \* ^(3)'w(5/(3^2))

d) 3a^3 \* ^(4)'w((3b)/(a^(10))

e) 5 \*'w(3)

f) 2 \* ^(3)'w(2)

g) 3 \*'w(0,5)

h) 3 \* ^(4)'w(2/(27))

i) a \* ^(3)'w(a)

j) a \*'w(x/a)

k) x^2 \*'w(x/(x^5))

l) (2a)/3 \* ^(3)'w(9/(2a^2))

m) (ab)/c \*^(3)'w((c^2)/(ab^2))

n) 4 \*'w(1 -(x^2)/(16))

-----

3.016.)

B

Vereinfachen Sie:

a)'w(18) \*'w(2)

b) 'w(24) \*'w(54)

c) 'w(20) /'w(5)

d) 'w(96) /'w(6)

e) ('w(75)/('w3)

f) 'w((16)/(25))

-----

3.017.)

B

Vereinfachen Sie durch Ausmultiplizieren:

a) (4 +3 \*'w(2)) \*(3 -2 \*'w(2))

b) (8 -3 \*'w(5)) \*(7 +2 \*'w(5))

c) (5 -2 \*'w(3)) \*(2 +5 \*'w(3))

d) (3 +2 \*'w(6)) \*(5 -3 \*'w(3))

-----

3.018.)

B

Berechnen und vereinfachen Sie:

a) ('w(a) +'w(b))^2

b) ('w(8) +'w(6))^2

c) ('w(a) -'w(b))^2

d) ('w(10) -'w(8))^2

e) (2 \*'w(2) -'w(3))^3

f) (3 \*'w(2) -'w(3))^2

g) ('w(a) +'w(b)) \*('w(a) -'w(b))

-----

Binomische Formeln:

(a +b)^2 =a^2 +2ab +b^2

(a -b)^2 =a^2 -2ab +b^2

(a -b) \*(a +b) =a^2 -b^2

(a +b)^3 =a^3 +3a^2b +3ab^2 +b^3

(a -b)^3 =a^3 -3a^2b +3ab^2 -b^3

-----

3.019.)

B

Berechnen und vereinfachen Sie:

a) ('w(a) +'w(b))^3

b) (2 +'w(3))^3

c) ('w(a) -'w(b))^3

d) (3 -'w(5))^3

e) (2 \*'w(2) -'w(3))^3

f) (3 \*'w(2) -2 \*'w(3))^3

-----

3.020.)

B

Vereinfachen Sie:

a) 'w(x) \* ^(3)'w(x)

b) 'w(x) / ^(3)'w(x)

c) 'w(a) \* ^(8)'w(a)

d) ^(3)'w(x^2) \* ^(4)'w(x^3)

e) ^(p)'w(a) \* ^(q)'w(a)

f) ( ^(p)'w(a))/( ^(q)'w(a))

g) ^(13)'w(^(15)) \* ^(13)'w(a^(11))

h) 'w(a) \* ^(3)'w(a^2) \* ^(4)'w(a^3)

i) 'w(a) / ^(3)'w(a)

j) ^(7)'w(x^(25)) / ^(7)'w(x^4)

k) ^(5)'w(a) \* ^(3)'w(a^2)

l) ( ^(4)'w(a) \* ^(3)'w(a))/( ^(12)'w(a))

m) (a^2 \* ^(5)'w(a^2)/( ^(6)'w(a^8))

n) ^(6)'w(a^5 \*b^7) / ^(3)'w(a^2 \*b^3)

-----

Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten müssen vorder Multiplikation auf einen gemeinsamen Wurzelexponenten erweitert werden.

^(n)'w(a) \* ^(m)'w(b) = ^(n \*m)'w(a^m \*b^n)

j-60

3.021.)

B

Vereinfachen Sie:

a) ^(5)'w( ^(8)'(a^(10)))

b) ^(3)'w('w(2^(12)))

c) 'w( ^(3)'w(16))

d) 'w('w('w(2)))

e) ^(n)'w( ^(3)'w(a))

f) ^(n)'w('w(a))

g) 'w( ^(3)'w(10))

h) 'w(3'w(3'w(3)))

-----

3.022.)

B

Erweitern Sie die Brüche so, dass die Nenner rational werden, und vereinfachen Sie:

a) 2/('w(6))

b) (12)/('w(2))

c) 5/('w(2)

d) ('w(2) +'w(3))/('w(2))

e) 6/( ^(3)'w(4))

f) 1/( ^(5)'w(4))

g) (17)/( ^(3)'w(2 \*10^4))

h) 3/(2 +'w(7))

i) ('w(5))/('w(5) +'w(2))

j) (1 +'w(3))/(2 -'w(3))

-----

Anleitung zu 3.022 h):

Erweitern Sie mit 2 -'w(7) und wenden Sie die binomische Formel

(a -b) \*(a +b) =a^2 -b^2 an.

-----

3.023.)

B

Kürzen Sie den Exponenten und berechnen Sie, wenn möglich:

a) a^(8/6)

b) b^((3x)/(2x))

c) c^((12k)/4)

d) ^(15)'w(x^3)

e) ^(27)'w(a^9)

f) ^(8)'w(a^6)

g) ^(3)'w(a^9)

h) ^(12)'w(a^8)

i) ^(6)'w(8)

j) ^(3)'w(a^(12))

k) 'w(b^6)

l) ^(24)'w(x^(18))

-----

3.024.)

B

Vereinfachen Sie:

a^((n \*p)/(n \*q)) =a^(p/q)

-----

a) x^(1/3) \*x^(1/2)

b) (x^(1/3))^(1/2)

c) x^(1/3) /x^(1/2)

d) (x^(-1/2))^2

e) x^(-1/2) \*x^2

f) x^(-1/2) /x^2

-----

3.025.)

A, B, C, D

Die Aufprallgeschwindigkeit v (in m/s) eines aus der Höhe h (in m) fallen gelassenen Gegenstands ist gegeben durch v ='w(2 \*g \*h) (g ~~9,81 m/s^2 Erdbeschleunigung).

a) Erklären Sie, um wie viel Prozent sich die Aufprallgeschwindigkeit verändert, wenn die Höhe verdoppelt wird.

-----

b) Um das Wievielfache muss die Höhe verändert werden, um die Aufprallgeschwindigkeit zu verdoppeln?

-----

c) Stellen Sie die Formel nach der Variablen h um.

-----

3.026.)

A, B, C, D

Die Schwingungsdauer T (in s) eines Pendels mit der Länge L (in m) ist gegeben durch T =2'pi \*'w(L/g).

a) Erklären Sie, um wie viel Prozent sich die Schwingungsdauer verändert, wenn die Länge des Pendels verdreifacht wird.

-----

b) Um das Wievielfache muss die Länge des Pendels verändert werden, um die Schwingungsdauer zu verdreifachen?

-----

c) Stellen Sie die Formel nach der Variablen L um.

-----

3.027.)

A, B, C, D

Für die Schwankungsbreite Euro bei einer Stichprobe vom Umfang n gilt:

e =1,96 \*'w((p \*(1 -p))/n)

p Stichprobenanteil in Prozent

e Schwankungsbreite in Prozent des Stichprobenanteils p

n Umfang der Stichprobe

a) Erklären Sie, um wie viel Prozent sich die Schwankungsbreite Euro verändert, wenn der Stichprobenumfang n verdoppelt wird.

-----

b) Um das Wievielfache muss der Stichprobenumfang n verändert werden, um die Schwankungsbreite Euro zu halbieren?

-----

c) Stellen Sie die Formel nach der Variablen n um.

-----

3.028.)

A, B, C, D

Die Cobb-Douglas-Funktion Y =A^(0,8) \*K^(0,2) beschreibt den Produktionsoutput Y in Abhängigkeit von dem Arbeitseinsatz A und dem Kapitaleinsatz K.

a) Schreiben Sie die Cobb-Douglas-Funktion in Wurzelschreibweise.

-----

b) Erklären Sie, um wie viel Prozent sich der Output Y verändert, wenn der Arbeitseinsatz um 50 % erhöht wird.

-----

c) Erklären Sie, um das Wievielfache der Kapitaleinsatz verändert werden muss, um den Output um 25 % zu erhöhen.

-----

d) Stellen Sie die Formel nach der Variablen A um.

-----

Abb.: Die Schwingungsdauer eines Pendels hängt nur von der Länge, nicht aber von der Masse des Pendels ab.

-----

Tipp: Hat z. B. eine Partei bei einer Meinungsumfrage vom Umfang n =400 einen Stichprobenanteil p =0,3 =30 %, so beträgt die Schwankungsbreite

e =1,96 \*'w((0,3 \*(1 -0,3))/(400)) ~~4,5 %

Mit hoher Wahrscheinlichkeit wird die Partei bei der Wahl einen Stimmenanteil von 30 % +/-4,5 % erhalten. Der Stimmenanteil wird somit zwischen 25,5 % und 34,5 % liegen.

j-61

## \*\*-2 - 3.2 Potenzfunktionen

### \*\*-3 - 3.2.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten

##-Beispiel 3.18: Potenzfunktionen (B)

Zeichnen Sie die Graphen zu einigen Funktionen mit y =x^n.

n 'el 'N \ {0, 1}; D ='R

n =2: y =x^2

x | y

-2 | 4

-1 | 1

-1/2 | 1/4

0 | 0

1/2 | 1/4

1 | 1

2 | 4

Der Graph der Funktion mit y =x^2 wird als quadratische Parabel bezeichnet.

-----

n =4: y =x^4

x | y

-2 | 16

-1 | 1

-1/2 | 1/16

0 | 0

1/2 | 1/16

1 | 1

2 | 16

Der Graph der Funktion mit y =x^4 wird als Parabel 4. Ordnung oder als Parabel 4. Grades bezeichnet.

-----

n =3: y =x^3

x | y

-2 | -8

-1 | -1

-1/2 | 1/8

0 | 0

1/2 | 1/8

1 | 1

2 | 8

Der Graph der Funktion mit y =x^3 wird als kubische Parabel, als Parabel 3. Ordnung oder Parabel 3. Grades bezeichnet.

-----

n =5: y =x^5

x | y

-2 | -32

-1 | -1

-1/2 | -1/32

0 | 0

1/2 | 1/32

1 | 1

2 | 32

Der Graph der Funktion mit y =x^5 wird als Parabel 5. Ordnung oder als Parabel 5. Grades bezeichnet.

-----

|Definition: Potenzfunktion|

* y =a \*x^n heißt Potenzfunktion, a 'el 'R \ {0}, n 'el 'Z
* Die Graphen der Potenzfunktionen mit y =x^n für n >=2 heißen Parabeln n-ten Grades, n Der Graph von y =x^2 heißt Grundparabel.
* Die Graphen der Potenzfunktionen mit y =x^(-n) für n >=1 heißen Hyperbeln n-ten Grades.

-----

|Potenzfunktion:|

y =a \*x^n

-----

Für n =0 ergibt sich als Spezialfall die konstante Funktion y =a

Für n =1 ergibt sich als Spezialfall die lineare Funktion y =a \*x.

j-62

|Eigenschaften der Potenzfunktionen mit y =x^n für n >=2|

Graphen von Potenzfunktionen mit geraden Exponenten sind symmetrisch zur y-Achse, ihre Wertemenge ist 'R^+\_0.

Graphen von Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten sind symmetrisch zum Koordinatenursprung, ihre Wertemenge ist 'R.

Die Punkte (0|0) und (1|1) gehören allen Parabeln der Funktionen mit y =x^n an.

Potenzfunktionen geraden Grades sind in 'R nicht eindeutig umkehrbar:

z. B.: x =2 => x^2 =4, aber auch x =-2 => x^2 =4

allgemein: x =a => x^(2n) =a^(2n) für a, x 'el 'R (Umkehrung gilt nicht).

Potenzfunktionen ungeraden Grades sind in 'R eindeutig umkehrbar:

z. B.: x =2 <=> x^3 =2^3

allgemein: x =a <=> x^(2n +1) =a^(2n +1) für a, x 'el 'R

In 'R^+\_0 sind alle Potenzfunktionen eindeutig umkehrbar.

-----

##-Beispiel 3.19: Potenzfunktion n-ten Grades (B)

Stellen Sie einige Potenzfunktionen mit y =a \*x^n grafisch dar und vergleichen Sie die Gestalt ihrer Graphen:

y =a \*x^n

x | -2 | -1 | -1/2 | 0 | 1/2 | 1 | 2

y =x^2 | 4 | 1 | 1/4 | 0 | 1/4 | 1 | 4

y =2x^2 | 8 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 1 | 8

y =1/4x^2 | 1 | 1/4 | 1/16 | 0 | 1/16 | 1/4 | 1

y =-x^2 | -4 | -1 | -1/4 | 0 | -1/4 | -1 | -4

-----

Drei nach oben offene und eine nach unten offene Parabel, die sich im Anstieg unterscheiden. Alle gehen durch den Ursprung (0|0).

-----

|Eigenschaften der Potenzfunktionen mit y =a \*x^n für n >=2|

Der Koeffizient a (a \=1) vor x^n beeinflusst den Anstieg der Kurve:

a >1 bewirkt eine Dehnung (Streckung) in y-Richtung, verglichen mit dem Graphen von y =x^n.

0 <a <1 bewirkt eine Stauchung in y-Richtung.

Die Punkte (0|0) und (1|a) gehören allen Parabeln der Funktionen mit y =a \*x^n an.

Die Graphen von y =a \*x^n und diejenigen von y =-a \*x^n liegen spiegelbildlich zur x-Achse.

Für a >0 ist die Parabel gerader Ordnung nach oben, für a <0 nach unten geöffnet.

-----

##-Beispiel 3.20: Hyperbeln (B)

Zeichnen Sie die Graphen zu einigen Funktionen mit y =x^(-n) mit n 'el 'N \ {0} und D ='R \ {0}:

a) n =1 und n =3

x | -2 | -1 | -1/2 | 0 | 1/2 | 1 | 2

y =x^(-1) =1/x | -1/2 | -1 | -2 | nicht def. | 2 | 1 | 1/2

y =x^(-3) =1/(x^3) | -1/8 | -1 | -8 | nicht def. | 8 | 1 | 1/8

j-63

##-Beispiel 3.20: Hyperbeln (Fortsetzung) (B)

b) n =2 und n =4

x | -2 | -1 | -1/2 | 0 | 1/2 | 1 | 2

y =x^(-2) =1/(x^2) | 1/4 | 1 | 4 | nicht def. | 4 | 1 | 1/4

y =x^(-4) =1/(x^4) | 1/(16) | 1 | 16 | nicht def. | 16 | 1 | 1/16

Der Graph einer Funktion mit y =x^(-n) wird als Hyperbel bezeichnet.

-----

|Eigenschaften von Hyperbeln n-ten Grades|

* Die Hyperbeln geraden Grades sind symmetrisch zur y-Achse, die Hyperbeln ungeraden Grades sind symmetrisch zum Koordinatenursprung.
* Die Hyperbeln sind an der Stelle x =0 unterbrochen, für x =0 existiert kein Funktionswert, 0 gehört der Definitionsmenge nicht an.
* Die x-Achse und die y-Achse sind Asymptoten: Mit wachsendem x-Wert nähert sich die Hyperbel mehr und mehr der x-Achse, erreicht die x-Achse aber nicht.
* Der Punkt (1|1) liegt auf jeder Hyperbel mit y =1/(x^n).
* Nimmt x negative Werte an, so nähert sich der Graph von y =1/(x^n) mit wachsendem Wert von |x| ebenfalls der x-Achse, und zwar für gerade Exponenten von der positiven Seite der y-Achse und für ungerade Exponenten von der negativen.

-----

Zusammenfassung Parabeln und Hyperbeln

n gerade

Parabeln: D ='R, W ='R^+\_0

-----

Hyperbeln: D =R \ {0}, W ='R^+

Graph symmetrisch zur y-Achse

-----

n ungerade

Parabeln: D ='R, W ='R

Hyperbeln: D ='R \ {0}, W ='R \ {0}

Graph symmetrisch zum Ursprung

j-64

#### \*\*-4 - Übungsaufgaben

3.029.)

B, D

Zeichnen Sie den Graphen der folgenden Funktion. Erklären Sie, welche Wirkung (Streckung, Stauchung, Spiegelung) jeweils der Koeffizient a auf den Verlauf des Graphen der Funktion mit y =a \*x^n in Bezug auf die Parabel mit y =x^n hat.

a) y =x^3

b) y =2x^3

c) y =1/(20)x^5

d) y =-1/(100)x^6

e) y =x^4

f) =1/5 x^4

-----

3.030.)

B, D

Zeichnen Sie den Graphen der folgenden Funktion.

Erklären Sie, welche Wirkung (Streckung, Stauchung, Spiegelung) jeweils der Koeffizient a auf den Verlauf des Graphen der Funktion mit y =a \*x^(-n) in Bezug auf die Hyperbel mit y =x^(-n) hat.

a) y =-x^(-1)

b) y =2x^(-2)

c) y =1/2x^(-3)

d) y =-1/(10)x^(-4)

-----

3.031.)

A

Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der dargestellten Funktionsgraphen von der Form y =c \*x^n mit n 'el 'Z und c 'el {-2; -1; -1/2; 0 1/2; 1; 2}.

j-65

### \*\*-3 - 3.2.2 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

|Definition: Wurzelfunktionen|

Funktionen mit y =x^(1/n) = ^(n)'w(x) für x 'el 'R^+\_0, n 'el 'N \ {0, 1} heißen Wurzelfunktionen.

-----

Wurzelfunktionen mit y =x^(1/n) = ^(n)'w(x) sind die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen mit y =x^n für D =W ='R^+\_0.

Die Graphen der Wurzelfunktionen erhält man durch Spiegelung der Graphen der entsprechenden Potenzfunktionen an der 1. Mediane.

-----

##-Beispiel 3.21: Wurzelfunktionen (B)

a) Erstellen Sie für die Wurzelfunktion mit y =x^(1/2) ='w(x) eine Wertetabelle für x 'el {0, 1, 2, 3, 4}.

Zeichnen Sie den Graphen der Wurzelfunktion.

Zeichnen Sie die entsprechende Potenzfunktion y =x^2 und die 1. Mediane y =x in die Grafik ein.

Die Punkte auf dem Graphen der Wurzelfunktion erhält man durch Vertauschen der Koordinaten der Punkte, die auf dem Graphen der Potenzfunktion liegen.

Z. B.: Der Punkt (2|4) liegt auf dem Graphen der Potenzfunktion, der Punkt (4|2) liegt auf dem Graphen der Wurzelfunktion.

Das Vertauschen der Koordinaten entspricht geometrisch einer Spiegelung der Graphen an der 1. Mediane.

-----

b) Zeichnen Sie den Graphen der Wurzelfunktion mit y =x^(1/3) = ^(3)'w(x) mit einem technologischen Hilfsmittel.

Da die kubische Potenzfunktion mit y =x^3 auf 'R eindeutig umkehrbar ist, zeichnen Mathematikprogramme die kubische Wurzelfunktion mit y =x^(1/3) = ^(3)'w(x) auch für negative reelle Zahlen. Dies widerspricht allerdings der mathematischen Definition für Wurzeln.

-----

x | y ='w(x)

0 | 0

1 | 1

2 | 1,41

3 | 1,73

4 | 2

-----

Hinweis: Um Probleme bei Berechnungen mit Wurzeln zu vermeiden, werden Wurzelfunktionen nur für nichtnegative reelle Werte definiert.

-----

#### \*\*-4 - Übungsaufgaben

3.032.)

B

Zeichnen Sie jeweils den Graphen der Funktion.

a) y =x^(1/5)

b) y =-x^(1/3) +1

c) y =x^(-2/3)

d) y =-x^-1/3)

e) y = ^(4)'w(2x)

f) y ='w(x +1)

j-66

#### \*\*-4 - Ziele erreicht?

Z 3.1.)

A

Ergänzen Sie jeweils die fehlende Schreibweise.

Wurzelschreibweise: ^(3)'w(a^2)

Potenzschreibweise: **[]**

-----

Wurzelschreibweise: **[]**

Potenzschreibweise: x^(-1/4)

-----

Wurzelschreibweise: **[]**

Potenzschreibweise: 4y^(2/5)

-----

Wurzelschreibweise: 3 \*'w(a^2 +b^2)

Potenzschreibweise: **[]**

-----

Wurzelschreibweise: **[]**

Potenzschreibweise: -x^(3/5)

-----

Z 3.2.)

B

Vereinfachen Sie:

a) ^(3)'w(a) \*'w(a)

b) (- ^(4)'w(x^3))^2

c) ( ^(4)'w(25x))/('w(5))

d) ^(3)'w(x) +2 \* ^(3)'w(2y) -1/2 \* ^(3)'w(x)

-----

Z 3.3.)

B, D

Argumentieren Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

a) ('w(8a))/('w(2a)) =2

b) 1/('w(a)) =('w(a))/a

c) 'w(a^2 -b^2) =a- b

d) 4 \*'w(x/2) =2 \*'w(2x)

-----

Z 3.4.)

A, B, D

Das Volumen V einer Kugel mit dem Radius r wird mit V =4/3 \*r^3'pi berechnet.

a) Stellen Sie die Formel nach der Variablen r um.

-----

b) Berechnen Sie den Radius einer kugelförmigen Boje mit dem Volumen 32/3 'pi dm^3.

-----

c) Erklären Sie, um wie viel Prozent der Radius einer Kugel verändert wurde, wenn sich ihr Volumen verdoppelt hat.

-----

d) Erklären Sie, um wie viel Prozent der Radius einer Kugel verändert wurde, wenn sich ihr Volumen halbiert hat.

-----

Z 3.5.)

A, C, D

Gegeben sind die Graphen von Funktionen der Form y =c \*x^n mit n 'el 'Z und c 'el 'Q.

a) Lesen Sie aus den Graphen ab, für welche der Funktionen n positiv und für welche n negativ ist.

-----

b) Erklären Sie, für welche Funktionen n eine gerade Zahl ist.

-----

c) Lesen Sie aus den Graphen ab, für welche der Funktionen c eine negative Zahl ist.

-----

d) Argumentieren Sie, wie man den Parameter c der Funktionsgleichung von A verändern müsste, damit der Graph durch den Punkt (1|-0,5) verläuft.

j-67

# \*\*-1 - 4 Gleichungen höheren Grades und Polynomfunktionen

Die ältesten Überlieferungen von quadratischen Gleichungen finden sich auf Keilschrifttafeln aus 2000 v. Chr. Dieses babylonische Verfahren ist ganz ähnlich unseren heutigen Formeln.

Bei den Griechen löste Euklid von Alexandria (365 bis 300 v. Chr.) quadratische Gleichungen auf rein geometrische Weise durch Flächenverwandlungen. Rechnerische Lösungsmethoden finden sich in den Arbeiten von Archimedes von Syrakus (um 287 bis 212 v. Chr.) sowie bei Heron von Alexandria (um 100 n. Chr.) und Diophantos von Alexandria (250 n. Chr.).

Lange zweifelte man, ob kubische Gleichungen, also Gleichungen dritten Grades, lösbar seien. Die Lösung der reduzierten kubischen Gleichung x^3 +ax +b =0 gelang um 1500 dem Italiener Scipione del Ferro (1465 bis 1526), der die Lösungsformel aber geheim hielt und sie nur wenigen Schülern mitteilte.

Niccolo Tartaglia (1499 bis J557) entdeckte um 1530 ebenfalls die Lösungsformel, die auch er geheim hielt. Gegenüber dem Arzt und Mathematiker Geronimo Cardano (1501 bis 1576) deutete er die Formel an, nachdem dieser Geheimhaltung geschworen hatte. Cardano fand die Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung, die er unter seinem Namen 1545 veröffentlichte, was zu einem heftigen Rechtsstreit mit Tartaglia über die Urheberschaft führte. Die Lösungsformel heißt bis heute Carda- nische Formel. Gleichzeitig gelang Ludovico Ferrari (1522 bis 1565), einem Schüler Cardanos, die Lösung der Gleichung vierten Grades.

Dass sich aber Gleichungen fünften und höheren Grades nicht allgemein lösen lassen, bewies der norwegische Mathematiker Niels Henrik Abel (1802 bis 1829) im Jahr 1824.

Erweitert man die reellen Zahlen auf den Zahlenbereich der komplexen Zahlen, dann gilt der von Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) erstmals bewiesene Fundamentalsatz der Algebra. Dieser besagt, dass eine Gleichung n-ten Grades genau n Lösungen in der Menge der komplexen Zahlen hat.

-----

Tipp: Eine Gleichung der Form ax^2 +bx +c =0 heißt allgemeine quadratische Gleichung.

-----

Tipp: Eine Gleichung der Form ax^3 +bx^2 +cx +d =0 heißt allgemeine kubische Gleichung oder Gleichung dritten Grades.

-----

#### \*\*-4 - Meine Ziele

Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

* quadratische Funktionen grafisch darstellen und ihre Eigenschaften interpretieren,
* quadratische Funktionen aus drei gegebenen Punkten bzw. aus dem Scheitel und einem weiteren Punkt aufstellen,
* quadratische Funktionen in unterschiedlichen Kontexten, insbesondere mit Wirtschaftsbezug, anwenden,
* quadratische Gleichungen lösen und deren Lösungen als Nullstellen von quadratischen Funktionen interpretieren,
* Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen bestimmen und berechnen,
* quadratische Terme nach dem Satz von Vieta in Linearfaktoren zerlegen,
* Polynomfunktionen grafisch darstellen und ihre Eigenschaften interpretieren.

j-68

#### \*\*-4 - Worum geht's hier?

Im vorigen Jahrgang haben Sie mit linearen Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen gerechnet.

Der Kostenverlauf kann auch

* progressiv sein, wenn die variablen Kosten bei steigender Produktion stärker als linear zunehmen (etwa aufgrund teurer Überstunden) oder
* degressiv sein, wenn die variablen Kosten bei steigender Produktion weniger als linear zunehmen (etwa aufgrund von günstigen Preisen bei großen Mengeneinkäufen).

-----

progressiv: Die Steigung nimmt zu.

degressiv: Die Steigung nimmt ab.

Progressive und degressive Kostenverläufe können im einfachsten Fall durch eine quadratische Funktion K mit der Funktionsgleichung K(x) =ax^2 +bx +F beschrieben werden.

Die Kostenrechnungsabteilung eines Chip-Herstellers ermittelt als Gesamtkosten pro Tag in Abhängigkeit von der Produktionsmenge (1 ME =100000 Chips) näherungsweise die Kostenfunktion K mit K(x) =0,1x^2 +2x +100 (1 GE =10.000,00 Euro).

-----

ME bedeutet Mengeneinheit.

GE bedeutet Geldeinheit.

-----

Tipp: Eine quadratische Funktion f hat die Funktionsgleichung f(x) =ax^2 +bx +c.

-----

Das Unternehmen kann die Chips auf dem Markt zu einem Preis p =9 GE pro ME verkaufen.

Sie erhalten die

* Erlösfunktion: E(x) =9x sowie die
* Gewinnfunktion: G(x) =E(x) -K(x) =

=9x -(0,1x^2 +2x +100) =-0,1x^2 +7x -100

-----

Abb.: Integrierte Schaltkreise, kurz Chips genannt, haben die rasante Entwicklung der Computertechnologie ermöglicht.

-----

Stellen Sie die Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion tabellarisch und grafisch dar:

x in ME | K(x) in GE | E(x) in GE | G(x) in GE

0 | 100 | 0 | -100

10 | 130 | 90 | -40

20 | 180 | 180 | 0

30 | 250 | 270 | 20

40 | 340 | 360 | 20

50 | 450 | 450 | 0

60 | 580 | 540 | -40

70 | 730 | 630 | -100

Bei einer Produktion zwischen 20 ME und 50 ME befindet sich das Unternehmen im Gewinnbereich. Um die beiden Grenzen des Gewinnbereichs (untere und obere Gewinngrenze) berechnen zu können, setzen Sie den Gewinn gleich null.

Sie erhalten eine allgemeine quadratische Gleichung:

-0,1x^2 +7x -100 =0

-----

Durch Multiplikation mit (-10) erhalten Sie eine normierte quadratische Gleichung:

x^2 -70x +1000 =0

Diese Gleichung hat zwei Lösungen: x\_1 =20 und x\_2 =50, wie man in der Wertetabelle und in der Grafik sieht.

-----

Tipp: In einer quadratischen Gleichung tritt die Variable im Quadrat auf.

Allgemeine quadratische Gleichung:

ax^2 +bx +c =0

-----

Normierte quadratische Gleichung:

x^2 +px +q =0

j-69

## \*\*-2 - 4.1 Quadratische Funktionen

|Definition: Quadratische Funktion|

* Eine Funktion mit der Gleichung y =ax^2 +bx +c für a, b, c 'el 'R, a \=0 heißt quadratische Funktion.
* Der Graph einer quadratischen Funktion heißt Parabel.

-----

* a, b und c heißen Koeffizienten.
* Der Ausdruck ax^2 heißt quadratisches Glied, bx heißt lineares Glied und c heißt konstantes Glied.
* c liefert den Schnittpunkt der quadratischen Funktion mit der y-Achse: Y(0|c).

Die Funktion mit der Gleichung y =x^2 ist die einfachste quadratische Funktion.

Ihr Graph ist die Grundparabel.

-----

Hinweis: Es wird a \=0 festgelegt, denn für a =0 würde der quadratische Ausdruck ax^2 wegfallen und man hätte eine lineare Funktion.

-----

##-Beispiel 4.1: Grundparabel (B, C)

a) Erstellen Sie eine Wertetabelle für die quadratische Funktion mit y =x^2 (Grundparabel) und zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

-----

b) Interpretieren Sie den Verlauf der Grundparabel im Hinblick auf Symmetrie und spezielle Punkte.

-----

Lösung:

a)

x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2

y | 4 | 1 | 0 | 1 | 4

-----

b) Die Grundparabel ist symmetrisch zury-Achse und hat in S(0|0) ihren tiefsten Punkt, den Scheitelpunkt.

-----

##-Beispiel 4.2: Gestreckte und gestauchte Parabeln (B, C)

a) Zeichnen Sie die Parabeln f, g und h mit f(x) =2 \*x^2, g(x) =0,5 \*x^2 und h(x) =-0,25x^2 in ein Koordinatensystem.

-----

b) Interpretieren Sie jeweils die Bedeutung der Koeffizienten 2, 0,5 und -0,25 für den Verlauf der Parabeln.

-----

Lösung:

a) Nicht darstellbar.

b) Bei f bewirkt der Koeffizient 2 eine Streckung der Grundparabel in y-Richtung.

Bei g bewirkt der Koeffizient 0,5 eine Stauchung der Grundparabel in y-Richtung.

Bei h bewirkt der Koeffizient -0,25 eine Stauchung der Grundparabel in y-Richtung und zusätzlich eine Spiegelung an der x-Achse.

-----

Die Parabeln mit der Gleichung y =a \*x^2 sind gegenüber der Grundparabel

* für |a|>1 in y-Richtung gestreckt,
* für |a|<1 in y-Richtung gestaucht und
* für a <0 zusätzlich an der x-Achse gespiegelt und damit nach unten geöffnet.

-----

Tipp:

Für a >0 ist die Parabel nach oben geöffnet.

Für a <0 ist die Parabel nach unten geöffnet.

-----

##-Beispiel 4.3: In y-Richtung verschobene Parabeln (B, C)

a) Zeichnen Sie die Parabeln f und g mit f(x) =x^2 +1 und g(x) =x^2 -2 in ein Koordinatensystem.

-----

b) Interpretieren Sie jeweils die Bedeutung der Konstanten 1 und -2 für den Verlauf der Parabeln.

j-70

##-Beispiel 4.3: in y-Richtung verschobene Parabeln (Fortsetzung) (B, C)

Lösung:

a) Nicht darstellbar.

b) Bei f bewirkt die Konstante 1 eine Verschiebung der Grundparabel in y-Richtung nach oben.

Bei g bewirkt die Konstante -2 eine Verschiebung der Grundparabel in y-Richtung nach unten.

-----

Die Parabeln mit der Gleichung y =x^2 +ys sind gegenüber der Grundparabel

* für y\_S >0 in y-Richtung nach oben verschoben,
* für y\_S <0 in y-Richtung nach unten verschoben.

-----

##-Beispiel 4.4: In x-Richtung verschobene Parabeln (B, C)

a) Zeichnen Sie die Parabeln f und g mit f(x) =(x -1)^2 und g(x) =(x +2)^2 =(x -(-2))^2 in ein Koordinatensystem.

-----

b) Interpretieren Sie jeweils die Bedeutung der Konstanten 1 und -2 für den Verlauf der Parabeln.

-----

Lösung:

a) Nicht darstellbar.

b) Bei f bewirkt die Konstante 1 eine Verschiebung der Grundparabel in x-Richtung nach rechts.

Bei g bewirkt die Konstante -2 eine Verschiebung der Grundparabel in x-Richtung nach links.

-----

Die Parabeln mit der Gleichung y =(x -x\_S)^2 sind gegenüber der Grundparabel

* für x\_S >0 in x-Richtung nach rechts verschoben,
* für x\_S <0 in x-Richtung nach links verschoben.

-----

##-Beispiel 4.5: Verschobene Parabeln (B, C)

a) Zeichnen Sie die Parabeln f, g und h mit f(x) =(x -1)^2 -1,5, g(x) =2 \*(x +2)^2 +1 und h(x) =-0,25 \*(x -2)^2 +3 in ein Koordinatensystem.

-----

b) Interpretieren Sie jeweils den Verlauf der Graphen im Hinblick auf die Verschiebung der Grundparabel.

-----

Lösung:

a) Nicht darstellbar.

b) Beim Graphen von f ist die Grundparabel in den Punkt S(1|-1,5) verschoben.

Beim Graphen von g ist die Grundparabel um den Faktor 2 gestreckt und in den Punkt S(-2|1) verschoben.

Beim Graphen von h ist die Grundparabel um den Faktor 0,25 gestaucht, nach unten geöffnet und in den Punkt S(2|3) verschoben.

-----

|Verschieben von Parabeln|

Die Parabeln y =a \*(x -x\_S)^2 +y\_S sind gegenüber der Grundparabel um x\_S in x-Richtung und um y\_S in y-Richtung verschoben.

Der Scheitel (0|0) der Grundparabel wird in den Punkt S(x\_S|y\_S) verschoben.

j-71

|Definition: Scheitelpunktform der quadratischen Funktion|

* Die Darstellung y =a \*(x -x\_S)^2 +y\_S heißt Scheitelpunktform der quadratischen Funktion.
* Der Punkt S(x\_S|y\_S) heißt Scheitelpunkt oder Scheitel.

-----

Abb.: Der Mittelscheitel eines Kopfs ist der Hochpunkt einer nach unten geöffneten Parabel.

-----

Scheitel einer allgemeinen quadratischen Funktion

Den Scheitel des Graphen einer allgemeinen quadratischen Funktion mit y =ax^2 +bx +c erhält man mit S(-b/(2a)|(4ac -b^2)/(4a)).

-----

Begründung:

Durch einen Koeffizientenvergleich können die Scheitelkoordinaten für die allgemeine quadratische Funktion ermittelt werden:

a \*(x -x\_S)^2 +y\_S =ax^2 +bx +c

a \*x^2 -2ax\_S \*x +ax\_S^2 +y\_S =ax^2 +bx +c

-----

Koeffizienten des linearen Glieds:

-2ax\_S =b <=> x\_S =-b/(2a)

Konstanten:

a \*(b^2)/(4a^2) +y\_S =c <=> y\_S =(4ac -b^2)/(4a)

-----

Somit erhält man für den Scheitel: S(-b/(2a)|(4ac -b^2)/(4a))

Die allgemeine quadratische Funktion y =ax^2 +bx +c lässt sich durch quadratisches Ergänzen in die Scheitelpunktform bringen.

-----

Tipp: Bei der quadratischen Ergänzungwird die binomische Formel an gewendet:

x^2 +2ax +a^2 =(x +a)^2

x^2 -2ax +a^2 =(x -a)^2

-----

##-Beispiel 4.6: Scheitelpunktform mit quadratischem Ergänzen (B, C)

Ermitteln Sie die Scheitelpunktform, geben Sie den Scheitelpunkt an und ermitteln Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse:

a) y =x^2 -6x +5

Koeffizienten: a =1, b =-6, c =5

Der Ausdruck x^2 -6x kann nach der binomischen Formel mit der Zahl 9 zu einem "vollständigen Quadrat" ergänzt werden:

y =x^2 -2 \*3 \*x +9 -9 +5

y =(x -3)^2 -4

Scheitel: S(3|-4)

oder: S(-b/(2a)|(4ac -b^2)/(4a)) =S(-(-6)/(2 \*1)|(4 \*1 \*5 -(-6)^2)/(4 \*1)) =S(3|-4)

Schnittpunkt mit der y-Achse: Y(0|c) =Y(0|5)

-----

b) y =x^2 +5x +5

Koeffizienten: a =1, b =5, c =5

y =x^2 +2 \*5/2 \*x +(25)/4 -(25)/4 +5

y =(x +5/2)^2 -5/4

Scheitel: S(-5/2|-5/4)

oder: S(-b/(2a)|(4ac -b^2)/(4a)) =S(-5/(2 \*1)|(4 \*1 \*5 -5^2)/(4 \*1))

=S(-5/2|-5/4)

Schnittpunkt mit der y-Achse: Y(0|c) =Y(0|5)

j-72

##-Beispiel 4.6: Scheitelpunktform mit quadratischem Ergänzen (Fortsetzung) (B, C)

c) y =2x^2 -3x +1

Koeffizienten: a =2, b =-3, c =1

y =2 \*(x^2 -3/2x) +1

y =2 \*(x^2 -2 \*3/4 \*x +9/16 -9/16) +1

y =2 \*(x -3/4)^2 -1/8

Scheitel: S(3/4|-1/8)

oder: S(-b/(2a)|(4ac -b^2)/(4a)) =S(-(-3)/(2 \*2)|(4 \*2 \*1 -(-3)^2)/(4 \*2) =S(3/4|-1/8)

Schnittpunkt mit der y-Achse: Y(0|c) =Y(0|1)

-----

Eine quadratische Funktion mit der Gleichung y =ax^2 +bx +c ist durch die drei Koeffizienten a, b und c eindeutig bestimmt. Diese lassen sich ermitteln, wenn drei Punkte des Graphen gegeben sind.

-----

##-Beispiel 4.7: Parabel durch drei Punkte (A, B)

Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion, deren Graph durch die Punkte A(1|5), B(2|6,5) und C(3|7) verläuft.

-----

Lösung:

Setzen Sie die Koordinaten der drei Punkte in die Funktionsgleichung y =ax^2 +bx +c ein. Sie erhalten ein lineares Gleichungssystem mit den drei Koeffizienten a, b und c:

A(1|5): 5 =a \*1^2 +b \*1 +c

a +b +c =5

-----

B(2|6,5): 6,5 =a \*2^2 +b \*2 +c

4a +2b +c =6,5

-----

C(3|7): 7 =a \*3^2 +b \*3 +c

9a +3b +c =7

-----

Lösung des Gleichungssystems: a =-0,5, b =3 und c =2,5

Funktionsgleichung: y =-0,5x^2 +3x +2,5

-----

Eine quadratische Funktion ist eindeutig bestimmt, wenn der Scheitel S(x\_S|y\_S) und ein weiterer Punkt gegeben sind.

-----

##-Beispiel 4.8: Parabel durch Punkt und Scheitel (A, B)

Ermitteln Sie die Scheitelpunktform der quadratischen Funktion, deren Graph durch den Punkt A(1|2) verläuft und den Scheitel S(5|4) hat.

-----

Lösung:

1. Schritt: Setzen Sie die Koordinaten des Scheitels S in die Scheitelpunktform

y =a \*(x -x\_S)^2 +y\_S ein:

y =a \*(x -5)^2 +4

-----

2. Schritt: Setzen Sie die Koordinaten des Punkts A in die Scheitelpunktform ein:

2 =a \*(1 -5)^2 +4 |-4

-2 =16a

a =-1/8

Scheitelpunktform: y =-1/8 \*(x -5)^2 +4

j-73

#### \*\*-4 - Übungsaufgaben

4.001.)

B, C

Skizzieren Sie die quadratischen Funktionen und interpretieren Sie die Koeffizienten im Hinblick auf den Verlauf des Graphen im Vergleich zur Grundparabel mit y =x^2:

a)

f\_1(x) =(x^2)/4

f\_2(x) =-(x^2)/2

f\_3(x) =-2x^2

-----

b)

g\_1(x) =x^2 -1

g\_2(x) =(x^2)/2 +1

g\_3(x) =-2x^2 +3

-----

c)

h\_1(x) =(x +3)^2

h\_2(x) =2 \*(x -1)^2

h\_3(x) =-1/2 \*(x -2)^2

-----

d)

i\_1(x) =(x -1)^2 -2

i\_2(x) =-(x +2)^2 +1

i\_3(x) =1/2 \*(x -3)^2 -1

-----

4.002.)

A

Erstellen Sie jeweils die Funktionsgleichung der in der Randspalte dargestellten Funktionsgraphen.

(Hinweis: Die Scheitel haben ganzzahlige Koordinaten.)

-----

4.003.)

C, D

Ordnen Sie die in der Randspalte dargestellten Funktionsgraphen den entsprechenden Funktionsgleichungen zu.

Begründen Sie Ihre Zuordnung:

A: y =2 \*(x +4)^2 -4

B: y =-1(2 \*(x -4)^2 +4

C: y =-(x -2)^2 -1

D: y =1/2 \*(x -2)^2 -1

-----

4.004.)

D

Begründen Sie, welche der folgenden Abbildungen der Funktion f entspricht, wenn f(x) =ax^2 +bx +c und a >0 und c <0 ist.

(Quelle: Bildungsstandards)

-----

4.005.)

A, B

Übertragen Sie die Funktionsgleichung mithilfe des quadratischen Ergänzens in die Scheitelpunktform und ermitteln Sie jeweils den Scheitel:

a) y =x^2 -6x +8

b) y =x^2 -6x +9

c) y =x^2 -6x +10

d) y =x^2 +2x

e) y =x^2 +2x +1

f) y =x^2 +2x +2

g) y =x^2 -3x +1

h) y =x^2 -x +2

i) y =x^2 +5x +6

j) y =-x^2 +4x

k) y =2x^2 +3x +1

l) y =1/2 x^2 +x +1

-----

Scheitelpunktform: y =a \*(x -x\_S)^2 +y\_S

Scheitel: S(-b/(2a)|(4ac -b^2)/(4a))

j-74

4.006.)

A, B

Ermitteln Sie die Gleichung der quadratischen Funktion, die durch die angegebenen Punkte geht.

Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion.

a) O(0|0), P(1|1), Q(2|3)

b) A(0|1), B(3|13), C(-1|5)

c) P(-2|1), Q(4|4), R(2|5)

d) P\_1(5|30), P\_2(10|40), P\_3(20|90)

-----

Gleichung der quadratischen Funktion:

y =ax^2 +bx +c

-----

4.007.)

A, B, D

Skizzieren Sie in der Grafik jene Parabel, die den Scheitel S hat und durch den Punkt A verläuft.

Argumentieren Sie, welches Vorzeichen der Koeffizient a in der Scheitelpunktform hat.

-----

Scheitelpunktform für Scheitel S(x\_S|y\_S):

y =a \*(x -x\_S)^2 +y\_S

-----

4.008.)

A, B

Ermitteln Sie die Scheitelpunktform der quadratischen Funktion, deren Graph durch den Punkt A verläuft und den Scheitel S hat.

a) A(0|1), S(4|3)

b) A(15|0), S(5|4)

c) A(2|13), S(4|1)

d) A(2|3), S(-8|-2)

-----

## \*\*-2 - 4.2 Quadratische Funktionen im Alltag

Quadratische Funktionen treten im Alltag in unterschiedlichen Situationen auf.

|Brückenbögen|

Oft werden Brücken mit Bogenkonstruktionen gebaut. Man kann physikalisch zeigen, dass sich Kräfte, die an einem Brückenbogen auftreten, dann optimal ableiten lassen, wenn der Brückenbogen parabelförmig ist.

-----

##-Beispiel 4.9: Brückenbogen (A, B)

Ein parabelförmiger Brückenbogen hat eine Spannweite s von 20 m und eine Höhe h von 4 m (siehe Skizze).

Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass ein Sockel des Brückenbogens im Ursprung liegt.

Ermitteln Sie die Funktionsgleichung für den Brückenbogen

a) mit der quadratischen Funktion y =ax^2 +bx +c,

b) mit der Scheitelpunktform y =a \*(x -x\_S)^2 +y\_S.

-----

Lösung:

a) Die Parabel verläuft durch die drei Punkte (0|0), (10|4) und (20|0).

Setzen Sie die Koordinaten dieser drei Punkte in die Funktionsgleichung ein.

Sie erhalten das Gleichungssystem:

0 =a \*02 +b \*0 +c

4 =a \*10^2 +b \*10 +c

0 =a \*20^2 +b \*20 +c

-----

c =0

100a +10b =4 |\*(-2)

400a +20b =0

-----

200a =-8

a =-0,04

b =0,8

Funktionsgleichung: y =-0,04x^2 +0,8x

j-75

##-Beispiel 4.9: Brückenbogen (Fortsetzung) (A, B)

b) Die Parabel hat den Scheitel S(10|4) und geht durch den Ursprung (0|0).

1. Schritt: Koordinaten des Scheitels einsetzen: y =a \*(x -10)^2 +4

2. Schritt: Koordinaten des Ursprungs einsetzen: 0 =a \*(0 -10)^2 +4

a =-0,04

Scheitelpunktform: y =-0,04 -(x -10)^2 +4

-----

Hinweis:

Die Scheitelpunktform kann auch durch quadratisches Ergänzen aus der Funktionsgleichung y =-0,04x^2 +0,8x ermittelt werden.

-----

|Freier Fall|

Die Erdanziehung bewirkt, dass ein frei fallender Körper gleichmäßig beschleunigt wird, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird. Wird ein Stein fallen gelassen, lässt sich der zurückgelegte Weg s in Metern (m) nach der Zeit t in Sekunden (s) beschreiben durch

s(t) =g/2 \*t^2, wobei g ~~10 m/s^2 die Erdbeschleunigung ist.

-----

s(t) =g/2 \*t^2

g ~~10 m/s^2

-----

##-Beispiel 4.10: Freier Fall (A, B)

Ein Stein wird von einem 50 Meter hohen Turm fallen gelassen.

Die Höhe des Steins h(t) nach t Sekunden ergibt sich aus der Anfangshöhe minus dem zurückgelegten Weg des fallenden Steins.

a) Erstellen Sie die Funktionsgleichung von h.

-----

b) Berechnen Sie die Höhe des Steins über dem Boden nach 3 Sekunden.

-----

Lösung:

a) h(t) =50 -5t^2

b) h(3) =50 -5 \*3^2 =5

Der Stein ist nach 3 Sekunden noch 5 m über dem Boden.

-----

|Wurfparabel|

Bei der Flugbahn eines geworfenen Körpers überlagern sich eine gleichförmige Bewegung und der freie Fall. Die Flugbahn eines geworfenen Körpers kann durch eine Parabel beschrieben werden, wenn der Luftwiderstand nicht berücksichtigt wird.

-----

##-Beispiel 4.11: Kugelstoßen (A, B)

Die Flugbahn einer Kugel beim Kugelstoßen ist annähernd parabelförmig. Der Kugelstoßer wirft die Kugel aus einer Höhe von 2 m. Bei der horizontalen Weite von 8 m hat die Kugel eine Höhe von 3 m. Der Kugelstoßer erzielt eine Weite von 16 m.

Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Flugbahn.

-----

Lösung:

h(x) =ax^2 +bx +c

x horizontale Weite in m

h(x) Höhe der Kugel in m bei einer horizontalen Weite von x Meter

Die Koeffizienten a, b und c können ermittelt werden, wenn 3 Bedingungen gegeben sind:

(1) h(0) =2: 2 =a \*0^2 +b \*0 +c

(2) h(8) =3: 3 =a \*8^2 +b \*8 +c

(3) h(16) =0: 0 =a \*16^2 +b \*16 +c

-----

c =2

64a +8b =1 |\*(-2)

256a +16b =-2

-----

128a =-4

a =-1/(32)

64 \*(-1/(32)) +8b =1

b =3/8

Funktionsgleichung: h(x) =-1/(32) \*x^2 +3/8 \*x +2

j-76

|Kosten, Erlös und Gewinn|

Kosten verlaufen nicht immer linear. Aufgrund teurer Überstunden können Kosten progressiv ansteigen. Aufgrund von günstigen Preisen beim Einkauf großer Mengen können Kosten degressiv verlaufen. Nichtlineare Kostenverläufe können im einfachsten Fall durch quadratische Funktionen beschrieben werden.

Auch Erlösfunktionen können quadratisch sein.

Sind die Kosten- und/oderdie Erlösfunktion quadratisch, dann ist auch die Gewinnfunktion quadratisch.

-----

##-Beispiel 4.12: Quadratische Kostenfunktion (A, B, D)

Ein Schokoladenhersteller hat für die Produktion einer bestimmten Schokoladesorte Fixkosten von 120 GE.

Bei einer Produktion von 10 ME betragen die Kosten 150 GE, bei einer Produktion von 20 ME betragen die Kosten 200 GE.

a) Erklären Sie, warum die Kosten nicht linear steigen.

-----

b) Erstellen Sie die Funktionsgleichung der quadratischen Kostenfunktion.

-----

Lösung:

a) Kostenzuwachs im Produktionsintervall [0; 10]:

('De K)/('De x) =(150 -120)/(10 -0) =(30)/(10) =3

-----

Kostenzuwachs im Produktionsintervall [0; 20]:

('De K)/('De x) =(200 -150)/(20 -10) =(50)/(10) =5

Die Kosten steigen nicht linear, weil sie im Produktionsintervall [0; 10] im Mittel um 3 GE/ME, im Produktionsintervall [0; 20] um 5 GE/ME steigen.

-----

b) K(x) =ax^2 +bx +c

(1) K(0) =120: 120 =a \*0^2 +b \*0 +c

(2) K(10) =150: 150 =a \*10^2 +b \*10 +c

(3) K(20) =200: 200 =a \*20^2 +b \*20 +c

-----

c =120

100a +10b =30 |\*(-2)

400a +20b =80

-----

200a =20

a =0,1

100 \*0,1 +10b =30

b =2

Funktionsgleichung: K(x) =0,1x^2 +2x +120

-----

GE Geldeinheiten

ME Mengeneinheiten

-----

##-Beispiel 4.13: Quadratische Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion (A, B)

Die Gesamtkosten K für die Produktion einer bestimmten Schokoladesorte lassen sich durch K(x) =0,1x^2 +2x +120 beschreiben.

Als Monopolist kann der Schokoladehersteller den Preis festlegen.

Der Zusammenhang zwischen dem Preis und der nachgefragten Menge lässt sich beschreiben durch die Preisfunktion der Nachfrage p(x) =-0,4x +21.

a) Erstellen Sie die Erlös- und die Gewinnfunktion.

-----

b) Stellen Sie die Kosten-, die Erlös- und die Gewinnfunktion in einem Koordinatensystem dar.

-----

Lösung:

a) Erlösfunktion:

E(x) =p(x) \*x =(-0,4x +21) \*x =-0,4x^2 +21x

-----

Gewinnfunktion:

G(x) =E(x) -K(x) =-0,4x^2 +21 x -(0,1x^2 +2x +120) =

=-0,5x^2 +19x -120

-----

b) nicht übertragbar.

j-77

#### \*\*-4 - Übungsaufgaben

4.009.)

A, B

Ein parabelförmiger Brückenbogen hat eine Höhe von 40 m. Die Spannweite des Brückenbogens beträgt 120 m.

Legen Sie das Koordinatensystem so, dass ein Sockel des Brückenbogens im Ursprung liegt, (siehe Skizze in der Randspalte)

a) Ermitteln Sie die Scheitelpunktform des Brückenbogens.

-----

b) Ermitteln Sie die Längen der senkrechten Brückenstützen.

-----

4.010.)

A, B

Die Svinesund-Brücke verbindet Schweden mit Norwegen. Der Brückenbogen über den Fjord ist parabelförmig konstruiert. Der Scheitel liegt 92 m über dem Meeresspiegel, die Spannweite des Brückenbogens in einer Höhe von 27 m über dem Meeresspiegel beträgt 247 m. Erstellen Sie die Funktionsgleichung des parabelförmigen Brückenbogens. Legen Sie das Koordinatensystem so, dass die x-Achse auf der Wasseroberfläche liegt und die Parabel symmetrisch zur y-Achse liegt.

-----

Abb.: Die Svinesund-Brücke wurde im Jahr 2005 eröffnet. Sie wurde für ihre Eleganz mit einem norwegischen Architekturpreis ausgezeichnet.

-----

4.011.)

A, B

Die Flugbahn eines Golfballs lässt sich durch eine Parabel beschreiben, wenn der Luftwiderstand nicht berücksichtigt wird.

Ein Golfball wird 80 m weit geschlagen und erreicht eine maximale Höhe von 8 m.

Erstellen Sie die Funktionsgleichung der Flugparabel.

-----

4.012.)

A, B

Der Verlauf eines Wasserstrahls kann durch eine Parabel beschrieben werden. Der im Bild in der Randspalte dargestellte Wasserstrahl hat eine horizontale Reichweite von 1,0 m und eine Höhe von 0,8 m.

Erstellen Sie die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion, die den Verlauf des Wasserstrahls beschreibt.

-----

4.013.)

A, B, D

Der Bremsweg s in m hängt quadratisch von der Geschwindigkeit v in m/s ab: s(v) =(v^2)/(2a), wobei a in m/s^2 die Bremsverzögerung ist. a) Bei einem Bremsversuch hat ein Pkw bei einer Vollbremsung bei einer Geschwindigkeit von 72 km/h einen Bremsweg von 32 m.

Ermitteln Sie die Bremsverzögerung des Pkws.

-----

b) Erklären Sie, um das Wievielfache sich der Bremsweg verändert, wenn

(1) die Geschwindigkeit verdoppelt wird,

(2) die Bremsverzögerung halbiert wird.

-----

c) Eine Faustregel für die Berechnung des Bremswegs eines Pkws lautet: Der Bremsweg s in m ist ein Zehntel der Fahrgeschwindigkeit v in km/h zum Quadrat.

Stellen Sie diese Faustregel in einer Funktionsgleichung dar.

-----

d) Berechnen Sie den Bremsweg, den nach der Faustregel von c) ein Pkw mit einer Geschwindigkeit von 72 km/h hat.

Welcher Bremsverzögerung entspricht dieser Bremsweg?

-----

Richtwerte für die Brems Verzögerung in m/s^2:

trockener Asphalt: 6,5 - 8,5

nasser Asphalt: 5,0 - 7,0

trockener Kies: 4,0 - 5,0

nasser Kies: 3,5 - 4,5

Schneefahrbahn: 1,0 - 3,0

Eisfahrbahn: 0,5 - 3,0

(Quelle: www.bense-jessen.de)

j-78

4.014.)

C, D

In der Verkehrserziehung lernen Kinder, den Anhalteweg eines Fahrzeugs abzuschätzen.

Der Graph in der Randspalte stellt näherungsweise den Zusammenhang zwischen Ausgangsgeschwindigkeit und Anhalteweg eines Autos dar:

a) Lesen Sie aus dem Graphen den Anhalteweg bei einer Geschwindigkeit von

(1) 20 km/h,

(2) 60 km/h und

(3) 120 km/h ab.

-----

b) Susis Vater sagt: "Wenn ich um 20 km/h schneller fahre, wird mein Anhalteweg um 20 m länger."

Beurteilen Sie mithilfe des Graphen, ob Susis Vater recht hat.

-----

4.015.)

A, B

Der Kraftstoffverbrauch K eines Pkw in Liter pro 100 km hängt annähernd quadratisch von seiner Geschwindigkeit v in km/h ab. Bei Tests wird gemessen, wie viel Kraftstoff ein Pkw auf ebener Strecke bei gleich bleibender Geschwindigkeit im höchsten Gang verbraucht. (Tabelle siehe Randspalte) Erstellen Sie die Funktionsgleichung des Kraftstoffverbrauchs.

-----

Zu Übungsaufgabe 4.015:

v in km/h | K in l pro 100 km

60 | 5,9

80 | 6,5

100 | 7,5

-----

4.016.)

C

Die Grafik zeigt den Verbrauch eines Pkws in Liter pro 100 km in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit in km/h für verschiedene Gänge.

a) Welche Art mathematischer Kurven liegt für die vier Gänge näherungsweise vor?

-----

b) Lesen Sie den Verbrauch ab, den Sie im 5. Gang bei 100 km/h haben.

-----

c) Sie haben einen Verbrauch von 9 Liter auf 100 km.

Lesen Sie ab, mit welcher Geschwindigkeit Sie dabei im 4. Gang zirka fahren.

-----

4.017.)

A, D

Die Fixkosten eines Betriebs betragen 20 GE. Bei Produktion von 10 ME sind die Gesamtkosten 130 GE und bei Produktion von 20 ME betragen sie 340 GE.

a) Erklären Sie, warum die Kosten nicht linear steigen.

-----

b) Erstellen Sie die quadratische Kostenfunktion K(x) =ax^2 +bx +c.

-----

## \*\*-2 - 4.3 Quadratische Gleichungen

##-Beispiel 4.14: Nullstellen einer quadratischen Funktion (B, C)

Ermitteln Sie die Nullstellen der quadratischen Funktion mit y =x^2 -6x +5.

Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen.

-----

Lösung:

x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6

y | 5 | 0 | -3 | -4 | -3 | 0 | 5

Die Parabel schneidet die x-Achse in den Nullstellen x\_1 =1 und x\_2 =5.

-----

Die Ermittlung der Nullstellen (y =0) einer quadratischen Funktion mit y =ax^2 +bx +c erfordert das Lösen der Gleichung ax^2 +bx +c =0.

-----

Abb.: Der Graph ist eine Parabel mit dem Scheitel S(3|-4).

j-79

|Definition: Allgemeine quadratische Gleichung|

Eine Gleichung der Form ax^2 +bx +c =0 für a, b, c 'el 'R, a \=0 heißt allgemeine quadratische Gleichung.

-----

Dividiert man die allgemeine quadratische Gleichung durch den Koeffizienten a, so erhält man die normierte Form:

ax^2 +bx +c =0 | /a

x^2 +b/a x +c/a =0

x^2 +px +q =0

p =b/a; q =c/a p, q 'el 'R

-----

Allgemeine quadratische Gleichung:

ax^2 +bx +c =0

-----

|Definition: Normalform der quadratischen Gleichung|

x^2 +px +q =0 mit p, q 'el 'R heißt Normalform der quadratischen Gleichung.

-----

Normalform der quadratischen Gleichung:

x^2 +px +q =0

-----

##-Beispiel 4.15: Ermittlung der Normalform (B)

5x^2 -10x +20 =0

allgemeine quadratische Gleichung mit a =5, b =-10 und c =20.

Nach Division der Gleichung durch a =5 erhalten Sie

x^2 -2x +4 =0

Normalform der quadratischen Gleichung mit p =-2 und q =4.

-----

|Spezialfalle quadratischer Gleichungen|

Ist in der allgemeinen quadratischen Gleichung ax^2 +bx +c =0 b oder c gleich null, so kann die quadratische Gleichung leicht gelöst werden.

-----

##-Beispiel 4.16: Spezialfall b =0 (B)

a) Lösen Sie:

3x^2 -12 =0

x^2 =4

x\_1 =2

x\_2 =-2

L ={-2; 2}

-----

b) Lösen Sie:

5x^2 =0

x^2 =0

x =0

L ={0}

-----

c) Lösen Sie:

3x^2 +2 =0

x^2 =-2/3 <0

L ={}

-----

d) Lösen Sie:

3/2 =-1/2 +1/(x^2) D =R \ {0}

2 =1/(x^2)

x^2 =1/2

x\_1 ='w(1/2)

x\_2 =-'w(1/2)

L ={'w(1/2); -'w(1/2)}

j-80

|Spezialfall b =0|

Ist b =0, so lässt sich die Gleichung ax^2 +c =0 umformen zu x^2 =d mit d =-c/d.

Diese hat für

* d >0 zwei Lösungen 'wd und -'wd,
* d =0 eine Lösung x =0,
* d <0 keine reelle Lösung.

-----

Hinweis: Beachten Sie:

Die Gleichung x^2 =d hat für d >0 zwei Lösungen 'w(d) und -'w(d), denn ('w(d))^2 =d aber auch (-'w(d))^2 =d.

-----

##-Beispiel 4.17: Spezialfall c =0, Lösung durch Faktorisieren (B)

a) Lösen Sie:

x^2 -5x =0

x \*(x -5) =0

x =0 oder x -5 =0

x\_1 =0 x\_2 =5

L ={0; 5}

-----

b) Lösen Sie:

(x +3) \*(x -5) =0

x +3 =0 oder x -5 =0

x\_1 =-3 x\_2 =5

L ={-3; 5}

-----

Hinweis: Beim Dividieren müssen wir x \=0 voraussetzen. Der Fall x =0 muss als gesonderter Fall untersucht werden. Es zeigt sich, dass für x =0 die Gleichung auch erfüllt ist.

-----

Hinweis: Lösen Sie Gleichungen der Form ax^2 +bx =0 immer durch Faktorisieren, um die Lösung 0 nicht zu verlieren.

-----

|Lösung durch Faktorisieren|

Ist c =0, so kann die Gleichung ax^2 +bx =0 durch Faktorisieren gelöst werden:

x \*(ax +b) =0 x =0 oder ax +b =0

x\_1 =0 x\_2 =-b/a

-----

Tipp: Verlockend ist die Division durch x:

ax^2 +bx =0 | /x

ax +b =0

x =-b/a

Wo versteckt sich die Lösung 0?

|Lösungsformel für quadratische Gleichungen|

Quadratische Gleichungen können durch quadratisches Ergänzen gelöst werden.

##-Beispiel 4.18: Quadratisches Ergänzen 1 (B)

Lösen Sie die quadratische Gleichung x^2 -6x +5 =0 durch quadratisches Ergänzen: Der Ausdruck x^2 -6x kann durch Hinzufügen der Zahl 9 nach der binomischen Formel zu einem "vollständigen Quadrat" ergänzt werden:

x^2 -6x +9 =(x -3)^2

Dieses Verfahren kann auf die Gleichung angewendet werden:

x^2 -6x +5 =0

x^2 -6x =-5

x^2 -6x +9 =9 -5

(x -3)^2 =4

x -3 =2

x =3 +2

x\_1 =5

oder

x -3 =-2

x =3 -2

x\_2 =1

Man erhält zwei Lösungen!

L ={1; 5}

-----

Tipp: Beim quadratischen Ergänzen wird die binomische Forme angewandt:

x^2 +2ax +a^2 =(x +a)^2

x^2 -2ax +a^2 =(x -a)^2

-----

Hinweis: Die Gleichung x^2 =4 hat zwei Lösungen, nämlich x\_1 =2 und x\_2 =-2, denn 2^2 =4, aber auch (-2)^2 =4.

j-81

##-Beispiel 4.19: Quadratisches Ergänzen 2 (B)

Lösen Sie: x^2 -3x -40 =0 D ='R

Ergänzen Sie den Ausdruck x^2 - 3x zu einem vollständigen Quadrat:

x^2 -2 \*3/2x +9/4 =(x -3/2)^2

Lösen Sie nun die quadratische Gleichung:

x^2 -3x -40 =0

x^2 -3x =40

x^2 -2 \*3/2x +9/4 =9/4 +40

(x -3/2)^2 =(169)/4

x -3/2 ='w((169)/4)

x =3/2 +(13)/2

x\_1 =8

oder

x -3/2 ='w((169)/4)

x =3/2 -(13)/2

x\_2 =-5

L ={-5; 8}

-----

Abb.: Die Nullstellen der Funktion y =x^2 -3x -40 sind x\_1 =-5 und x\_2 =8. Daher hat die Gleichung x^2 -3x -40 =0 die Lösungsmenge L ={-5; 8}.

-----

Durch quadratisches Ergänzen kann eine Formel zur Lösung der normierten quadratischen Gleichung hergeleitet werden.

|Beispiel|

x^2 +5x +6 =0

x^2 +2 \*5/2 \*x +(5/2)^2 =(5/2)^2 -6

(x +5/2)^2 =1/4

x +5/2 =1/2 oder x +5/2 =-1/2

x\_1 =-5/2 +1/2 oder x\_1 =-5/2 -1/2

-----

Kurzschreibweise:

x\_(1, 2) =-5/2 +/-1/2

-----

Sie erhalten zwei Lösungen x\_1 und x\_2:

x\_1 =-5/2 +1/2 =-2

x\_2 =-5/2 -1/2 =-3

-----

|Normalform|

x^2 +px +q =0

x^2 +2 \*p/2 \*x +(p/2)^2 =(p/2)^2 -q

(x +p/2)^2 =(p/2)^2 -q

x +p/2 ='w((p/2)^2 -q) oder x +p/2 =-'w((p/2)^2 -q)

x\_1 =-p/2 +'w((p/2)^2 -q) oder x\_2 =-p/2 =-'w((p/2)^2 -q)

-----

Kurzschreibweise:

x\_(1, 2) =-p/2 +/-'w((p/2)^2 -q)

-----

Sie erhalten zwei Lösungen x\_1 und x\_2:

x\_1 =-p/2 +'w((p/2)^2 -q)

x\_2 =-p/2 -'w((p/2)^2 -q)

-----

|Satz: Lösungsformel der Normalform der quadratischen Gleichung|

Die normierte quadratische Gleichung x^2 +px +q =0 hat die Lösungen

x\_(1, 2) =-p/2 +/-'w((p/2)^2 -q)

-----

Hinweis: Verwenden Sie die "kleine" Lösungsformel für die normierte quadratische Gleichung.

-----

Formt man die allgemeine quadratische Gleichung ax^2 +bx +c =0 um zu x^2 +b/ax +c/a =0 und setzt in der Lösungsformel der normierten Gleichung p =-b/a und q =c/a, so erhält man die Lösungsformel der allgemeinen quadratischen Gleichung.

j-82

|Satz: Lösungsformel der allgemeinen quadratischen Gleichung|

Die allgemeine quadratische Gleichung ax^2 +bx +c =0 hat die Lösungen

x\_(1, 2) =(-b +/-'w(b^2 -4ac))/(2a).

-----

Hinweis: Verwenden Sie die "große" Lösungsformel für die allgemeine quadratische Gleichung.

-----

##-Beispiel 4.20: Lösungsformeln (B)

Lösen Sie die Gleichung x^2 -6x +5 =0

a) mithilfe der "kleinen" Lösungsformel:

Setzen Sie p =-6 und q =5 in die "kleine Lösungsformel" ein:

x\_(1, 2) =3 +/-'w(9 -5) =3 +/-2

Sie erhalten zwei reelle Lösungen

x\_1 =3 +2 =5 oder x\_2 =3 -2 =1

L ={1; 5}

-----

b) mithilfe der "großen" Lösungsformel:

Setzen Sie a =1, b =-6 und c =5 in die "große Lösungsformel" ein:

x\_(1, 2) =(6 +/-'w(36 -4 \*1 \*5))/(2 \*1) =(6 +/-4)/2

x\_1 =(10)/2 =5 oder x\_2 =2/2 =1

L ={1; 5}

-----

Tipp: Jede quadratische Gleichung lässt sich durch beide Lösungsformeln lösen.

-----

##-Beispiel 4.21: "Große" Lösungsformel (B)

Lösen Sie 2x^2 +11x +5 =0 mithilfe der "großen" Lösungsformel. Setzen Sie a =2, b =11 und c =5 in die "große" Lösungsformel ein:

x\_(1, 2) =(-11 +/-'w(121 -4 \*2 \*5))/(2 \*2) =(-11 +/-'w(81))/4

Sie erhalten zwei reelle Lösungen

x\_1 =(-11 +9)/4 =-1/2 oder

x\_2 =(-11 -9)/4 =-5

L ={1;-1/2}

-----

Wie bei den Spezialfällen gibt es bei der allgemeinen quadratischen Gleichung drei Lösungsfalle.

Das Vorzeichen des Terms unter der Wurzel entscheidet.

-----

Definition: Diskriminante

Für die normierte quadratische Gleichung x^2 +px +q =0 heißt der Term D =(p/2)^2 -q

Diskriminante der quadratischen Gleichung.

-----

Für die allgemeine quadratische Gleichung ax^2 +bx +c =0 heißt der Term D =b^2 -4ac

Diskriminante der quadratischen Gleichung.

-----

discriminare: lateinisch für trennen, unterscheiden

Die drei Lösungsfälle:

* D >0 zwei verschiedene Lösungen aus 'R
* D =0 eine (doppelt zählende) Lösung aus 'R
* D <0 keine Lösung aus 'R

-----

Die Diskriminante "trennt" die beiden Lösungen

x\_1 =-p/2 +'w(D) und

x\_2 =-p/2 -'w(D)

j-83

##-Beispiel 4.22: Lösungsfalle (B, C)

1. Fall: D >0 (zwei Lösungen)

Lösen Sie x^2 -6x +8 =0.

p =-6, q =8

D =3^2 -8 =1 >0

x\_(1, 2) =3 +/-'w(1)

L ={2; 4}

Ermitteln Sie die Nullstellen von y =x^2 -6x +8:

Die quadratische Funktion hat zwei Nullstellen x\_1 =2 und x\_2 =4.

Sie erhalten zwei reelle Lösungen.

-----

2. Fall: D =0 (eine Doppellösung)

Lösen Sie x^2 -6x +9 =0.

p =-6, q =9

D =3^2 -9 =0

x\_(1, 2) =3 +/-'w(0) =3

x\_1 =3 +'w(0) =3

x\_2 =3 -'w(0) =3

L ={3^((2))}

Ermitteln Sie die Nullstellen von y =x^2 -6x +9:

Die quadratische Funktion hat eine Nullstelle x\_1 =x\_2 =3.

Sie erhalten eine reelle Doppellösung.

-----

3. Fall: D <0 (keine reelle Lösung)

Lösen Sie x^2 -6x +10 =0.

p =-6, q =10

D =3^2 -10 =-1 <0

x\_(1, 2) =3 +/-'w(-1) nicht definiert in 'R

L ={}

Ermitteln Sie die Nullstellen von y =x^2 -6x +10:

Die quadratische Funktion hat keine Nullstelle.

Sie erhalten keine reelle Lösung.

-----

Tipp:

Die Lösungen einer quadratischen Gleichung entsprechen den Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion.

-----

Hinweis: Mit "3^((2))" wird angedeutet, dass beide Lösungen gleich 3 sind.

-----

|Nullstellen einer quadratischen Funktion|

Der Graph der quadratischen Funktion mit

y =x^2 +px +q y =ax^2 +bx +c

hat für D =(p/2)^2 -q

D =b^2 -4ac

* D >0 zwei Nullstellen, d. h., die Parabel schneidet die x-Achse an zwei Stellen.
* D =0 genau eine Nullstelle, d. h., die Parabel und die x-Achse berühren einander.
* D <0 keine Nullstelle, d. h., die Parabel schneidet die x-Achse nicht.

-----

Diskriminante:

D =(p/2)^2 -q bzw. D =b^2 -4ac

j-84

##-Beispiel 4.23: GTR-Programm für die allgemeine quadratische Gleichung (B)

Berechnen Sie die Lösungen der quadratischen Gleichung x^2 -3x -40 =0 mithilfe eines selbst erstellten Programms.

Allgemeine quadratische Gleichung: Ax^2 +Bx +C =0

Drücken Sie (PRGM), (NEW) und 1: Create New. (ENTER)

Die Eingabeaufforderung Name=erscheint mit aktivierter Alpha-Sperre.

Geben Sie die Buchstabenfolge [Q] [U] [A] [D] [R] [G] [L] ein. (ENTER)

Sie befinden sich nun im Programmeditor.

Geben Sie die Anweisungen zur Eingabe der Koeffizienten A, B und C zur Berechnung und zur Ausgabe der.Lösungen wie dargestellt, ein.

Bei der Programmierung mit dem GTR können die verschiedenen Lösungsfälle durch den IF-Befehl berücksichtigt werden.

Das Ungleichheitszeichen >= erhalten Sie aus dem Menü (2nd) [TEST]; TEST; 4: >= (ENTER).

Die Programmbefehle lf, Then, Else, End finden Sie unter (PRGM); CTL Mit (2nd) [QUIT] kehren Sie zum Hauptbildschirm zurück.

Um das Programm zu starten, drücken Sie (PRGM).

Wählen Sie aus der Programmliste das Programm QUADRGL und bestätigen Sie mit (ENTER).

Geben Sie die Koeffizienten A =1, B =-3 und C =-40 ein und bestätigen Sie nach jeder Eingabe mit (ENTER).

Die reellen Lösungen x\_1 =8 und x\_2 =-5 werden ausgegeben.

-----

##-Beispiel 4.24: Quadratische Gleichung mit Excel (B)

Berechnen Sie die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung x^2 -3x -40 =0 mit Excel.

Geben Sie die Koeffizienten a =1, b =-3 und c =-40 in den Zellen A4, B4 und C4 ein und berechnen Sie in der Zelle D4 die Diskriminante. Berechnen Sie in den Zellen B6 und B7 die Lösungen x\_1 und x\_2 wie abgebildet mithilfe der WENN-Funktion.

-----

Tipp:

Bei Excel können die verschiedenen Lösungsfälle durch die Funktion WENN (Prüfung; Dann\_Wert; Sonst\_Wert) berücksichtigt werden.

Die Gleichung kann in GeoGebra mit dem Befehl LÖSE gelöst werden.

Löse[x^2 -3x -40 =0] -> {x =-5, x =8}

-----

##-Beispiel 4.25: Schnittpunkte zweier Funktionen berechnen (B)

Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen der quadratischen Funktion f mit y =x^2 -5 und der linearen Funktion g mit y =x -3.

x^2 -5 =x -3 Funktionsterme gleichsetzen

x^2 -x -2 =0 alles auf eine Seite bringen

x\_1 =-1, x\_2 =2 Gleichung nach x auflösen (Nullstellen der neuen Funktion suchen)

y\_1 =-4, y\_2 =-1 y-Werte berechnen

S\_1(-1|-4), S\_2(2|-1)

j-85

#### \*\*-4 - Übungsaufgaben

4.018.)

B

Ermitteln Sie die Lösungsmenge der reinquadratischen Gleichungen:

a) x^2 =144

b) x^2 =4

c) z^2 =-4

d) 10z^2 -90 =0

e) u^2 =-9

f) 3v^2 =2,43

g) (t^2)/2 =8

h) 5z^2 =0

-----

4.019.)

D

Argumentieren Sie, für welche Werte a 'el 'R die Gleichung x^2 =a

(1) zwei reelle Lösungen,

(2) genau eine reelle Lösung und

(3) keine reelle Lösung hat.

-----

Hinweis: Beachten Sie:

Die Gleichung x^2 =d hat für d >0 zwei Lösungen -'wd und 'wd.

-----

4.020.)

D

Ermitteln Sie die Lösungsmenge durch Faktorisieren:

a) x^2 -3x =0

b) x^2 =5x

c) 4z^2 =-z

d) (z^2)/2 +z/4 =0

e) (u^2)/2 =2u

f) (3v^2)/4 +v/2 =0

g) 3t^2 =t/2

h) 0,1 \*z^2 =z

-----

4.021.)

D

Max löst eine Gleichung durch folgende Umformung:

x^2 =5x |/x

x =5

L ={5}

Hat Max richtig gerechnet? Erklären Sie gegebenenfalls, welchen Fehler Max bei der Umformung gemacht hat.

-----

4.022.)

A, B

Ergänzen Sie zu einem vollständigen Quadrat und kontrollieren Sie das Ergebnis, indem Sie das Quadrat wieder ausmultiplizieren:

a) x^2 +4x +**[]** =(x +**[]**)^2

b) x^2 -6x +**[]** =(x -**[]**)^2

c) z^2 +5z +**[]** =(z +**[]**)^2

d) u^2 -3u +**[]** =(u -**[]**)^2

e) t^2 -9t +**[]** =(t -**[]**)^2

f) s^2 -2,2s +**[]** =(s -**[]**)^2

-----

Tipp: Wenden Sie die binomische Formel an:

x^2 +2ax +a^2 =(x +a)^2

x^2 -2ax +a^2 =(x -a)^2

-----

4.023.)

A, B

Ermitteln Sie die Lösungsmenge über 'R durch quadratisches Ergänzen:

a) x^2 +4x -5 =0

b) x^2 -2x -3 =0

c) z^2 -5z -6 =0

d) u^2 +3u +2 =0

e) v^2 +4v +4 =0

f) t^2 +4t +5 =0

-----

4.024.)

B

Ermitteln Sie die Lösungsmenge (G ='R):

x\_(1, 2) =-p/2 +/-'w((p/2)^2 -q)

-----

a) x^2 +3x -4 =0

b) x^2 +2x -3 =0

c) x^2 +4x -5 =0

d) x^2 +2x -15 =0

e) z^2 -4z +3 =0

f) z^2 -8z -20 =0

g) t^2 +6t -27 =0

h) t^2 +t -2 =0

i) s^2 +5s -50 =0

j) s^2 -16/3 s +5/3 =0

k) u^2 +10/7 u -8/7 =0

l) u^2 -13/5 u -28/5 =0

-----

4.025.)

B

Zeichnen Sie die Funktionen und ermitteln Sie die Nullstellen:

a)

(1) y =x^2 -2x

(2) y =x^2 -2x +1

(3) y =x^2 -2x +2

-----

b)

(1) y =x^2 -x -3/4

(2) y =x^2 -x +1/4

(3) y =x^2 -x +5/4

-----

c)

(1) y =-(x^2)/2 +2x -3/2

(2) y =-(x^2)/2 +2x -2

(3) y =-(x^2)/2 +2x -5/2

-----

Tipp: Eine quadratische Funktion kann in der Menge der reellen Zahlen zwei Nullstellen, eine Nullstelle oder keine Nullstelle haben.

-----

4.026.)

B

Zeichnen Sie die Funktion und ermitteln Sie die Nullstellen:

a) y =x^2 -4x +1

b) y =-3x^2 +10x -6

c) y =-0,5x^2 +4x -5

-----

4.027.)

B

Ermitteln Sie die Lösungen in 'R.

x\_(1, 2) =(-b +/-'w(b^2 -4ac))/(2a)

-----

a) x^2 +x/2 =3/2

b) (z -4) \*(z +3) =8

c) 10u^2 +47u =-9

d) 9v^2 -47v =-10

e) 18s^2 +3s -1 =0

f) 4t^2 -3t +7/(16) =0

g) x^2 +4 \*'w(2) \*x +6 =0

h) x^2 -2x -'w(2) \*x +23 =0

-----

4.028.)

B

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmenge über 'R:

a) 3/(2x) =x/2 -1

b) 3/x =2 -x/6

c) 2/x =2 -x/5

d) (3x -4)/(x -4) =(2 -x)/2 +9

e) (2x +3)/(1 -x) +5 =(6 +x)/x

-----

Tipp: Die Diskriminante ist in der Lösungsformel der Term unter der Wurzel D =(p/2)^2 -q bzw. D =b^2 -4ac.

j-86

Tipp: Eine quadratische Gleichung hat genau eine reelle Lösung, wenn die Diskriminante gleich null ist.

-----

4.029.)

B

Ermitteln Sie, für welche Werte von c die Gleichung genau eine reelle Lösung hat.

a) x^2 -5x +c =0

b) z^2 +3z -c =0

c) 5t^2 -2t -c =0

-----

4.030.)

B

Ermitteln Sie d so, dass die Gleichung genau eine reelle Lösung hat.

a) x^2 -7x +5 =d

b) 2x^2 +3x -7 =d

-----

4.031.)

A, D

Alex behauptet: Eine quadratische Gleichung hat immer mindestens eine reelle Lösung.

Hat Alex recht? Gibt es quadratische Gleichungen, die keine reelle Lösung haben?

Argumentieren Sie. Finden Sie gegebenenfalls ein Beispiel für eine quadratische Gleichung ohne reelle Lösung.

|Anwendungen|

4.032.)

B

Ein parabelförmiger Brückenbogen kann durch h(x) =-0,04x^2 +0,8x beschrieben werden, (siehe Skizze in der Randspalte)

x horizontale Entfernung vom Brückensockel in m

h(x) Höhe des Brückenbogens über dem Sockel in m

a) Berechnen Sie die Spannweite s des Brückenbogens.

b) Ermitteln Sie die maximale Höhe h des Brückenbogens.

-----

4.033.)

B, C

Die Flugbahn einer Kugel beim Kugelstoßen lässt sich durch die quadratische Funktion mit h(x) =-0,06x^2 +0,9x +2,1 beschreiben,

x horizontale Entfernung in m

h(x) Höhe der Kugel über dem Boden in m

a) Lesen Sie aus der Funktionsgleichung h die Abstoßhöhe ab.

b) Berechnen Sie die Wurfweite.

c) Ermitteln Sie die maximale Höhe der Kugel.

-----

4.034.)

B

Der Verlaufeines Wasserstrahls kann durch die Parabel h(x) =-(10)/2 x^2 +4x beschrieben werden.

x horizontale Entfernung in m

h(x) Höhe des Wasserstrahls in m

a) Berechnen Sie die Spritzweite des Wasserstrahls.

b) Ermitteln Sie die maximale Höhe des Wasserstrahls.

-----

4.035.)

B, C

Ein Stein wird von einem Turm fallen gelassen. Die Höhe des Steins über dem Boden lässt sich beschreiben durch h(t) =50 -5t^2.

t Zeit in Sekunden (s) nach dem Loslassen des Steins

h(t) Höhe des Steins über dem Boden nach t Sekunden

a) Lesen Sie aus der Funktionsgleichung h die Höhe ab, von der der Stein losgelassen wird.

-----

b) Ermitteln Sie, nach welcher Zeit der Stein am Boden aufschlägt.

-----

4.036.)

Bei Tests wird gemessen, wie viel Kraftstoff ein Pkw verbraucht. Der Benzinverbrauch hängt dabei quadratisch von der Geschwindigkeit v ab:

y =0,0005v^2 -0,04v +7

y Benzinverbrauch in Liter pro 100 km

v Geschwindigkeit in km/h

a) Skizzieren Sie die quadratische Funktion im Intervall [0; 140].

-----

b) Ermitteln Sie den Verbrauch bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit

(1) von 50 km/h und

(2) von 100 km/h.

Vergleichen Sie das Ergebnis Ihrer Berechnung mit den abgelesenen Werten aus Ihrer Skizze.

-----

c) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten, bei denen der Verbrauch 6,5 Liter pro 100 km beträgt.

-----

d) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit, bei der der Verbrauch am geringsten ist.

j-87

4.037.)

B

Ein Betrieb hat für die Herstellung eines bestimmten Produkts die Gesamtkostenfunktion K(x) =(x^2) +6x +20.

a) Ermitteln Sie die Kosten bei einer Produktion von TOME.

-----

b) Ermitteln Sie jene Produktionsmenge, bei der die Kosten 244 GE betragen.

-----

4.038.)

A, B

Ein Produzent von Wurstwaren hat für eine bestimmte Sorte Speck die Kostenfunktion K(x) =0,1x^2 +6x +40. Der Marktpreis beträgt 11 GE je ME.

a) Erstellen Sie die Erlösfunktion und die Gewinnfunktion.

-----

b) Ermitteln Sie jene Produktionsmengen, für die der Gewinn gleich null ist (so genannte "Gewinnschwellen").

-----

Tipp:

Erlösfunktion: E(x) =p \*x

Gewinnfunktion:G(x) =E(x) -K(x)

-----

4.039.)

A, B

Ein Produzent von Kristallwaren kann als Monopolist den Preis festlegen. Je höher der Preis festgelegt wird, umso geringer ist die nachgefragte Menge. Der Zusammenhang zwischen Preis und nachgefragter Menge lässt sich durch p(x) =-1,5x +150 beschreiben.

a) Erstellen Sie die Erlösfunktion.

b) Ermitteln Sie jene Produktionsmengen, bei denen ein Erlös von

(1) 0 GE und

(2) 2400 GE erzielt wird.

-----

Tipp:

Erlösfunktion: E(x) =p(x) \*x

-----

4.040.)

A, B

Ein Hersteller von Tiernahrung hat für Katzenfutter die Kostenfunktion K(x) =0,4x^2 +12x +2470.

Die zugehörige Erlösfunktion lautet E(x) =-1,6x^2 +180x.

a) Erstellen Sie die Gewinnfunktion.

b) Ermitteln Sie jene Produktionsmengen, für die der Gewinn gleich null ist (so genannte "Gewinngrenzen").

-----

4.041.)

A, B, C

Zur Herstellung von 10 t Zucker betragen die Gesamtkosten 1600 Euro, für 100 t 20500 Euro und für 120 t 26900 Euro.

a) Zeigen Sie, dass die Kosten nicht linear steigen.

-----

b) Erstellen Sie die Kostenfunktion unter der Annahme, dass sie quadratisch ist.

-----

c) Lesen Sie aus der Funktionsgleichung die Fixkosten ab.

-----

d) Erstellen Sie die lineare Kostenfunktion, die durch die Fixkosten und die Gesamtkosten 20500 Euro für 100 t gegeben ist.

-----

e) Geben Sie entsprechend der linearen Kostenfunktion die variablen Kosten je Tonne an.

-----

Tipp: In Österreich werden jährlich ca. 2,8 Mio. Tonnen Rüben zu ca. 400000 Tonnen Zucker verarbeitet.

-----

4.042.)

A, B, D

Im Außenbereich einer Kindertagesstätte soll ein 40 cm hoher und 50 cm breiter Kriechtunnel mit parabelförmigem Querschnitt angelegt werden.

a) Sie sollen eine Funktionsgleichung für den Querschnitt ermitteln, entweder in der Form f(x) =ax^2 +bx oder g(x) =ax^2 +c.

Beurteilen Sie, welcher der dargestellten Graphen für f und welcher für g geeignet ist:

-----

b) Erstellen Sie für den Graphen 1 eine Funktionsgleichung für den Querschnitt des Kriechtunnels.

-----

c) Erstellen Sie für den Graphen 2 eine Funktionsgleichung für den Querschnitt des Kriechtunnels.

j-88

4.043.)

B, D

Bei einem Wettspiel wollen Kinder einen Ball so hoch wie möglich senkrecht nach oben werfen.

Die maximale Steighöhe H in Metern (m) beim senkrechten Wurf nach oben (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands) kann mit folgender Formel berechnet werden:

H =(v^2\_0)/(2g)

v\_0 Abwurfgeschwindigkeit in m/s

g Erdbeschleunigung (g ~~10 m/s^2)

a) Formen Sie die Formel nach v\_0 um.

-----

b) Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit ein Ball nach oben geworfen wird, der eine Steighöhe von 5 m erreicht.

-----

c) Berechnen Sie die maximale Steighöhe eines Balles, der mit einer Geschwindigkeit von 8 m/s senkrecht nach oben geworfen wird.

-----

d) Erklären Sie, um das Wievielfache sich die maximale Steighöhe verändert, wenn die Abwurfgeschwindigkeit verdoppelt wird.

-----

4.044.)

A, B

Aus einem quadratischen Stück Karton mit der Seitenlänge x soll der Unterteil einer Faltschachtel hergestellt werden. Die Länge jedes Einschnitts beträgt 3 cm.

a) Erstellen Sie eine Funktionsgleichung, die das Volumen V der Schachtel in Abhängigkeit von der Seitenlänge x beschreibt.

-----

b) Das Volumen der Schachtel soll 300 cm^3 haben.

Berechnen Sie die Seitenlänge des Kartons in cm.

-----

4.045.)

A, B, C

Gegeben sind die Funktionen f mit y =2x^2 -1 und g mit y =-x +1.

a) Zeichnen Sie beide Funktionsgraphen im Intervall [-3; +3] in ein gemeinsames Koordinatensystem.

-----

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch die Zeichnung.

-----

4.046.)

A, C

Gegeben ist die grafische Darstellung einer Parabel f und einer Geraden g:

a) Lesen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte A und B ab.

-----

b) Erstellen Sie die Funktionsgleichung der Parabel und der Geraden.

-----

c) Erstellen Sie jene Gleichung, mit der die Schnittpunkte der Parabel und der Geraden ermittelt werden können.

-----

d) Zeichnen Sie in die Skizze eine Gerade h ein, die zu g parallel ist und mit der Parabel keinen Schnittpunkt hat.

Erstellen Sie deren Funktionsgleichung.

-----

4.047.)

D

Aus einem Mathe-Forum:

Formulieren Sie eine Antwort auf Logans Frage.

j-89

4.048.)

A, B, C

Eine Firma stellt E-Bikes her. Pro Monat entstehen Fixkosten von Euro 5.000,00. Die variablen Kosten pro Monat, abhängig von der produzierten Stückzahl, können mit der Funktion K\_v(x) =1,5x^2 +150x beschrieben werden.

a) Erstellen Sie die Gleichung der Kostenfunktion.

-----

b) Alle im Monat produzierten Räder wurden an einen Großhändler zu einem Stückpreis von Euro 450,00 verkauft.

Stellen Sie die Gleichungen der Erlösfunktion Euro und der Gewinnfunktion G auf.

-----

c) Berechnen Sie jene monatliche Stückzahl, bei der die Produktionsfirma weder Gewinn noch Verlust macht.

-----

d) Im nächsten Monat muss der Verkaufspreis auf Euro 430,00 gesenkt werden. Lesen Sie aus dem Graphen ungefähr ab, ab welchen Stückzahlen die Firma Gewinn bzw. Verlust macht.

-----

4.049.)

A, B, C

Die Flugbahn eines Schispringers lässt sich annähernd durch die Funktion f mit f(x) =-0,00466x^2 -0,155x beschreiben.

Das Profil des Aufsprunghanges lässt sich mit der Funktion g mit g(x) =-0,0034x^2 -0,24x -2,5 modellieren.

Bei beiden Funktionen bedeutet x die horizontale Entfernung vom Absprungort (Schanzentisch) in Meter und f(x) die vertikale Entfernung vom Absprungort an der Stelle x in Metern.

a) Lesen Sie aus den Funktionsgleichungen die Höhe des Schanzentisches ab.

Lesen Sie die Koordinaten des Aufsprungpunktes ungefähr ab.

-----

b) Berechnen Sie, in welcher horizontalen und vertikalen Entfernung vom Schanzentisch der Schispringer aufkommt.

-----

c) Berechnen Sie mithilfe des pythagoräischen Lehrsatzes näherungsweise die Sprungweite (die auf dem Hang gemessene Entfernung der Punkte F und S.

j-90

## \*\*-2 - 4.4 Satz von Vieta

##-Beispiel 4.26: Zusammenhänge zwischen Koeffizienten und Lösungen von quadratischen Gleichungen (B, D)

Versuchen Sie Gesetzmäßigkeiten zwischen den Koeffizienten und den Lösungen einer quadratischen Gleichung herauszufinden:

x^2 -6x +5 =0

p =-6 q =5

x\_1 =1 x\_2 =5

-----

x^2 -3x -10 =0

p =-3 q =-10

x\_1 =-2 x\_2 =5

-----

x^2 +5x +6 =0

p =5 q =6

x\_1 =-2 x\_2 =-3

-----

Berechnen Sie x\_1 +x\_2 und x\_1 \*x\_2 und stellen Sie einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten p und q und den beiden Lösungen x\_1 und x\_2 her:

x\_1 +x\_2 =6 =-p

x\_1 \*x\_2 =5 =q

-----

x\_1 +x\_2 =3 =-p

x\_1 \*x\_2 =-10 =q

-----

x\_1 +x\_2 =-5 =-p

x\_1 \*x\_2 =6 =q

-----

Abb.: FRANCOIS VIETE, 1540 BIS 1603, FRANZÖSISCHER MATHEMATIKER

-----

Die normierte quadratische Gleichung x^2 +px +q =0 hat allgemein die Lösungen

x\_1 =-p/2 +'w((p/2)^2 -q) und

x\_2 =-p/2 -'w((p/2)^2 -q)

Für Summe und Produkt der Lösungen erhält man daher

x\_1 +x\_2 =-p/2 -p/2 =-p

x\_1 \*x\_2 =(-p/2)^2 -['w((p/2)^2 -q)]^2 =

=(-p/2)^2 -(p/2)^2 +q =q

-----

Tipp: Vieta führte das Buchstabenrechnen in die Mathematik ein und wird deshalb als "Vater der Algebra" bezeichnet.

-----

|Satz von Vieta|

Sind x\_1 und x\_2 die Lösungen (Wurzeln) der normierten quadratischen Gleichung x^2 +px +q =0, dann gilt:

x\_1 +x\_2 =-p und x\_1 \*x\_2 =q und umgekehrt.

-----

Verknüpfung:

Der Satz von Vieta stellt bei normierten quadratischen Gleichungen einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten p und q und ihren Lösungen x\_1 und x\_2 her.

-----

##-Beispiel 4.27: Lösung mit Vieta (B)

Lösen Sie mithilfe des Satzes von Vieta: x^2 +8x +15 =0

Hat die quadratische Gleichung eine ganzzahlige Lösung, dann muss diese ein Teiler von q =15 sein. Um die Lösungen ablesen zu können, muss man 15 (also q) in zwei Faktoren zerlegen, deren Summe -8 (also -p) ist:

(-3) \*(-5) =+15 (-3) +(-5) =-8

x\_1 =-3 x\_2 =-5

L ={-5; -3}

-----

Die normierte quadratische Gleichung x^2 +px +q =0 hat als Lösungen x\_1 und x\_2.

Wegen p =-(x\_1 +x\_2) und q =x\_1 \*x\_2 folgt:

x^2 +px +q =x^2 -(x\_1 +x\_2) \*x +x\_1 \*x\_2 =

=x^2 -x\_1x -x\_2x +x\_1 \*x\_2 =

=x \*(x -x\_1) -x\_2 \*(x -x\_1) =

=(x -x\_1) \*(x -x\_2)

-----

x^2 +px +q =0 L ={x\_1; x\_2}

x^2 +px +q =(x -x\_1) \*(x -x\_2)

-----

|Satz: Zerlegung in Linearfaktoren|

Sind x\_1 und x\_2 die Lösungen (Wurzeln) der normierten quadratischen Gleichung x^2 +px +q =0, dann lässt sich x^2 +px +q als Produkt der Linearfaktoren (x -x\_1) und (x -x\_2) darstellen:

x^2 +px +q =(x -x\_1) \*(x -x\_2)

j-91

##-Beispiel 4.28: Zerlegung in Linearfaktoren (B)

a) Zerlegen Sie den quadratischen Ausdruck x^2 -7x +12 in Linearfaktoren.

Die Lösungen der quadratischen Gleichung x^2 -7x +12 =0 sind x\_1 =3 und x\_2 =4, daher gilt:

x^2 -7x +12 =(x -3) \*(x -4)

-----

b) Wie lautet die (einfachste) quadratische Gleichung, die 2/3 und -5/2 als Lösungen hat?

Der Term x^2 +px +q ist das Produkt der zugehörigen Linearfaktoren.

Dieser ist 0.

(x -2/3) \*(x +5/2) =0 <=> x^2 +(11)/6x -5/3 =0 <=> 6x^2 +11x -10 =0

-----

Eine quadratische Gleichung ist eine algebraische Gleichung zweiten Grades. Der Satz von Vieta lässt sich verallgemeinern auf algebraische Gleichungen höheren Grades.

-----

Hinweis: Mit einem CAS kann ein quadratischer Ausdruck auf Knopfdruck faktorisiert werden.

-----

Tipp: Die einfachste Gleichung dritten Grades mit den Lösungen 1, 2 und -3, lautet:

(x -1) \*(x -2) \*(x +3) =0

x^3 -7x +6 =0

-----

Hinweis:

x\_1 +x\_2 =-p

x\_1 \*x\_2 =q

-----

#### \*\*-4 - Übungsaufgaben

4.050.)

B

Ermitteln Sie die Lösungen mithilfe der Vietaschen Sätze:

a) x^2 +x -12 =0

b) x^2 +4x +3 =0

c) x^2 -9x +18 =0

d) x^2 -x -12 =0

e) x^2 -37x +36 =0

f) x^2 +3x -28 =0

g) x^2 -19x +70 =0

h) x^2 -5x -104 =0

-----

4.051.)

B

Von einer quadratischen Gleichung sind eine Lösung und zwei Koeffizienten bekannt. Ermitteln Sie die zweite Lösung und die unbekannte Größe.

a) x^2 +4x +q =0 x\_1 =-5

b) x^2 +px -2 =0 x\_1 =1

c) 2x^2 +bx +3 =0 x\_1 =2

-----

4.052.)

A

Erstellen Sie die (einfachste) quadratische Gleichung, deren Lösungen x\_1 und x\_2 sind:

a) x\_1 =1; x\_2 =3

b) x\_1 =5; x\_2 =9

c) x\_1 =7; x\_2 =-2

d) x\_1 =-3, x\_2 =5

e) x\_1 =-1; x\_2 =-3

f) x\_1 =1/2; x\_2 =-3/2

g) x\_1 =x\_2 =-1

h) x\_1 =x\_2 =+3

i) x\_1 =x\_2 =-5/3

-----

4.053.)

B, D

Vervollständigen Sie die Tabelle. Erklären Sie jeweils den Zusammenhang zwischen den Lösungen x\_1 und x\_2 und den Koeffizienten p und q der normierten quadratischen Gleichung.

Abkürzungen für die folgende Tabelle:

Z - Zerlegung in Linerfaktoren

... | Gleichung | p | q | x\_1 | x\_2 | x\_1 +x\_2 | x\_1 \*x\_2 | Z

a) | x^2 -6x +5 =0 | -6 | 5 | 1 | 5 | 6 | 5 | (x -1) \*(x -5) =0

b) | **[]** | 5 | 6 | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]**

c) | **[]** | **[]** | **[]** | -4 | 2 | **[]** | **[]** | **[]**

d) | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | 3 | -4 | **[]**

e) | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | (x -2) \*(x -6) =0

f) | x^2 -4x =0 | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]**

g) | **[]** | 6 | 9 | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]**

h) | **[]** | **[]** | **[]** | -5 | 0 | **[]** | **[]** | **[]**

i) | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | 0 | -4 | **[]**

j) | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | x \*x =0

k) | x^2 -400 =0 | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]**

l) | **[]** | -15 | **[]** | 5 | **[]** | **[]** | **[]** | **[]**

m) | **[]** | **[]** | **[]** | -10 | **[]** | **[]** | 0 | **[]**

n) | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | 2 | -1 | **[]**

o) | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** |'w(3) | 0 | **[]** | **[]**

j-92

## \*\*-2 - 4.5 Polynomfunktionen

Lineare und quadratische Funktionen sind Spezialfälle von Polynomfunktionen.

Da man mit Polynomfunktionen sehr einfach rechnen kann, eignen sie sich besonders gut für mathematische Modellbildungen.

So lässt sich z. B. ein s-förmiger Kostenverlauf gut durch eine kubische Polynomfunktion beschreiben.

-----

|Definition: Polynomfunktion|

Eine Funktion p mit p(x) =a\_n \*x^n +a\_(n -1) \*x^(n -1) +... +a\_1 \*x +a\_0 =

='Si[i =0;n](a\_i \*x^i)

a\_0, a\_1 ..., a\_n 'el 'R, a\_n \=0, n 'el 'N

heißt Polynomfunktion vom Grad n.

-----

(\*) Die Zahlen a\_0, a\_1, ..., a\_n heißen Koeffizienten.

a\_0 nennt man auch konstantes Glied.

-----

Der zugehörige Graph ist zusammenhängend, man sagt "stetig", d. h., er kann ohne Absetzen des Stiftes gezeichnet werden.

-----

##-Beispiel 4.29: Grad und Koeffizienten einer Polynomfunktionen (C)

Geben Sie von der Polynomfunktion p mit p(x) =x^5 -5x^3 +2x^2 -4 den Grad und die Koeffizienten an.

-----

Lösung:

Das Polynom hat den Grad 5, da x^5 die höchste auftretende Potenz ist.

Koeffizienten: a\_5 =1, a\_4 =0, a\_3 =-5, a\_2 =2, a\_1 =0, a\_0 =-4

-----

##-Beispiel 4.30: Polynomfunktionen (B, C)

a) Die konstante Funktion mit y =2 ist eine Polynomfunktion vom Grad 0 mit a\_0 =2.

Ihr Graph ist eine horizontale Gerade.

Allgemein gilt: Die konstante Funktion hat keine Nullstelle.

-----

b) Die lineare Funktion mit y =1/2x +1 ist eine Polynomfunktion vom Grad 1 mit a\_1 =1/2 und a\_0 =1.

Ihr Graph ist eine Gerade.

Die lineare Funktion hat eine Nullstelle x\_1 =-2.

Allgemein gilt: Eine lineare Funktion hat genau eine Nullstelle.

-----

c) Die quadratische Funktion mit y =x^2 -x -2 ist eine Polynomfunktion vom

Grad 2 mit a\_2 =1, a\_1 =-1 und a\_0 =-2.

Ihr Graph ist eine Parabel.

Die quadratische Funktion hat zwei Nullstellen x\_1 =-1 und x\_2 =2.

x^2 -x -2 =(x +1) \*(x -2) =0

Allgemein gilt: Eine quadratische Funktion hat höchstens zwei Nullstellen.

(x -x\_1) \*(x -x\_2) =0

-----

konstante Funktion: y =a\_0

lineare Funktion: y =a\_1x +a\_0 (a\_1 \=0)

quadratische Funktion: y =a\_2x^2 +a\_1x +a\_0

j-93

##-Beispiel 4.30: Polynomfunktionen (Fortsetzung) (B, C)

d) Die kubische Funktion mit y =x^3 +2x^2 -x -2 ist eine Polynomfunktion vom Grad 3 mit a\_3 =1, a\_2 =2, a\_1 =-1 und a\_0 =-2.

Ihr Graph ist eine kubische Parabel, die s-förmig verläuft.

Die kubische Funktion hat drei Nullstellen x\_1 =-2, x\_2 =-1 und x\_3 =1.

x^3 +2x^2 -x -2 =(x +2) \*(x +1) \*(x -1) =0

Allgemein gilt: Eine kubische Funktion hat höchstens drei Nullsteilen und mindestens eine Nullstelle.

(x -x\_1) \*(x -x\_2) \*(x -x\_3) =0

-----

e) Die Funktion mit y =x^4 -2x^3 -x^2 +2x ist eine Polynomfunktion vom Grad 4 mit a\_4 =1, a\_3 =-2, a\_2 =-1, a\_1 =2 und a\_0 =0.

Ihr Graph ist eine Parabel vierter Ordnung, die w-förmig verläuft.

Die Funktion hat vier Nullstellen x\_1 =-1, x\_2 =0, x\_3 =1 und x\_4 =2.

x^4 -2x^3 -x^2 +2x =(x +1) \*x \*(x -1) \*(x -2)

Allgemein gilt: Eine Funktion vierten Grades hat höchstens vier Nullstellen.

(x -x\_1) \*(x -x\_2) \*(x -x\_3) \*(x -x\_4) =0

-----

kubische Funktion:

y =a\_3x^3 +a\_2x^2 +a\_1x +a\_0

-----

Funktion vierten Grades:

y =a\_4x^4 +a\_3x^3 +a\_2x^2 +a\_1x +a\_0

-----

Wie können die Nullstellen einer Polynomfunktion ermittelt werden?

Haben in einem Intervall [x\_1; x\_2] die Funktionswerte einer Polynomfunktion an den Randpunkten x\_1 und x\_2 verschiedene Vorzeichen, so gibt es wegen der Stetigkeit der Polynomfunktion in diesem Intervall mindestens eine Nullstelle x\_0, d. h., f(x\_0) =0.

Das Intervall [x\_1; x\_2] kann weiter eingeengt und so die Nullste le auf beliebige Genauigkeit ermittelt werden. Mit technologischen Hilfsmitteln können Nullstellen auf Knopfdruck ermittelt werden.

-----

Abb.: Bei unstetigen Funktionen kann es Intervalle ohne Nullstelle geben, obwohl das Vorzeichen des Funktionswerts wechselt.

-----

##-Beispiel 4.31: Nullstellen (B)

Ermitteln Sie die Nullstellen der kubischen Funktion mit y =x^3 -4x +2.

Wertetabelle:

x | y

-4 | -46

-3 | -13

-2 | 2

-1 | 5

0 | 2

1 | -1

2 | 2

3 | 17

4 | 50

Es gibt drei Intervalle [-3; -2], [0; 1] und [1; 2], in denen die Vorzeichen der Funktionswerte wechseln.

In jedem dieser Intervalle muss wegen der Stetigkeit der Funktion eine Nullstelle liegen.

Das Intervall [1; 2] kann weiter eingeengt und die Nullstelle etwa auf drei Kommastellen ermittelt werden:

x | 1,6 | 1,7

y | -0,3 | 0,1

-----

x | 1,67 | 1,68

y | -0,02 | 0,02

-----

x | 1,675 | 1,676

y | -0,001 | 0,004

Nullstelle: x\_1 ~~1,675

Ähnlich erhält man im Intervall [-3; -2] die Nullstelle x\_2 ~~ -2,214 und in [0; 1] die Nullstelle x\_3 ~~0,539.

-----

Abb.: Mit einem GTR kann die Nullstelle mit dem Befehl zero ermittelt werden.

j-94

|Definition: Gleichung n-ten Grades|

Eine (algebraische) Gleichung n-ten Grades ist eine Gleichung der Form p(x) =0, wobei p(x) ein Polynom n-ten Grades ist.

a\_n \*x^n +a\_(n -1) \*x^(n -1) +... +a\_1 \*x +a\_0 =0

a\_0, a\_1, ..., a\_n 'el 'R, a\_n \=0

-----

|Satz: Fundamentalsatz der Algebra|

Eine Gleichung n-ten Grades der Form x^n +a\_(n -1) \*x^(n -1) +... +a\_

1 \*x +a\_0 =0

hat höchstens n reelle Lösungen x\_1, x\_2, ..., x\_n.

Sie lässt sich im Falle von n Lösungen in Linearfaktoren zerlegen:

(x -x\_1) \*(x -x\_2) \*... \*(x -x\_n) =0

mit a\_0 =(-1)^n \*x\_1 \*x\_2 \*... \*x\_n

Diese n Lösungen müssen nicht voneinander verschieden sein.

Eine Gleichung n-ten Grades mit ungeradem Grad hat mindestens eine reelle Lösung.

Eine Gleichung n-ten Grades mit geradem Grad kann auch keine reelle Lösung haben.

-----

##-Beispiel 4.32: Gleichung höheren Grades (A, C)

a) Die Gleichung x^5 -x^4 -9x^3 +5x^2 +16x -12 =0 kann in die Form

(x -1)^2 \*(x +2)^2 \*(x -3) =0 gebracht werden.

Lesen Sie die Lösungen der Gleichung ab.

x\_1 =1 ist eine Doppellösung,

x\_2 =-2 ist ebenfalls eine Doppellösung,

x\_3 =3 ist eine einfache Lösung.

L ={-2\_((2)); 1\_((2)); 3}

-----

b) Stellen Sie eine algebraische Gleichung auf, die die Lösungen x\_1 =2 als Doppellösung und x\_2 =3 und x\_3 =-4 je als einfache Lösung hat:

Bilden Sie die Linearfaktoren (x -x\_1), (x -x\_1), (x -x\_2) und (x -x\_3) und setzen Sie deren Produkt gleich null:

(x -2) \*(x -2) \*(x -3) \*(x +4) =0

(x -2)^2 \*(x -3) \*(x +4) =0

(x^2 -4x +4) \*(x^2 +x -12) =0

x^4 -3x^3 -12x^2 +52x -48 =0

-----

Hinweis: Beachten Sie:

(-1)^5 \*1 \*1 \*(-2) \*(-2) \*3 =-12 =a\_0

-----

Hinweis: Beachten Sie:

(-1)^4 \*2 \*2 \*3 \*(-4) =-48

-----

Gleichungen n-ten Grades sind leicht lösbar für den Grad 1 (lineare Gleichung) und für den Grad 2 (quadratische Gleichung).

Auch für Gleichungen dritten und vierten Grades gibt es Lösungsformeln, die allerdings so kompliziert sind, dass sie wenig verwendet werden.

Für Gleichungen ab dem Grad 5 gibt es keine Lösungsformel mehr. Diese Gleichungen können nur in Spezialfällen oder näherungsweise gelöst werden. Dass es für Gleichungen ab dem Grad 5 keine Lösungsformel geben kann, hat Niels Henrik Abel 1826 gezeigt.

Kennt man allerdings eine Lösung x\_1 einer Gleichung, so lässt sich durch Abspalten des zugehörigen Linearfaktors x -x\_1 der Grad der Gleichung um eins erniedrigen.

-----

Abb.: NIELS HENRIK ABEL, 1802 BIS 1829, NORWEGISCHER MATHEMATIKER

j-95

##-Beispiel 4.33: Abspalten eines Linearfaktors (B)

Lösen Sie: x^3 -5x -2 =0

Ganzzahlige Lösungen müssen Teiler von a\_0 =-2 sein.

Es kommen die Teiler -2, -1, 1 und 2 in Frage.

Der Wertetabelle der zugehörigen kubischen Funktion mit y =x^3 -5x -2 kann

man die ganzzahlige Lösung x\_1 =-2 entnehmen:

x | y

-3 | -14

2 | 0

-1 | 2

0 | -2

1 | -6

2 | -4

3 | 10

4 | 42

Nun kann der Linearfaktor x +2 durch Division abgespalten werden:

(x^3 -5x -2) /(x +2) =x^2 -2x -1

Löst man die quadratische Gleichung x^2 -2x -1 =0, erhält man die Lösungen

x^2 =1 -'w2 ~~ -0,4142 und x\_3 =1 +'w2 ~~2,4142.

-----

Also gilt:

x^3 -5x -2 =0

(x +2) \*(x -1 +'w2) \*(x -1 -'w2) =0

L ={-2; 1 -'w2; 1 +\*'w2}

Mit GeoGebra erhalten Sie die exakten Lösungen mit dem Löse-Befehl.

-----

Hinweis: Mit einem GTR erhalten wir für x\_2 und x\_3 die Näherungswerte -0,4142 und 2,4142:

-----

##-Beispiel 4.34: Lösen durch Faktorisieren (B)

a) Lösen Sie durch Faktorisieren: 4x^3 -x^2 =0

x^2 \*(4x -1) =0

x =0^((2)) oder 4x -1 =0

L ={0; 1/4}

-----

b) Lösen Sie durch Faktorisieren: x^5 -4x^3 =0

x^3 \*(x^2 -4) =0

x =0^((3)) oder x^2 -4 =0

x =0^((3)) oder x =-2 oder x =2

L ={-2; 0; 2}

-----

#### \*\*-4 - Übungsaufgaben

4.054.)

B

Ermitteln Sie die Lösungsmenge:

a) x^3 -6x -4 =0

b) x^3 -3x^2 +2 =0

c) x^3 -17x -4 =0

d) x^3 -29x +42 =0

e) x^3 +x^2 -10x -12 =0

f) x^3 -7x^2 +13x -3 =0

g) x^3 -9x^2 +21x -13 =0

h) 4x^3 -12x^2 +9x =0

i) 4x^3 +4x^2 +x =0

j) x^4 -5x^3 -x^2 +11x +6 =0

k) x^4 -3x^3 -5x^2 +13x +6 =0

-----

4.055.)

A

Erstellen Sie die einfachste algebraische Gleichung, die die angegebenen Zahlen als Lösungen hat.

a) 1; 2; 2; 3

b) 1; 1; 2; 2; 3

c) 0; 1; 1; 1; 2; 2

d) 0; 0; 1; 1; 1; 2

e) 1; -1; 2; -2; -2

-----

Zu Übungsaufgabe 4.055:

Jede dieser Gleichungen besitzt mindestens eine ganzzahlige Lösung x\_1 Spalten Sie den Linearfaktor x -x\_1 ab und berechnen Sie die weiteren Lösungen.

j-96

4.056.)

A, D

Erstellen Sie die Gleichung der Polynomfunktion.

Erklären Sie Ihre Vorgangsweise.

-----

4.057.)

A, B

Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen der Polynomfunktion f mit y =x^3 +3x^2 +3x +1 und der Geraden g mit y =x +1.

-----

4.058.)

B

Ermitteln Sie die Lösungsmenge durch Faktorisieren:

a) 4x^3 -x^2 =0

b) 4x^3 =x

c) 2x^3 -3x^2 =0

d) 1/6 x^3 -x =-1/6 x^2

e) x^5 -4x^3 =0

f) x^5 +4x^3 =0

-----

4.059.)

A, B, C

Für den Weihnachtsmarkt einer sozialpädagogischen Institution werden Faltschachteln ohne Deckel hergestellt.

Das Ausgangsmaterial ist Karton, der in Quadrate mit einer Seitenlänge von 20 cm zugeschnitten wurde (siehe Skizze).

a) Erstellen Sie eine Funktion, die das Volumen V der Schachtel in Abhängigkeit von der Höhe x beschreibt.

-----

b) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen mit Technologieeinsatz.

-----

c) Lesen Sie aus dem Funktionsgraphen näherungsweise das größte Volumen und die zugehörige Höhe ab.

-----

4.060.)

C, D

In einem Simulationsprogramm soll die Flugbahn eines Golfballs in ebenem Gelände dargestellt werden. Sie kann näherungsweise durch folgende Funktion h beschrieben werden:

h(x) =-4,63 \*10^(-6)x^3 +0,2x

x waagrechte Entfernung vom Abschlag in Metern

h(x) Höhe des Balls in Meter in x Meter Entfernung vom Abschlag

a) Ein 12 m hoher Baum, der genau in der Flugbahn des Golfballs steht, wird von diesem gerade noch überflogen.

Erklären Sie, wie Sie berechnen können, in welcher Entfernung vom Abschlag sich der Baum befindet.

-----

b) Der Graph stellt die Flugbahn eines anderen Golfballs dar. Ein 10 m hoher

Baum, der genau in der Flugbahn des Golfballs steht, wird von diesem gerade noch überflogen.

Kennzeichnen Sie die möglichen Standorte des Baums in der Zeichnung und lesen Sie die Werte für die Entfernung des Baums vom Abschlag ab.

j-97

#### \*\*-4 - Ziele erreicht?

Z 4.1.)

A, B, D

Eine Parabel entsteht durch eine Verschiebung der Grundparabel y =x^2 entlang der x-Achse um 2 nach rechts und entlang der y-Achse um 3 nach unten.

a) Erstellen Sie die Scheitelpunktform der Parabel.

-----

b) Berechnen Sie aus der Scheitelpunktform die Funktionsgleichung der Form y =ax^2 +bx +c.

-----

c) Lesen Sie aus der Funktionsgleichung ab, wo die Parabel die y-Achse schneidet.

-----

d) Argumentieren Sie an Hand der beschriebenen Verschiebungen, wie viele Nullstellen die Parabel besitzt.

-----

Z 4.2.)

A, B, C

Im Diagramm sind die Graphen von fünf quadratischen Funktionen f\_1, f\_2, ..., f\_5 dargestellt.

a) Erstellen Sie jeweils die Funktionsgleichung in der Form y =ax^2 +bx +c.

-----

b) Lesen Sie aus der Grafik ab, welche der Graphen symmetrisch zur y-Achse verlaufen.

-----

Z 4.3.)

A, B

a) Skizzieren Sie in der Grafik jene Parabel, die den Scheitel S hat und durch den Punkt A verläuft.

-----

b) Erstellen Sie die Gleichung dieser Parabel in der Scheitelpunktform.

-----

Z 4.4.)

A, B, D

Die Trisannabrücke ist eine Stabbogenbrücke mit einer Spannweite von 120 m und einer maximalen Höhe von ca. 18 m.

a) Erstellen Sie eine Funktionsgleichung für den Brückenbogen, wenn die Achsen des Koordinatensystems wie eingezeichnet verlaufen.

-----

b) Erklären Sie, in welchem Punkt des Brückenbogens der Ursprung des Koordinatensystems gewählt wurde, wenn der Brückenbogen durch die Gleichung f(x) =-0,005x^2 +0,6x beschrieben wird.

j-98

Z 4.5.)

A, B

Eine Spieldecke wird von zwei parabelförmigen Bögen überspannt.

Die Höhe des kleineren Bogens kann annähernd durch eine quadratische Funktion h beschrieben werden:

h(x) =-(10)/9x^2 +4/3x, wobei x und h(x) in Meter angegeben sind.

a) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen d des Spielbogens.

-----

b) Berechnen Sie die maximale Höhe H des Spielbogens.

-----

Z 4.6.)

B, C

Gegeben ist die quadratische Funktion f mit f(x) =ax^2 +12x +4.

Wählen Sie den Koeffizienten a so, dass die Funktion

a) genau eine,

b) zwei,

c) keine Nullstellen besitzt.

-----

Z 4.7.)

C, D

Kreuzen Sie die richtige Aussage an. Begründen Sie Ihre Entscheidung anhand der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

Gegeben ist die Gleichung ax^2 +bx +c =0.

a und c haben unterschiedliche Vorzeichen.

Dann hat die Gleichung

**[]** keine Lösung.

**[]** genau eine Lösung.

**[]** genau zwei Lösungen.

-----

Z 4.8.)

A, B, C, D

In den Diagrammen (1) und (2) sind die Graphen von Polynomfunktionen dargestellt.

a) Lesen Sie aus den Graphen jeweils die Nullstellen der Funktion ab.

-----

b) Erklären Sie, wie man aus den Nullstellen einer Polynomfunktion deren Gleichung ermitteln kann.

-----

c) Ermitteln Sie die Gleichungen der dargestellten Funktionen.

j-99

# \*\*-1 - 5 Geometrie und Trigonometrie

Bereits aus vorgeschichtlicher Zeit sind Zeugnisse erhalten, die darauf schließen lassen, dass sich der Mensch mit Geometrie beschäftigt hat. In der vorgriechischen Zeit diente die Geometrie der Lösung praktischer Probleme wie Flächen- und Volumsberechnungen. Im Papyrus Rhind (1700 v. Chr.) findet sich beispielsweise eine Vorgangsweise zur Berechnung eines gleichschenkeligen Trapezes.

Griechische Kaufleute wie Thales von Milet (um 624 bis 548 v. Chr.) brachten die Mathematik der Babylonier und Ägypter nach Griechenland. Die Griechen wandten sich von der Frage nach dem Wie immer mehr der Frage nach dem Warum zu. Das umfassendste Werk der griechischen Geometrie, die Elemente des Euklid (325 v. Chr.), enthielt keinerlei praktische Anwendungen mehr. Erst aus der Zeit um 100 n. Chr. sind mathematische Schriften überliefert, in denen Berechnungen für die Praxis durchgeführt wurden. Im Werk des Heron von Alexandrien (1. Jahrhundert n. Chr.) findet man zahlreiche Näherungsmethoden und Formeln zur Flächenberechnung, wie man sie zur Feldvermessung brauchte.

Die Kenntnis des pythagoräischen Lehrsatzes hat man lange Zeit den Ägyptern zugeschrieben. Die Ägypter haben jedoch lediglich Seilknoten im Abstand 3 / 4 / 5 zur Konstruktion eines rechten Winkels benützt. Den Babyloniern dagegen war der pythagoräische Lehrsatz bekannt und diente zur Lösung zahlreicher geometrischer Aufgaben.

Das schwierigste Problem aber war die Berechnung der Kreisfläche. Von den Ägyptern stammen ziemlich genaue Näherungsmethoden.

Sie verwendeten für den Inhalt der Fläche eines Kreises mit dem Durchmesser d die Formel A =((8d)/(9))^2.

Eine relativ genaue Berechnung der Kreisfläche und damit der Kreiszahl 'pi gelang erst Archimedes von Syrakus (287 bis 212 v. Chr.).

Er verwendete ein 96-Eck zur Berechnung und erhielt durch Ein- und Umschreiben

3 (10)/(71) <'pi <3 1/7

also 3,140845 <'pi <3,142857.

Auch grundlegende Eigenschaften ähnlicher Dreiecke waren den Babyloniern und Ägyptern bekannt. Die Dreieckslehre stammt in ihrem Inhalt bereits aus der Schule des Pythagoras, die Kongruenz von Dreiecken findet man jedoch erst bei Euklid.

Den bedeutendsten Beitrag leistete 1899 David Hilbert (1862 bis 1943) mit seinem Hauptwerk "Über die Grundlagen der Geometrie". Er schuf, auf Vorarbeiten von Felix Klein (1849 bis 1925) aufbauend, ein widerspruchsfreies System der Geometrie.

Die ersten Überlegungen zu trigonometrischen Funktionen findet man bei den Ägyptern im Papyrus Rhind. Im Wesentlichen ist aber die Trigonometrie eine griechische "Erfindung". Die ältesten Überlieferungen dieser Art stammen von Aristarchos (310 bis 230 v. Chr.).

Die heutigen Bezeichnungen sin, cos und tan stammen im Wesentlichen von dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783), der auch als Erster die Werte der Kreisfunktionen als Zahlen definierte und die trigonometrischen Funktionen auf beliebige Winkel verallgemeinerte.

-----

Im großen Garten der Geometrie kann sich jeder nach seinem Geschmack einen Strauß pflücken.

-----

Abb.: DAVID HILBERT, 1862 BIS 1943, DEUTSCHER MATHEMATIKER

-----

Abb.: EUKLID VON ALEXANDRIA, CA. 360 BIS 280 v. CHR., GRIECHISCHER MATHEMATIKER

-----

Abb.: LEONHARD EULER, 1707 BIS 1783, SCHWEIZER MATHEMATIKER

j-100

#### \*\*-4 - Meine Ziele

Nach Bearbeitung dieses Kapitels kann ich

* die grundlegenden Sätze und Formeln für Drei- und Vierecke und den Kreis erklären und anwenden,
* ähnliche und kongruente Figuren sowie den Strahlensatz und seine Anwendungen beschreiben,
* einen Winkel in Grad und Radiant angeben und zwischen diesen Winkelmaßen umrechnen,
* Sinus, Kosinus und Tangens eines Winkels als Seitenverhältnisse im rechtwinkeligen Dreieck modellieren, interpretieren und argumentieren.
* Sinus, Kosinus und Tangens zur Auflösung und zur Berechnung von ebenen Figuren verwenden,
* Vermessungsaufgaben lösen.

#### \*\*-4 - Worum geht's hier?

Die Fahrt mit der Seilbahn von Station A nach B auf den Gipfel des Mt. Glaciers dauert 16 Minuten. Die mittlere Geschwindigkeit der Kabine beträgt zwei Meter pro Sekunde. Die Kabine bewegt sich vereinfacht längs einer Geraden, die mit der Horizontalen einen Winkel von 25° bildet.

Berechnen Sie, welche Höhe h die Seilbahn überwindet.

Grafische Lösung:

1. Dazu berechnet man die Länge der Strecke |AB|, auf der sich die Kabine bewegt: Der mittleren Geschwindigkeit der Kabine von 2 m/s entspricht eine mittlere Geschwindigkeit von 120 m/min. Da die Kabine 16 Minuten fährt, legt sie in dieser Zeit insgesamt 16 \*120 m =1920 m zurück.

-----

2. Aus einer möglichst großen Zeichnung, etwa im Maßstab 1 :10000, liest man die Höhe h mit etwa 800 m ab.

-----

Mit den bisherigen Kenntnissen ist die Aufgabe rechnerisch nicht lösbar. Würden wir die Länge der unzugänglichen Strecke |AF| kennen, so könnten Sie die gesuchte Höhe h mit dem Satz des Pythagoras berechnen.

Sie werden im folgenden Kapitel Winkelfunktionen definieren und kennen lernen und können damit die Aufgabe rechnerisch lösen.

1. Im rechtwinkeligen Dreieck AFB ist die Höhe h die Gegenkathete zum Winkel von 25°.

Damit gilt: sin(25°) =Gegenkathete/Hypotenuse =h/(1920 m)

-----

2. Umformen und Eintippen:

h =1920 m \*sin(25°)

h ~~811 m

Das rechnerische Ergebnis passt sehr gut zu den grafisch ermittelten 800 m.

-----

Abb.: Die Höhe h wurde mit GeoGebra grafisch ermittelt.

|AB| =1920

h =811.43

'al =25°

-----

Der zugehörige Konstruktionsweg:

1. Winkel 'al einzeichnen.

2. Strecke |AB| von A aus abtragen.

3. Lot im Punkt B einzeichnen und Fußpunkt F ermitteln.

4. Länge der Strecke |FB| ablesen.

j-101

## \*\*-2 - 5.1 Grundlagen der ebenen Geometrie

### \*\*-3 - 5.1.1 Dreieck

Ein Dreieck (griechisch: trigon) entsteht, wenn sich drei Geraden in einer Ebene in drei verschiedenen Punkten schneiden, die man gegen den Uhrzeigersinn mit Großbuchstaben (z. B. A, B und C) bezeichnet.

Die drei den Eckpunkten A, B und C gegenüberliegenden Seiten bezeichnet man mit gleich lautenden Kleinbuchstaben, also a, b und c.

Die Winkel des Dreiecks bezeichnet man mit griechischen Kleinbuchstaben, also mit 'al, 'be und 'ga.

-----

|Bezeichnung von Winkeln|

'al | alpha

'be | beta

'ga | gamma

'de | delta

'ep | epsilon

'ph | phi

'my | my

'rh | rho

'si | sigma

'om | omega

-----

|Definition: Arten von Winkeln|

'al =0°

Nullwinkel

-----

0° <'al <90°

spitzer Winkel

-----

'al =90°

rechter Winkel

-----

90° <'al <180°

stumpfer Winkel

-----

'al =180°

gestreckter Winkel

-----

180° <'al <360°

erhabener Winkel

-----

'al =360°

voller Winkel

-----

|Definition: Komplementärwinkel und Supplementärwinkel|

'al und 'be heißen Komplementärwinkel, wenn gilt: 'al +'be =90°.

'al und 'be heißen Supplementärwinkel, wenn gilt: 'al +'be =180°.

-----

Die folgenden Sätze werden häufig zur Berechnung von fehlenden Bestimmungsstücken in Dreiecken benötigt:

-----

|Satz: Dreiecksungleichung|

In einem Dreieck ist die Summe der Längen zweier Seiten immer größer als die Länge der dritten Seite.

-----

|Satz: Winkelsumme im Dreieck|

Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 180°: 'al +'be +'ga =180°.

-----

Dreiecksungleichungen:

a +b >c

a +c >b

b +c >a

-----

Winkelsumme 'al +'be +'ga =180°

Begründung:

Der Winkel von 180° im Eckpunkt C setzt sich aus den drei Winkeln 'be und 'ga zusammen. Es gilt somit: 'al +'be +'ga =180°, da 'al und 'be im Punkt C die (gleich großen) Parallelwinkel zu den Winkeln in den Eckpunkten A und B sind.

-----

|Satz von Thales|

Liegt eine Seite eines Dreiecks auf einem Durchmesser des Umkreises, so ist der dieser Seite gegenüberliegende Winkel ein rechter Winkel.

Kurz: Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.

-----

Abb.: Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.

j-102

Begründung:

Für den Beweis des Satzes zerlegt man das Dreieck ABC in die beiden gleichschenkeligen Dreiecke AMC und MBC. M ist der Mittelpunkt des Halbkreises.

Dadurch erkennen Sie, dass der Winkel im Endpunkt C aus 'al +'be zusammengesetzt ist und es gilt mit dem Satz von der Winkelsumme

'al +'be +('al +'be) =180°

2 \*('al +'be) =180°

'al +'be =90°

Somit ist der Winkel im Eckpunkt C ein rechter Winkel.

-----

|Kongruenz und Ähnlichkeit|

Sicherlich haben Sie schon Bilder aus dem Internet kopiert und in eines Ihrer Dokumente eingefügt. Wenn Sie ein Bild einfügen und unverändert lassen, haben Sie im Allgemeinen eine kongruente (deckungsgleiche) Figur erzeugt.

-----

|Definition: Kongruenz|

Zwei ebene Figuren sind zueinander kongruent (deckungsgleich), wenn sie in ihrer Größe und Gestalt völlig übereinstimmen. Alle einander entsprechenden Seiten sind gleich lang und alle entsprechenden Winkel sind gleich groß.

-----

Kongruente Figuren erhält man durch Drehungen, Parallelverschiebungen und Spiegelungen.

-----

Abb.: Zwei kongruente Dreiecke Schreibweise:

ABC ~=A'B'C'

-----

|Definition: Ähnlichkeit|

Zwei ebene Figuren sind zueinander ähnlich, wenn sie in ihrer Form übereinstimmen. In ähnlichen Figuren sind entsprechende Winkel gleich groß und die Längen entsprechender Seiten haben dasselbe Verhältnis.

-----

Zwei kongruente Figuren sind immer auch ähnlich, während ähnliche Figuren im Allgemeinen nicht kongruent sind.

-----

Abb.: Das Dreieck A'B'C' ist zum Dreieck ABC ähnlich. Es ging durch eine Streckung aus dem ursprünglichen Dreieck ABC hervor.

-----

|Satz: Ähnliche Dreiecke|

Zwei Dreiecke ABC und A'B'C' sind ähnlich, wenn je zwei entsprechende Winkel gleich groß sind.

Schreibweise: ABC ~A'B'C'

Es gilt:

'al ='al' und 'be ='be' und 'ga ='ga'

a' =k \*a und b' =k \*b und c' =k \*c

a' /a =b' /b =c' /c =k Proportionalitätsfaktor

-----

|Interpretation des Proportionalitätsfaktors k|

* k >1 Das Dreieck A'B'C' ist durch Streckung aus dem Dreieck ABC hervorgegangen.
* k =1 Die beiden Dreiecke sind kongruent.
* 0 <k <1 Das Dreieck A'B'C' ist durch Stauchung aus dem Dreieck ABC hervorgegangen.

-----

Abb.: In vielen Programmen können Grafiken durch die Eingabe eines Proportionalitätsfaktors k vergrößert oder verkleinert werden. Das Beispiel zeigt die Einstellungen für die Verkleinerung einer Grafik auf 70 % ihrer Originalgröße (k =0,7).

j-103

##-Beispiel 5.1: Kongruenz und Ähnlichkeit (B)

Kongruenz:

Durch Kopieren eines Bildes erhalten wir deckungsgleiche Figuren. Die Bilder

sind kongruent.

-----

Ähnlichkeit:

Die Bilder stimmen in Gestalt und Form überein, aber nicht in der Größe. Durch Ziehen des Bildes an den Ecken wird die Größe der Figur verändert.

-----

Weder Kongruenz noch Ähnlichkeit:

Durch Ziehen des Bildes an den Seitenrändern wird die Figur deformiert, die beiden Bilder sind weder kongruent noch ähnlich.

-----

Im ersten Band wurden die Graphen linearer Funktionen mithilfe ihrer Steigungsdreiecke gezeichnet. Wenn die Steigung k einer Geraden nicht ganzzahlig war, wurde häufig mit einem ähnlichen Dreieck gearbeitet.

Die Grundlage dafür ist der Strahlensatz.

-----

|Strahlensatz - ähnliche Figuren|

In ähnlichen Figuren sind die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich.

Das Dreieck ABC ist zum Dreieck A'B'C' ähnlich.

ABC ~A'B'C <=>

c' =k \*c k >1 Streckung

b' =k \*b k =1 kongruente Dreiecke

a' =k \*a 0 <k <1 Stauchung

Daher gilt: a\* /a =b' /b =c' /c =k k Proportionalitätsfaktor

-----

Tipp: Der Strahlensatz gehört zu den wichtigsten Aussagen der Elementargeometrie.

-----

Abb.: Eine allgemeine Situation für den Strahlensatz: Die Dreiecke ABC und A'B'C' sind ähnlich.

-----

##-Beispiel 5.2: Baumhöhe - Ähnlichkeit (Strahlensatz) (A, B)

Der 25 Meter lange Schatten eines Baumes endet beim Punkt A auf einer Wiese.

Stellt man eine 1,5 Meter lange Messlatte senkrecht so auf, dass der Schatten des oberen Endes der Latte ebenfalls in A fällt, so kann man die Höhe des Baumes ermitteln.

Die Länge des Schattens der Latte beträgt 2 m.

a) Erstellen Sie eine möglichst realitätsgetreue Skizze.

-----

b) Berechnen Sie die Höhe des Baumes mithilfe ähnlicher Dreiecke.

-----

Lösung:

a) Nicht darstellbar.

b) Aufgrund der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke ABC und ADE gilt:

|DE| /|BC| =|AD| /|AB|

h /1,5 =25 /2

h =(25)/2 \*1,5 =18,75

Die Höhe des Baumes beträgt etwa 18,75 Meter.

-----

Hinweis: Um die Berechnung beim Umformen der Gleichung einfacher zu machen, beginnen Sie ihren Gleichungsansatz immer mit der gesuchten Größe:

|DE| /|BC| =|AD| /|AB|

j-104

|Der Flächeninhalt|

Jede geschlossene Linie (z. B. Dreieckslinie, Kreislinie) zerlegt eine Ebene in Teilflächen. Die Fläche einer ebenen Figur besteht aus allen Punkten der Figur, die sich im Inneren oder auf der Randlinie der Figur befinden.

Ein Flächeninhalt einer ebenen Figur von 12 cm^2 bedeutet, dass das Einheitsquadrat 1 cm^2 zwölfmal in der Figur enthalten ist.

-----

|Definition: Messen und Einheit|

Eine Fläche messen heißt feststellen, wie oft eine Flächeneinheit in der Fläche enthalten ist.

-----

|Satz: Flächeninhalt von Rechteck und rechtwinkeligem Dreieck|

* Ein Rechteck mit der Länge a und der Breite b hat den Flächeninhalt a \*b: A =a \*b
* Ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Katheten a und b hat den Flächeninhalt (a 'b)/2: A =(a \*b)/2

Eine Fläche mit 12 cm^2 Flächeninhalt

-----

Tipp: A ist die Bezeichnung für Flächeninhalt. Sie ist abgeleitet von area (lateinisch: Fläche).

-----

##-Beispiel 5.3: Verhältnis der Flächeninhalte zweier Dreiecke (A, B)

Die Seiten von zwei ähnlichen Dreiecken verhalten sich wie 3 / 4.

Berechnen Sie für die abgebildeten Dreiecke, wie sich die beiden Flächeninhalte A\_1 und A\_2 zueinander verhalten. Entnehmen Sie die zur Berechnung benötigten Größen aus der Grafik in der Randspalte.

A\_1 =(3 \*2)/2 =3

A\_2 =(4 \*8/3)/2 =16

A\_1 /A\_2 =3 /(16)/3 =9 /16

Die beiden Flächeninhalte verhalten sich wie 9 /16 =3^2 /4^2.

-----

Allgemein gilt für ähnliche Figuren:

|Satz: Verhältnis von Flächeninhalten ähnlicher Figuren|

In ähnlichen Figuren verhalten sich entsprechende Flächeninhalte wie die Quadrate entsprechender Strecken.

A' /A =a'^2 /a^2 =h'^2 /h^2 =... =k^2

-----

|Satz: Das n-fache einer Fläche|

* Man erhält das n-fache einer Fläche, indem man jede Länge der ursprünglichen Figur mit dem Faktor k ='wn multipliziert.
* Wird jede Länge der ursprünglichen Figur um den Faktor k vergrößert, dann vergrößert sich die Fläche der Figur um den Faktor k^2.

-----

##-Beispiel 5.4: Verfünffachung einer Rechtecksfläche unter Beibehaltung der Seitenverhältnisse (A, B)

Um die Fläche eines Rechteckes mit a =4 cm und b =3 cm zu verfünffachen, werden die Länge und die Breite mit 'w(5) multipliziert.

A =12 cm^2

a' =4 \*'w(5) ~~8,9443

b' =3 \*'w(5) ~~6,7082

-----

Probe:

A' =a' \*b' =3 \*'w(5) '4 'w(5) =3 \*4 \*'w(5) \*'w(5) =12 \*5 =60 =5 \*12

A =60 cm^2

-----

Abb.: Die beiden Flächeninhalte A und A' der Rechtecke verhalten sich wie 1 / 5.

j-105

##-Beispiel 5.5: Hausplan im Maßstab 1 : 250 (A, B, D)

Auf einem Vermessungsplan im Maßstab 1 : 250 erscheint ein rechteckiges Wohnhaus a =5,2 cm breit und b =3,5 cm lang. Die bebaute Fläche beträgt somit im Plan A =18,2 cm^2.

a) Berechnen Sie die Abmessungen des Hauses sowie den Inhalt A' der bebauten Fläche in der Realität.

-----

b) Zeigen Sie, dass sich die Flächeninhalte wie A / A' =1 / 250^2 verhalten.

-----

Lösung:

a) Der Maßstab 1 : 250 bedeutet, dass 1 cm auf dem Plan 250 cm =2,5 m in der Realität entsprechen.

Die Breite b' des Hauses in der Realität: b' =3,5 cm \*250 =875 cm =8,75 m

Die Länge a' des Hauses in der Realität: a' =1300 cm =13 m

-----

b) Bebaute Fläche: A' =875 cm \*1300 cm =1137500 cm^2 =113,75 m^2

Es gilt: A / A' =18,2 / 1137500 =1 / 62500 =1 / 250^2

-----

Tipp: Ein Maßstab definiert das Verhältnis einer Länge auf einer Karte zu ihrer Entsprechung in der Natur.

Ist eine Karte im Verhältnis 1 / k gezeichnet, dann entspricht eine Länge von 1 cm auf der Karte einer Länge von k cm in der Realität.

Einer Fläche von 1 cm^2 auf der Karte entspricht eine Fläche von k^2 cm^2 in der Realität.

-----

##-Beispiel 5.6: Flächeninhalt von Dreiecken (B, C)

Vergleichen Sie die vier Dreiecke und berechnen Sie deren Flächeninhalt.

Während Sie für das erste Dreieck direkt mit dem obigen Satz A =(a \*b)/2 also A =(6 \*6)/2 =18 rechnen können, müssen Sie die anderen drei Dreiecke jeweils in zwei rechtwinkelige Dreiecke zerlegen.

Für das zweite Dreieck ist A =A\_1 +A\_2 =(4 \*6)/2 =(2 \*6)/2 =12 +6 =18.

Alle vier Dreiecke besitzen denselben Flächeninhalt von 18 cm^2.

-----

Hinweis: Die vier Dreiecke des Beispiels 5.6 wurden mit GeoGebra gezeichnet.

-----

Im Algebrafenster wird der Flächeninhalt der Figuren angezeigt:

A\_(Dreieck) =18

A\_(Quadrat) =1

-----

|Satz: Umfang und Flächeninhalt eines allgemeinen Dreiecks|

Für ein allgemeines Dreieck mit den Seiten a, b und c und den Höhen h\_a, h\_b und h\_c gilt:

Umfang: u =a +b +c

Der Umfang ist die Summe der drei Seiten.

-----

Flächeninhalt:

A =(a \*h\_a)/2 =(b \*h\_b)/2 =(c \*h\_c)/2

Der Flächeninhalt ergibt sich als Seite mal zugehörige Höhe dividiert durch 2.

-----

u =a +b +c

A =(Seite \*zugehörige Höhe)/2

-----

Begründung:

Die Formel für den Flächeninhalt des allgemeinen Dreiecks leitet man mithilfe der Skizze in der Randspalte ab.

1. Die Höhe h\_c auf die Seite c wird gezeichnet und halbiert.

-----

2. Danach wird das Rechteck mit der Länge c und der Breite y gezeichnet.

Dadurch entstehen die kongruenten Dreiecke AEG und CEK sowie DBF und DCK.

-----

3. Der Flächeninhalt des allgemeinen Dreiecks ABC ist daher gleich groß wie der des eingezeichneten Rechtecks:

A =(c \*h\_c)/2

Diese drei Schritte können mit jeder der drei Seiten des Dreiecks durchgeführt werden.

j-106

Der Flächeninhalt eines allgemeinen Dreiecks mit drei gegeben Seiten kann mithilfe der Flächenformel von Heron berechnet werden.

-----

|Satz: Heronsche Flächenformel|

Der Flächeninhalt eines allgemeinen Dreiecks mit den Seiten a, b und c lässt sich mithilfe des halben Umfangs s berechnen:

A ='w(s \*(s -a) \*(s -b) \*(s -c)) mit s =(a +b +c)/2 =u/2

-----

Abb.: HERON VON ALEXANDRIA, IM 1. JH. N. CHR., ÄGYPTISCHER MATHEMATIKER

-----

##-Beispiel 5.7: Flächenberechnung mit der Heronschen Flächenformel (A, B, D)

Von einem Dreieck sind die Seitenlängen a =26 cm, b =8 cm und c =30 cm bekannt.

a) Berechnen Sieden Flächeninhalt des Dreiecks.

-----

b) Erklären Sie, wie Sie mithilfe einer genauen Zeichnung den berechneten Wert überprüfen können.

-----

Lösung:

a) Aus u =64 cm und s =32 cm folgt:

s =a =6 cm,

s =b =24 cm und

s =c =2 cm und daher:

A ='w(32 \*6 \*24 \*2) =96

Der Flächeninhalt beträgt 96 cm^2.

-----

b) Aus einer genauen Zeichnung wird die Höhe h\_c abgelesen.

Zum Vergleich des Ergebnisses wird aus der Formel A =(c \*h)/2 die Höhe h\_c freigestellt und mit der abgelesenen Höhe verglichen.

A =(c \*h)/2 h\_c =(2A)/c =2 \*(96)/(30) =6,4

Höhe h\_c =6,4 cm

-----

Einen Beweis der Heronschen Flächenformel finden Sie auf der Übungs-CD-ROM.

-----

Hinweis: Konstruktionsgang zum Beispiel 5.7:

1. Strecke |AB| =c einzeichnen.

2. Strecke |AC| =b abschlagen.

3. Strecke |BC| =a abschlagen liefert C.

4. Höhe auf c einzeichnen und ablesen.

|Rechtwinkeliges Dreieck|

Im rechtwinkeligen Dreieck nennt man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die Hypotenuse und die am rechten Winkel angrenzenden Seiten Katheten.

Die Hypotenuse c wird durch die Höhe h\_c in zwei Hypotenusenabschnitte p und q unterteilt. p ist der an der Kathete a anliegende Hypotenusenabschnitt.

a, b Katheten

p, q Hypotenusenabschnitte

c Hypotenuse

A =(a \*b)/2 Fläche des rechtwinkeligen Dreiecks

Das Dreieck ADC ist zum Dreieck ABC ähnlich, daher gilt: c / b =b / q

Das Dreieck DBC ist ebenfalls zum Dreieck ABC ähnlich, also: c / a =a / p

-----

Abb.: Ein rechtwinkeliges Dreieck mit den drei Höhen h\_a =b, h\_b =a und h\_c =h und den Hypotenusenabschnitten p und q

hypoteinusa: griechisch für "die sich unten erstreckende Seite"

kathetas: griechisch für Senkblei

j-107

Durch das Auflösen der Verhältnisgleichungen erhalten Sie die

|Satzgruppe des Pythagoras für das rechtwinkelige Dreieck|

Kathetensatz

a^2 =c \*p

b^2 =c \*q

a^2 +b^2 =c \*(p +q)

Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich dem Produkt aus Hypotenuse und dem dieser Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt.

-----

Satz des Pythagoras

a^2 +b^2 =c^2

Die Summe der Quadrate der Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich dem Quadrat der Hypotenuse.

-----

Höhensatz h^2 =p \*q

Das Quadrat der Höhe h eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich dem Produkt der Hypotenusenabschnitte p und q.

-----

Der Höhensatz folgt sofort aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADC und DBC:

q / h =h / p

-----

Alle drei Sätze

a^2 =c \*p rechts

b^2 =c \*q links

a^2 +b^2 =c^2 ganzes Bild sind in der Grafik dargestellt.

-----

|Gleichschenkeliges Dreieck|

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

h\_c ='w(a^2 -(c^2)/4) =1/2 \*'w(4a^2 -c^2)

-----

|Regelmäßige Vielecke|

Regelmäßige Vielecke bestehen immer aus gleichschenkeligen Dreiecken.

Fünfeck, Siebeneck, Neuneck

-----

Abb.: Gleichschenkeliges Dreieck: a =b und 'al ='be

Die Höhe h\_c teilt das gleichschenklige Dreieck in 2 kongruente rechtwinkelige Dreiecke.

-----

|Gleichseitiges Dreieck|

Ein gleichseitiges Dreieck ist eine höchst symmetrische Figur. Alle Seiten, Winkel und Höhen sind jeweils gleich groß. Wegen des Satzes über die Winkelsumme ist jeder Winkel 60° groß.

Die Länge der Höhe wird mit dem Satz des Pythagoras berechnet:

h^2 =a^2 -(a/2)^2 =3/4 \*a^2 also h =a/2 \*'w(3)

Daher ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks: A =(a \*h)/2 =(a^2)/4 \*w(3)

-----

Abb.: Gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a und dem Winkel 'al =60°:

h =a/2 \*'w(3)

A =(a^2)/4 \*'w(3)

j-108

##-Beispiel 5.8: Regelmäßiges Sechseck (A, B)

Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechsecks, das einem Kreis mit dem Radius r =10 cm eingeschrieben ist.

-----

Lösung:

Aus a =r ergibt sich:

u =6r und

A =6 \*(r^2)/4 \*'w(3) =(3r^2)/2 \*'w(3)

Für r =10 cm : u =60 cm und

A =150 \*'w(3) cm^2 ~~259,81 cm^2

Der Umfang des regelmäßigen Sechsecks ist 60 cm und der Flächeninhalt etwa 259,81 cm^2.

-----

### \*\*-3 - 5.1.2 Viereck

Ein allgemeines Viereck kann immer durch die Diagonalen Euro und fin je zwei Dreiecke zerlegt werden. Für das in der Randspalte abgebildete Viereck erhalten Sie bei der Teilung durch die Diagonale Euro die Dreiecke ACD und ABC bzw. bei der Teilung durch die Diagonale f die Dreiecke ABD und BCD.

Da die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° ist, gilt in jedem Viereck:

'al +'be +'ga +'de =2 \*180° =360°.

-----

Rechteck:

u =2 \*(a +b)

d ='w(a^2 +b^2)

A =a \*b

-----

Quadrat:

u =4a

d =a \*'w(2)

A =a^2 =(d^2)/2

-----

Parallelogramm:

u =2 \*(a +b)

A =a \*h\_a =b \*h\_b

-----

Rhombus (Raute):

Die Diagonalen stehen aufeinander senkrecht und halbieren einander.

u =4a

A =a \*h\_a =(e \*f)/2

-----

Hinweis: Sie erhalten die Flächeninhalte der Vierecke, indem Sie die Figuren in flächengleiche Rechtecke (in gelber Farbe dargestellt) umwandeln.

rhombus: lateinisch für Kreisel, Zauberrad

-----

Deltoid:

u =2 \*(a +b)

A =(e \*f)/2

-----

Trapez:

m =c +x +y |+

m =a -x -y |+

2m =a +c

m =(a +c)/2

A =(a +c)/2 \*h

j-109

### \*\*-3 - 5.1.3 Kreis

Bereits im historischen Einstieg in dieses Kapitel wurde erwähnt, dass Archimedes einem Kreis ein regelmäßiges 96-Eck eingeschrieben hat, um den Flächeninhalt des Kreises zu berechnen.

Die Näherungswerte für den Umfang u und den Flächeninhalt A eines Kreises werden umso genauer, je größer die Anzahl der Ecken des ein- oder umgeschriebenen Vielecks ist. Wegen der Ähnlichkeit der beiden in der Randspalte abgebildeten Figuren gilt:

u / u' =r / r' =2r / 2r' =d / d' also

u/d ='u/d' ='pi

In Worten:

Die Kreiszahl 'pi ist das Verhältnis von Umfang u zu Durchmesser d =2r eines Kreises und ist für alle Kreise konstant.

'pi ist eine irrationale Zahl und kann daher grundsätzlich nur näherungsweise angegeben werden: 'pi =3,141592654...

Häufig verwendete Näherungswerte von 'pi sind:

'pi ~~3,14

'pi ~~22/7 ~~3,1429

Eine sehr gute rationale Näherung der Zahl 'pi liefert die Formel von ZU Chongzhi (chinesischer Mathematiker und Astronom, 429 bis 500 n. Chr.):

'pi ~~(355)/(113) ~~3,14159292035...

-----

Abb.: Ein mit GeoGebra gezeichnetes regelmäßiges 96-Eck. Der Unterschied zur Kreisform ist nicht mehr zu erkennen.

-----

Abb.: Die beiden Figuren sind zueinander ähnlich. Gleichschenkelige Dreiecke (wie die eingezeichneten) entstehen, wenn einem Kreis ein regelmäßiges Vieleck eingeschrieben wird.

-----

|Satz: Umfang und Flächeninhalt eines Kreises|

Ein Kreis mit dem Radius r hat den Umfang u =2 m und den Flächeninhalt A =r^2'pi.

-----

Kreis mit Radius r:

u =2r'pi

A =r^2'pi

-----

Von einem Kreis kann man einen Kreissektor und von diesem ein Kreissegment herausschneiden.

Beide werden durch einen Kreisbogen b begrenzt.

Die Länge des Bogens des Kreissektors erhalten Sie aus dem Vergleich mit dem Umfang des zugehörigen Kreises: Die beiden verhalten sich so wie der Winkel des Kreissektors zum vollen Winkel des Kreises von 360°.

Dasselbe Verhältnis gilt für die Flächen von Kreissektor und Kreis.

|Kreissektor:|

b /2r'pi ='al /360°

b =(r \*'pi \*'al)/(180°)

A\_(Sektor) /r^2'pi ='al /360°

A\_(Sektor) =(r^2'pi \*'al)/(360°) =(b \*r)/2

-----

|Kreissegment:|

A\_(Segment) =A\_(Sektor) -A

-----

Ein Kreis mit dem Umfang u =2r'pi hat die Fläche

A =u/2 \*r =(2r'pi)/2 \*r =r^2 \*'pi

-----

##-Beispiel 5.9: Erdbahn um die Sonne (A, B)

Die Erde bewegt sich auf einer näherungsweise kreisförmigen Bahn um die Sonne. Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne beträgt ca. 150 Millionen Kilometer.

Berechnen Sie die Strecke, die die Erde auf dieser Kreisbahn in

a) einem Jahr,

b) einem Monat und

c) einem Tag zurücklegt.

Rechnen Sie mit Zehnerpotenzen und verwenden Sie näherungsweise

1 Jahr =12 Monate =365 Tage.

j-110

##-Beispiel 5.9: Erdbahn um die Sonne (Fortsetzung) (A, B)

Lösung:

Radius der Erdbahn r =1,5 \*10^8 km

Umfang der Erdbahn u =2r'pi ~~9,4 \*10^8 km

a) Die Erde legt pro Jahr eine Strecke von ca. 9,4 \*10^8 km zurück.

-----

b) Die Erde legt pro Monat eine Strecke von ca. 9,4 \*10^8 /12 km =7,8 \*10^7 km zurück.

-----

c) Die Erde legt pro Tag eine Strecke von ca. 9,4 \*10^8 /365 km =2,58 \*10^6 km zurück.

-----

#### \*\*-4 - Übungsaufgaben

5.001.)

A, B, D

a) Drücken Sie 'al^\*, 'be^\* und 'ga^\* durch 'al, 'be und 'ga aus und erklären Sie, warum dieser Zusammenhang besteht.

-----

b) Zeigen Sie, dass 'al^\* +'be^\* +'ga^\* =360° gilt.

Beachten Sie: 'al +'be +'ga =180°.

-----

c) Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180 Grad. Wieso kann man daraus schließen, dass der größte Winkel im Dreieck wenigstens 60 Grad beträgt?

-----

5.002.)

B

Berechnen Sie jeweils den Winkel 'ga der in der Randspalte gezeichneten drei Dreiecke.

-----

Fertigen Sie bei den folgenden Aufgaben eine ordentlich beschriftete Skizze an.

5.003.)

A, B

Der Schatten eines Baumes ist a m lang. Zur gleichen Tageszeit wirft ein daneben aufgestellter, b m langer Stab einen Schatten von c dm Länge. Berechnen Sie die Höhe des Baumes.

a) a =28; b =1,6; c =25,6

b) a =21; b =1,5; c =22,5

-----

5.004.)

A, B

Von einem a m hohen Turm, der b m von einer c m hohen Mauer entfernt ist, sieht man gerade das diesseitige Ufer eines Sees.

Berechnen Sie die Entfernung des Sees vom Turm.

a) a =62; b =30; c =2

b) a =48; b =30; c =3

-----

5.005.)

A, B, D

Auf einer Landkarte im Maßstab 1 : 10000 erscheint ein Grundstück als 4 cm breites und 5 cm langes Rechteck.

a) Berechnen Sie die wirklichen Abmessungen und den Flächeninhalt des Grundstückes.

-----

b) Zeigen Sie, dass sich die Flächen wie 1:100002 verhalten.

-----

5.006.)

A, B

Auf einer Landkarte hat ein See den angegebenen Flächeninhalt A.

Berechnen Sie, wie viel Ar der Flächeninhalt in Wirklichkeit beträgt,

a) Maßstab: 1 : 10000; A =1 cm^2

b) Maßstab: 1 : 15000; A =2,7 cm^2

-----

5.007.)

A, B

Über den Daumen geschätzt: Bei ausgestrecktem Arm verhält sich die scheinbare Breite des Daumens zu seinem Abstand vom Auge ungefähr wie 1 : 28.

Berechnen Sie, wie weit ein Haus entfernt ist, das 10 m lang ist und doppelt so lang wie eine Daumenbreite erscheint.

-----

5.008.)

A, B

Aus 4 km Entfernung scheint ein Berg 3 Daumenbreiten hoch zu sein. Berechnen Sie, wie hoch der Berg wirklich ist, wenn sich bei ausgestrecktem Arm die scheinbare Breite des Daumens zu seinem Abstand vom Auge ungefähr wie 1 : 28 verhält.

-----

5.009.)

A, B, D

Durch Vergrößerung des blauen Dreiecks ABC entsteht das rote Dreieck A'B'C'.

a) Zeigen Sie, dass die beiden Dreiecke zueinander ähnlich sind.

-----

b) Ermitteln Sie den Vergrößerungsfaktor (Proportionalitätsfaktor) k.

-----

c) Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Dreiecke.

-----

Tipp: Ein Maßstab ist definiert als das Verhältnis einer Länge auf der Karte zu ihrer Entsprechung in der Realität.

Ist eine Karte im Verhältnis 1 : k gezeichnet, dann entspricht eine Länge von 1 cm auf der Karte einer Länge von k cm in der Realität.

Einer Fläche von 1 cm^2 auf der Karte entspricht eine Fläche von k^2 cm^2 in der Realität.

Das Ar ist eine Maßeinheit der Fläche von 100 m^2 mit dem Einheitenzeichen a.

1 Ar =100 m^2 =1 a

Ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von 1 a hat somit eine Kantenlänge von 10 Meter.

1 Hektar =10000 m^2 =100 a =1 ha

j-111

5.010.)

A, B

Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie 2 / 3 / 4, die längste Seite c misst 8 cm.

a) Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks.

-----

b) Die Flächeninhalte dieses Dreiecks und eines ihm ähnlichen verhalten sich wie 9/4 / 16/9. Berechnen Sie den Umfang des ähnlichen Dreiecks.

-----

5.011.)

A, B, D

Das Rechteck A'B'C'D' entsteht durch Vergrößerung des Rechtecks ABCD. Die beiden Rechtecke sind zueinander ähnlich.

Entnehmen Sie die benötigten Daten aus der Grafik in der Randspalte.

a) Berechnen Sie den Vergrößerungsfaktor k für die beiden Rechtecke.

-----

b) Zeigen Sie, dass die Fläche des größeren Rechtecks k^2-mal so groß wie die Fläche des kleineren Rechtecks ist.

-----

5.012.)

A, B, D

Ein Quadrat mit der Seite a =2,4 cm soll so vergrößert werden, dass der Flächeninhalt des neuen Quadrates 2,25-mal so groß ist.

a) Berechnen Sie die Seitenlänge des neuen Quadrats.

-----

b) Begründen Sie, warum die Seitenlänge um 50 % größer sein muss.

-----

5.013.)

A, B

Ein Rechteck hat folgende Abmessungen: a =5,2 cm und b =3,5 cm. Ein ähnliches Rechteck soll einen 6,76-mal so großen Flächeninhalt haben. Berechnen Sie die Seitenlängen des neuen Rechtecks.

-----

5.014.)

A, B, D

a) Zeichnen Sie ein Quadrat mit a =1 cm. Verdoppeln Sie a, d. h., strecken Sie a um den Faktor k =2.

Erklären Sie, was mit der Fläche des Quadrats geschieht.

-----

b) Die Fläche des Quadrats mit a =1 cm soll verdoppelt werden.

Berechnen Sie, um welchen Faktor k die Seitenlänge a gestreckt werden muss. Skizze!

-----

c) Zeichnen Sie ein Rechteck mit a =3 cm und b =2 cm.

Verdoppeln Sie beide Seiten.

Erklären Sie, was mit der Fläche des Rechtecks geschieht.

-----

d) Berechnen Sie, um welchen Faktor k die Seitenlängen a und b gestreckt werden müssen, damit man jenes ähnliche Rechteck erhält, dessen Flächeninhalt um 50 % größer ist. Skizze!

-----

5.015.)

A, B, D

DIN-A-Papierformate:

In vielen Ländern der EU sind Norm-Formate der DIN-A-Reihe gängige Papierformate. (DIN steht für Deutsches Institut für Normen, das diese Formate 1922 festgelegt hat.) Das Grundformat DIN-A0 ist ein Rechteck mit 1 m^2 Flächeninhalt und den Abmessungen 1189 mm 'x 841 mm. Durch Halbieren der längeren Seite erhält man jeweils das nächstkleinere ähnliche Format. So ergibt sich eine Folge von ähnlichen Rechtecken.

-----

Bezeichnung: DIN A0

Abmessungen: 1189 mm 'x 841 mm

Flächeninhalt: 1 m^2

andere Bezeichnungen: Vierfachbogen

-----

Bezeichnung: DIN A1

Abmessungen: 841 mm 'x 594 mm

Flächeninhalt: 1/2 m^2

andere Bezeichnungen: Doppelbogen

-----

Bezeichnung: DIN A2

Abmessungen: 594 mm 'x 420 mm

Flächeninhalt: 1/4 m^2

andere Bezeichnungen: Bogen

-----

Bezeichnung: DIN A3

Abmessungen: 420 mm 'x 297 mm

Flächeninhalt: 1/8 m^2

andere Bezeichnungen: Halbbogen

-----

Bezeichnung: DIN A4

Abmessungen: 297 mm 'x 210 mm

Flächeninhalt: 1/16 m^2

andere Bezeichnungen: Viertelbogen (Briefbogen)

-----

Bezeichnung: DIN A5

Abmessungen: 210 mm 'x 148 mm

Flächeninhalt: 1/32 m^2

andere Bezeichnungen: Blatt

-----

Bezeichnung: DIN A6

Abmessungen: 148 mm 'x 105 mm

Flächeninhalt: 1/64 m^2

andere Bezeichnungen: Halbblatt (Postkarte)

-----

Bezeichnung: DIN A7

Abmessungen: 105 mm 'x 74 mm

Flächeninhalt: 1/128 m^2

andere Bezeichnungen: Viertelblatt

Zeigen Sie, dass das Seitenverhältnis der DIN-A-Reihe 'w(2) / 1 beträgt.

j-112

5.016.)

A, B, D

Zoom-Funktion bei Kopierern:

Oft muss man beim Kopieren von Büchern und Zeitschriften die Vorlage verkleinern oder vergrößern. Praktisch jedes Kopiergerät verfügt über eine Zoom-Funktion, bei der der Streckfaktor der Längen in Prozent angegeben wird: Zoom 115 % bedeutet, dass jede Länge auf 115 % gestreckt, d. h. um 15 % vergrößert wird; Zoom 90 % bedeutet, dass jede Länge auf 90 % gestaucht, d. h. um 10 % verkürzt wird.

a) Erklären Sie, welcher Zoom-Faktor gewählt werden muss, wenn eine Vorlage flächenmäßig auf die Hälfte verkleinert werden soll, z. B. von A3 auf A4.

-----

b) Erklären Sie, welcher Zoom-Faktor gewählt werden muss, wenn eine Vorlage flächenmäßig auf das Doppelte vergrößert werden soll, z. B. von A4 auf A3.

-----

c) Jemand wählt den Zoom-Faktor 50 %. Erklären Sie, auf wie viel Prozent die Vorlage verkleinert wird.

-----

d) Eine Grafik soll mit einem Kopiergerät flächenmäßig um 50 % vergrößert werden. Erklären Sie, welcher Zoom-Faktor gewählt werden muss.

-----

e) Aus einem Buch mit einer Höhe von 24 cm soll eine Doppelseite auf ein A4-Blatt (Höhe ca. 21 cm) kopiert werden. Erklären Sie, welcher Streckfaktor gewählt werden muss.

-----

Abb.: Kopiergeräte stellen die Verkleinerung von A3 auf A4 oder von B4 nach B5 (das sind etwa 70,7 %) meist zur Verfügung.

-----

Abb.: Wenn man von A4 nach A3 oder von B5 nach B4 vergrößern will (das sind etwa um 41,4 % mehr) gibt es meist wieder eine eigene Taste bzw. Einstellung dafür.

-----

5.017.)

A, B

Gegeben ist ein Dreieck mit den Seiten a =45 mm, b =36 mm und der Höhe h\_a =20 mm.

Berechnen Sie den Flächeninhalt und die Höhe h\_b des Dreiecks.

-----

5.018.)

A, B

Berechnen Sie den Flächeninhalt A für ein Dreieck mit den Seitenlängen

a) a =16 m; b =52 m; c =60 m

-----

b) a =22,25 m; b =56,07 m; c =46,28 m

-----

c) a =25 mm; b =52 mm; c =63 mm

-----

5.019.)

A, B

Die drei Seiten eines Dreiecks sind a =2,73 cm, b =2,925 cm und c =2,535 cm.

Berechnen Sie den Flächeninhalt A und die drei Höhen h\_a, h\_b und h\_c.

-----

5.020.)

A, B

Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie 4 / 13 / 15. Der Flächeninhalt beträgt 96 cm^2. Ermitteln Sie die Seitenlängen dieses Dreiecks.

-----

Mathematik ist ein Teil unseres Kulturgutes, und wir haben die Aufgabe, unsere Mitmenschen in die Geheimnisse der Mathematik einzuweihen.

-----

Abb.: NORBERT WIENER, 1894 BIS 1964, AMERIKANISCHER MATHEMATIKER UND BEGRÜNDER DER KYBERNETIK

-----

Die folgenden Aufgaben beschäftigen sich mit dem Satz des Pythagoras, dem Umfang u und dem Flächeninhalt A von ebenen Figuren.

5.021.)

B, D

Haben die Seitenlängen eines rechtwinkeligen Dreiecks ganzzahlige Werte, dann nennt man ein solches Dreieck pythagoräisches Dreieck und die drei Seitenlängen bilden ein pythagoräisches Zahlentripel.

Es gilt a^2 +b^2 =c^2.

a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Zahlentripel pythagoräisch sind:

a | 3 | 8 | 5 | 9

b | 4 | 15 | 12 | 40

c | 5 | 17 | 23 | 41

-----

b) Begründen Sie, dass es nur ein pythagoräisches Zahlentripel bestehend aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt.

-----

5.022.)

A, B

Die Schnur eines Drachens ist 185 m lang. Die horizontale Entfernung des Drachens beträgt 153 m.

Berechnen Sie, wie hoch der Drachen in der Luft schwebt.

j-113

5.023.)

A, B

Berechnen Sie die fehlenden Größen des rechtwinkeligen Dreiecks (Längen in m, Flächen in m^2):

... | a | b | c | p | q | h | A

a) | 20 | **[]** | 25 | **[]** | **[]** | **[]** | **[]**

b) | 3 | **[]** | **[]** | 1,8 | **[]** | **[]** | **[]**

c) | **[]** | 3,75 | **[]** | **[]** | 2,25 | **[]** | **[]**

d) | **[]** | 6 | **[]** | **[]** | **[]** | 4,8 | **[]**

e) | **[]** | **[]** | 2,5 | **[]** | **[]** | **[]** | 1,5

f) | **[]** | **[]** | 12,5 | 11,52 | **[]** | **[]** | **[]**

g) | **[]** | **[]** | **[]** | 2,304 | 0,196 | **[]** | **[]**

h) | **[]** | **[]** | **[]** | 9,8 | **[]** | 33,6 | **[]**

i) | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | 6,72 | 84

-----

5.024.)

A, B

Berechnen Sie die fehlende Größe des rechtwinkeligen Dreiecks (Maße in mm):

... | a | p | c

a) | 5 | 4 | **[]**

b) | 5 | **[]** | 7,14

c) | **[]** | 2,4 | 6,67

-----

5.025.)

A, B

Berechnen Sie die fehlende Größe des rechtwinkeligen Dreiecks (Maße in dm):

... | b | q | c

a) | 4,18 | 2,5 | **[]**

b) | 4,95 | **[]** | 7

c) | **[]** | 3 | 6,5

-----

5.026.)

A, B, C

Die Aufgabe "Find x" (Berechne x), also berechne die Hypotenuse des dargestellten rechtwinkeligen Dreiecks, wurde von einem amerikanischen Schüler mit "Here it is" sehr "kreativ" gelöst.

Finden Sie die Länge von x tatsächlich heraus, indem Sie sie grafisch und rechnerisch ermitteln und freuen Sie sich über die abgebildete erfolgreiche Suche.

-----

5.027.)

A, B, D

In einem kartesischen Koordinatensystem sind zwei Punkte A und B durch ihre Koordinaten gegeben. Zeichnen Sie ein passendes Koordinatensystem und tragen Sie die gegebenen Punkte ein.

Ermitteln Sie in a) bis c) den Abstand |AB| der beiden Punkte grafisch und rechnerisch.

a) A(1|2), B(5|4)

b) A(-3|-2), B(4|1)

c) Zeigen Sie für die Punkte A(x\_1|y\_1) und B(x\_2|y\_2) die Richtigkeit der Formel

d =|AB| ='w((x\_2 x\_1)^2 +(y\_2 -y\_1)^2).

-----

5.028.)

A, B, D

Zeigen Sie mithilfe des pythagoräischen Lehrsatzes:

Im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlange a gilt

h =a \*('w(3))/2 und A =a^2 \*('w(3))/4.

-----

5.029.)

A, B

Gegeben ist ein Dreieck mit den Seiten a =10,5 cm, b =9,8 cm und c =9,1 cm.

Berechnen Sie die Seitenlange eines Quadrates, dessen Flächeninhalt 21-mal so groß ist wie der des Dreiecks.

j-114

5.030.)

A

Von einer ebenen Figur kennt man die Länge der Seiten a, b und c.

Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von x.

-----

Längenmaße:

1 Yard (Schritt) =91,44 cm =3 Fuß

1 Fuß =12 Inch (Zoll) 1 Zoll =2,54 cm

-----

5.031.)

A, B

Ein Tischtennistisch ist 9 Fuß lang und 5 Fuß breit. Berechnen Sie die Länge der Diagonale d, den Umfang u und den Flächeninhalt A.

Berechnen Sie alle drei Größen in Fuß (bzw. Quadratfuß).

-----

Abb.: Tischtennis wurde in England erstmals 1874 schriftlich erwähnt.

-----

5.032.)

A, B

Fußballtor:

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Fußballtores mit 8 Yard Breite und 8 Fuß Höhe und geben Sie diesen in m^2, in Fuß^2 und Yard^2 an.

-----

b) Berechnen Sie, wie sich Höhe und Breite eines Fußballtores zueinander verhalten. Fertigen Sie eine entsprechende Skizze an, welche dieses Verhältnis korrekt darstellt.

-----

Abb.: Für Fußball, Tennis, Hockey und Badminton wurden die ersten Regelwerke im angloamerikani- schen Kulturraum verfasst, eine Tatsache, die die im Allgemeinen "krummen" Abmessungen in Meter oder Zentimeter erklärt.

-----

5.033.)

A, B

Die Seiten eines Rechtecks verhalten sich wie u / v, die Diagonale ist w cm lang. Berechnen Sie die Rechtecksfläche.

a) u / v =5 / 12; w =65 cm

b) u / v =8 / 15; w =51 cm

-----

5.034.)

A, B

Ein LED-Fernsehgerät hat bei einem Seitenverhältnis von 16 / 9 eine Bildschirmdiagonale von 42 Zoll (~~106 cm).

Ermitteln Sie die Abmessungen und die Fläche des Bildschirmes.

-----

5.035.)

A, B

Berechnen Sie, um welchen Faktor sich die Fläche eines Bildschirms mit 37 Zoll im Vergleich zu einem Bildschirm mit 27 Zoll vergrößert.

Ermitteln Sie, um wie viel Prozent sich die Bildschirmfläche vergrößert.

-----

5.036.)

A, B

Ermitteln Sie, wie groß die Bildschirmdiagonale eines TV-Gerätes sein müsste, dessen Bildschirm den dreifachen Flächeninhalt eines 27-Zoll-Gerätes hat.

-----

5.037.)

A, B, D

Herr Martin plant einen neuen 4K-LED-Fernseher mit 65 Zoll (164,22 cm) Bildschirmdiagonale (ohne Bildschirmrand) anzuschaffen.

Das Seitenverhältnis des Bildschirms beträgt 16 / 9.

Der Rand um alle Bildschirmseiten beträgt ca. 1,6 cm.

Auf seiner Wohnwand hat Herr Martin allerdings nur Platz für einen Fernseher, der maximal 150 cm breit ist.

Argumentieren Sie, ob Herr Martin ausreichend Platz für den Fernseher hat, oder ob er besser das kleinere Gerät mit nur 55 Zoll Bildschirmdiagonale kaufen soll.

-----

5.038.)

A, B

Ein Rechteck und ein Quadrat haben denselben Umfang. Die beiden Seiten des Rechtecks betragen 15 cm und 27 cm.

Berechnen Sie, welche von den beiden Figuren den größeren Flächeninhalt hat und wie viel deren absoluter und relativer Unterschied beträgt.

-----

5.039.)

A, B

Um einen rechteckigen Garten von 64,5 m Länge und 41,2 m Breite soll ein Weg von 3,4 m Breite angelegt werden.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Weges.

-----

5.040.)

A, B

In einem Rechteck beträgt die Länge a =63 m und die Diagonale d =85 m. Ermitteln Sie die Breite b, den Umfang u und den Flächeninhalt A des Rechtecks.

-----

5.041.)

A, B

In einem Rechteck verhalten sich die Seiten wie 4 / 3. Die Diagonale ist 35 cm. Bestimmen Sie Umfang und Flächeninhalt des Rechtecks.

j-115

5.042.)

A, B

Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Rhombus mit den Diagonalen Euro =42,5 cm und f =27,4 cm.

-----

5.043.)

A, B

Von einem Rhombus sind jeweils zwei Bestimmungsstücke gegeben.

a) Euro =32 cm f =24 cm Berechnen Sie den Umfang.

-----

b) Euro =42 cm A =840 cm^2 Berechnen Sie die Länge der Seite.

-----

c) Euro =198 cm a =101 cm Berechnen Sie den Flächeninhalt.

-----

d) a =25 cm A =600 cm^2 Berechnen Sie die Höhe.

-----

e) h =3,36 cm f =3,5 cm Berechnen Sie den Umfang.

-----

5.044.)

A, B

In einem Parallelogramm betragen die Seite a =15 cm, die beiden Diagonalen Euro =26 cm und f =8 cm. Berechnen Sie den Flächeninhalt.

-----

5.045.)

D

a) Anna zeichnet drei Dreiecke in ein Rechteck (siehe Randspalte). Sie behauptet, dass alle drei Dreiecke flächengleich und auch kongruent sind. Begründen Sie, ob Anna recht hat.

-----

b) Theo zeichnet drei Dreiecke in ein Parallelogramm. Er behauptet, dass alle drei Dreiecke flächengleich und kongruent sind.

Begründen Sie, ob Theo recht hat.

-----

5.046.)

A, B, D

Ein Parallelogramm wird durch seine Diagonalen Euro und f in vier Dreiecke zerlegt. Max behauptet, dass diese vier Dreiecke flächengleich sind. Begründen Sie, ob die Behauptung von Max richtig ist.

Anleitung: Gehen Sie von der Flächenformel des Parallelogramms aus.

A =a \*h\_a =b \*h\_b.

-----

5.047.)

A, B

Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Deltoids mit den Diagonalen e =125,4 cm und f =27,5 cm.

-----

5.048.)

A, B

Von einem Deltoid sind gegeben:

a) Euro =32 cm; b =20 cm; a =65 cm. Berechnen Sie den Flächeninhalt.

-----

b) f =74 cm; Euro =126 cm; b =65 cm. Berechnen Sie a.

-----

5.049.)

A, B

Berechnen Sie die fehlenden Stücke von a, b, c, h und A eines gleichschenkeligen Trapezes (a und c sind die Parallelseiten) mit

a)

a =32 cm

b =18 cm

c =25 cm

-----

b)

b =9,6 cm

c =51 cm

h =4,5 cm

-----

c)

a =66 cm

h =84 cm

A =4452 cm^2

-----

5.050.)

A, B

In einem Trapez sind a =40 cm, b =12 cm, c =26 cm und d =10 cm.

Ermitteln Sieden Flächeninhalt.

-----

|Aufgaben zum Kreis|

5.051.)

Berechnen Sie Umfang u und Flächeninhalt A eines Kreises, wenn gegeben ist:

a) der Durchmesser d =27 m

b) der Radius r =2,5 m

-----

5.052.)

A, B

a) Berechnen Sie den Radius eines Kreises mit dem Umfang u =4,22 m.

-----

b) Ermitteln Sie den Radius r eines Kreises, wenn sein Flächeninhalt A =33 cm^2 beträgt.

-----

5.053.)

A, B

Bei einem Fahrrad hat das Hinterrad einen Durchmesser von 75 cm. Das große Kettenrad hat doppelt so viele Zähne wie das kleine. Daniela legt 1 km zurück.

Berechnen Sie, wie oft sie bei ununterbrochenem Treten ein Pedal niedertreten muss.

j-116

5.054.)

A, B

Aus einem Baumstamm (d =50 cm) soll ein möglichst starker Balken hergestellt werden. Ermitteln Sie, wie viel Prozent der Abfall beträgt, wenn

a) der Balkenquerschnitt quadratisch ist.

b) der Balkenquerschnitt rechteckig mit dem Seitenverhältnis 4 / 5 ist.

-----

5.055.)

A, B

Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r =3 cm. Bestimmen Sie, wie lang der Bogen ist, der zum gegebenen Zentriwinkel 'al gehört. Fertigen Sie eine ordentlich beschriftete Skizze an, ermitteln Sie grafisch und rechnerisch die Länge der zugehörigen Sehne und geben Sie den absoluten Unterschied zwischen Sehne und Bogen an.

a) 'al =40°

b) 'al =90°

c) 'al =78°

d) 'al =120°

-----

5.056.)

A, B

Ermitteln Sie, welcher Bogen im Kreis mit r =1 cm (Einheitskreis) zum gegebenen Zentriwinkel 'al gehört.

a) 'al =30°

b) 'al =45°

c) 'al =50°

d) 'al =60°

e) 'al =90°

f) 'al =180°

g) 'al =270°

-----

5.057.)

A, B

Berechnen Sie, welchen Innenradius eine 175 m lange kreisförmige Kurve hat, die eine Richtungsänderung von 40° bewirkt. Skizze!

-----

5.058.)

A, B

Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Kreissegments mit

a) r =4 cm; 'al =90°

b) r =5 cm; 'al =120°

c) r =s =6 cm

d) r =6 cm; 'al =45°

e) r =6 cm; 'al =30°

-----

5.059.)

A, B

Zwei Kreise mit den Mittelpunkten A und B haben die Radien 7 cm bzw. 10 cm (siehe Abbildung in der Randspalte). Berechnen Sie die Länge der Strecke |AB|, wenn die Länge der gemeinsamen Sehne |PQ| 8 cm beträgt.

-----

5.060.)

A, B

Schneiden Sie gedanklich einen Basketball "in der Mitte durch" (der Mittelpunkt muss in der Schnittebene liegen) und vergleichen Sie die Fläche des Schnittkreises mit der des Ringes des Basketballkorbs, durch Angabe des absoluten und relativen Unterschieds.

Durchmesser eines Basketballs: etwa 24 cm,

Durchmesser des Rings: etwa 45 cm.

-----

5.061.)

A, B

Vergleichen Sie die acht Euromünzen miteinander, indem Sie in einer Tabelle deren Umfang u, Fläche A und Volumen V zusammenstellen. Durchmesser und Dicke sind in mm angegeben.

Diese Aufgabe einer internationalen Studie im Fach Mathematik konnte von 47 % der getesteten BHS-Teilnehmer/-innen richtig gelöst werden.

Abkürzungen für die folgende Tabelle:

C -- Cent

E - Euro

Münze | 1 C | 2 C | 5 C | 10 C | 20 C | 50 C | 1 E | 1 E

Durchmesser | 16,25 | 18,75 | 21,25 | 19,75 | 22,25 | 24,25 | 23,25 | 25,75

Dicke | 1,67 | 1,67 | 1,67 | 1,93 | 2,14 | 2,38 | 2,33 | 2,20

Berechnen Sie die absoluten Unterschiede zwischen der 1-Cent-Münze und der

1-Euro-Münze für u, A und V.

Berechnen Sie das Verhältnis zwischen Umfang u und Durchmesser d aller Münzen.

-----

5.062.)

A, B

Viele handelsübliche Streichkäse haben die Form eines gleichschenkeligen Dreiecks. Das Rupp-Käsle aus Lochau in Vorarlberg hat näherungsweise die Form eines gleichschenkeligen Dreiecks mit der Grundlinie c =5,5 cm und der Höhe h =7,7 cm.

Zeichnen Sie ein Rupp-Käsle im Maßstab 1 : 1

Am einfachsten lässt sich das Käsle halbieren, indem es entlang der Höhe aufc geteilt wird.

a) Bestimmen Sie, wie aber geschnitten werden muss, wenn das Käsle parallel zur Grundlinie c halbiert werden soll.

Zeichnen Sie in Ihrer Skizze jene Linie parallel zur Grundlinie ein, von der Sie glauben, dass sie die Fläche halbiert, und messen Sie die Höhe des oberen Dreiecks ab.

Berechnen Sie dann die Höhe des gesuchten Dreiecks und vergleichen Sie mit Ihrer grafisch ermittelten Höhe.

j-117

b) Ermitteln Sie, in welcher Höhe geschnitten werden muss, wenn das Käsle gedrittelt beziehungsweise geviertelt werden soll.

-----

5.063.)

A, B, C

Ein Alma Rahm-Schmelzkäseeck hat näherungsweise die Form eines Kreissektors mit r =7,7 cm und dem Öffnungswinkel 'al =45°.

a) Berechnen Sie die zugehörige Bogenlänge eines solchen Schmelzkäseecks.

-----

b) Bestimmen Sie, um wie viel (absolut und relativ) das Alma Rahm-Schmelzkäseeck größer als das Rupp-Käsle aus der vorigen Übungsaufgabe ist.

-----

c) Vergleichen Sie diesen Unterschied mit dem Gewichtsunterschied (40 g bzw. 50 g).

-----

d) Geben Sie die Abmessungen der Figuren an, die entstehen, wenn man drei Rupp-Käsle bzw. drei Alma Rahm-Schmelzkäseecken in der in der Randspalte abgebildeten Form nebeneinanderlegt.

-----

e) Die verschiedenen Käsleformen führen naturgemäß zu verschiedenen Verpackungen. Geben Sie untere Grenzen für die Abmessungen der Verpackungen an.

-----

f) Vergleichen Sie die Flächeninhalte der Figuren aus d) und e), indem Sie die absoluten und relativen Abweichungen angeben.

-----

5.064.)

A, B

Die Rotorblätter eines am Boden stehenden Hubschraubers (beide gegenüberliegenden Rotorblätter zusammen) haben eine Länge von ca. 11 m.

Die Rotorblätter rotieren mit 6 Umdrehungen pro Sekunde.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit der äußeren Enden der Rotorblätter in m/s und in km/h.

-----

5.065.)

A, B

Berechnen Sie die Grundfläche eines regelmäßigen sechseckigen Gebäudes mit einer Seitenlänge von

a) 30 m und

b) 45 m.

Vergleichen Sie beispielsweise das Fort Jefferson in der Randspalte.

-----

Abb.: Das Fort Jefferson ist als regelmäßiges Sechseck angelegt. Es wurde nach dem US Präsidenten Thomas Jefferson benannt. Es konnten 450 Kanonen und 1500 Mann untergebracht werden.

-----

## \*\*-2 - 5.2 Trigonometrie

### \*\*-3 - 5.2.1 Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkeligen Dreieck

Bisher konnten Sie spezielle Dreiecke zeichnen und berechnen. Nun lernen Sie allgemeine Dreiecke und deren Winkel zu berechnen.

Da sich jedes Vieleck in Dreiecke und jedes Dreieck in rechtwinkelige Dreiecke zerlegen lässt, werden zunächst rechtwinkelige Dreiecke behandelt.

-----

treis: griechisch für drei

gony: griechisch für Winkel

metron: griechisch für Maß

Trigonometrie bedeutet also Dreiwinkelmessung.

-----

##-Beispiel 5.10: Seitenverhältnisse im rechtwinkeligen Dreieck (A, B)

a) Zeichnen Sie ein rechtwinkeliges Dreieck ABC mit 'al =40° und b =|AC|=5 cm und messen Sie die Längen der Seiten a und c.

Man bezeichnet

die dem Winkel 'al gegenüberliegende Kathete a als Gegenkathete GK von 'al und

die an den Winkel 'al anliegende Kathete b als Ankathete AK von 'al.

Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite c ist die Hypotenuse HY.

Messung: a ~~4,2 cm; c ~~6,5 cm

-----

Abb.: Jedes Vieleck kann man in Dreiecke und jedes Dreieck in rechtwinkelige Dreiecke zerlegen.

j-118

Beispiel 5.10: Seitenverhältnisse im rechtwinkeligen Dreieck (Fortsetzung) (A, B)

b) Skizzieren Sie ein weiteres zum Dreieck ABC ähnliches rechtwinkeliges Dreieck AB'C' mit 'al =40° und b' =|AC'| =7,5 cm.

* Messen Sie die Längen der Seiten a' und c'.
* Berechnen Sie die Verhältnisse der entsprechenden Seiten.

Messung: a' ~~6,3 cm; c' ~~9,8 cm

* (GK)/(HY) =a/c =(a')/(c') ~~0,64
* (AK)/(HY) =b/c =(b')/(c') ~~0,76
* (GK)/(AK) =a/b =(a')/(b') ~~0,84

-----

sinus: lateinisch für Bogen, Krümmung, Busen

-----

Abb.: Die Gegenkathete des Winkels 'al ist die Ankathete des Winkels 'be und umgekehrt.

Es bestätigt sich der Strahlensatz - die Verhältnisse entsprechender Seiten sind gleich. Die Seitenverhältnisse hängen nur vom Wert des Winkels 'al und nicht vom konkreten rechtwinkeligen Dreieck ab.

-----

|Definition: Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkeligen Dreieck|

Im rechtwinkeligen Dreieck bezeichnet man

* sin('al) =(GK)/(HY) =a/c als Sinus von 'al,
* cos('al) =(AK)/(HY) =b/c als Kosinus von 'al und
* tan('al) =(GK)/(AK) =a/b als Tangens von 'al.

-----

Auf die ausführliche Schreibweise

sin('al) =(GK von 'al)/(HY) wird verzichtet.

-----

##-Beispiel 5.10: Seitenverhältnisse im rechtwinkeligen Dreieck (Fortsetzung) (A, B)

a) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner die drei Funktionswerte sin(40°), cos(40°) und tan(40°).

Achten Sie auf die Einstellung: DEGREE

-----

b) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner jeweils den Winkel zu den drei Funktionswerten aus a). Wenden Sie die jeweilige Umkehroperation an.

-----

Abb: Der Taschenrechner stellt die zwei Möglichkeiten RADIAN und DEGREE für Winkel zur Verfügung.

Aus dieser Definition folgt für den zu 'al komplementären Winkel 'be =90° -'al:

sin('be) =sin((90° -'al)) =(GK)/(HY) =b/c =cos('al)

(bezüglich des Winkels 'be ist b die Gegenkathete)

-----

cos('be) =cos((90° -'al)) =(AK)/(HY) =a/c =sin('al)

(bezüglich des Winkels 'be ist a die Ankathete)

Der Kosinus eines Winkels ist gleich dem Sinus des komplementären Winkels. Das ist auch die namensgebende Eigenschaft des Kosinus.

-----

Tipp: Ergänzen einander zwei Winkel 'al und 'be zu 90°, so heißen sie komplementär.

Ergänzen sie einander auf 180° sind sie supplementär.

j-119

##-Beispiel 5.11: Rechtwinkeliges Dreieck - Sinus und Kosinus (A, B)

Die Hypotenuse c eines rechtwinkeligen Dreiecks ABC ist 58 mm lang, der Winkel ist 62°.

a) Ermitteln Sie grafisch und rechnerisch die Länge der Katheten a und b und der Höhe h\_c.

sin('al) =(GK)/(HY) =a/c

a =c \*sin('al)

a =58 \*sin(62°)

a ~~51,2 mm

-----

cos('al) =(AK)/(HY) =b/c

b =c \*cos('al)

b =58 \*cos(62°)

b ~~27,2 mm

-----

sin('al) =(h\_c)/b

h\_c =b \*sin('al)

h\_c ~~27,2 \*sin 62° ~~24 mm

Alle drei Längen passen gut zu den grafisch ermittelten Werten.

-----

b) Berechnen Sieden Flächeninhalt des rechtwinkeligen Dreiecks.

Für die Flächenberechnung haben Sie mehrere Möglichkeiten:

A =(a \*b)/2 =(c \*h\_c)/2 =(c \*b \*sin('al))/2 ~~697

Der Flächeninhalt beträgt etwa 697 mm^2.

-----

Bisher haben Sie den Sinus und den Kosinus verwendet, um zu einem Winkel den zugehörigen Wert (also ein Seitenverhältnis) zu berechnen.

Im folgenden Beispiel berechnen Sie aus einem Seitenverhältnis (also einem Winkelfunktionswert) den zugehörigen Winkel.

-----

Hinweis:

Der Konstruktionsweg:

1. Strecke |AB|=c einzeichnen.

2. Thaleskreis über |AB| errichten.

3. Winkel 'al einzeichnen liefert den Punkt C.

4. B mit C verbinden liefert die Seite a.

Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.

-----

Eingabe: a =58\*sin(62°)

In GeoGebra kann man Winkel auch in Grad (Alt +O) eingeben.

-----

##-Beispiel 5.12: Neigungswinkel einer Leiter (A, B)

Eine 4 m lange Leiter ist an eine Hauswand gelehnt. Der Fuß der Leiter ist von der Mauer einen Meter entfernt.

Berechnen Sie den Neigungswinkel 'al der Leiter zum Boden.

-----

Lösung:

Im rechtwinkeligen Dreieck kennen Sie bezogen aufden gesuchten Winkel 'al die Ankathete und die Hypotenuse. Daher benötigen Sie den Kosinus des gesuchten Winkels 'al:

cos('al) =(AK)/(HY) =1/4 =0,25

Die Umkehrung einer Funktion f bezeichnet man mit f^(-1), daher schreibt man cos^(-1), um den gesuchten Neigungswinkel 'al aus der Gleichung cos('al) =0,25 zu berechnen.

'al =cos^(-1)(0,25) ~~75,5°

Die Leiter iehnt unter einem Winkel von etwa 75,5° an der Hauswand.

-----

Abb.: Die Länge der Leiter ist die Hypotenuse im gezeichneten rechtwinkeligen Dreieck.

-----

##-Beispiel 5.13: Steigung - Steigungswinkel 1 (A, B)

Eine Gerade hat die Steigung k =1,5.

a) Berechnen Sie den Winkel 'al, den die Gerade mit der x-Achse einschließt.

-----

b) Erstellen Sie eine Formel, die den Zusammenhang zwischen Steigung und Steigungswinkel einer Geraden beschreibt.

-----

Lösung:

a) tan(\*'al) =(GK)/(AK) =(1,5)/1 =k

'al =tan^(-1)(1,5) ~~56,3°

Die Gerade schließt mit der x-Achse einen Winkel von etwa 56,3° ein.

-----

b) tan('al) =k

'al =tan^(-1)(k)

-----

'al | cos('al)

? | 0,25

Suchen Sie im Beispiel 5.12 denjenigen Winkel 'al, für den der Kosinus, also das Seitenverhältnis von Ankathete zu Hypotenuse, 1 /4 =0,25 ist.

j-120

##-Beispiel 5.14: Steigung einer Bergstraße - Steigungswinkel 2 (A, B)

Eine Bergstraße hat auf einer Streckenlänge s von 5 km eine durchschnittliche Steigung von 12 %.

a) Bestimmen Sie den Steigungswinkel dieser Bergstraße.

Die Steigung k ist (12)/(100) =0,12: k =0,12

'al =tan^(-1)(k) =tan^(-1)(0,12) ~~6,84°

Der Steigungswinkel der Bergstraße beträgt etwa 7°.

-----

b) Berechnen Sie die Höhe, die sie auf diesen fünf Kilometern überwindet.

sin('al) =(GK)/(HY) =h/s =h/5

h =5 \*sin('al) ~~5 \*sin(6,84°) ~~0,596 ~~0,6

Die Straße überwindet auf der Streckenlänge von 5 km eine Höhe von ca. 600 m.

Faustregel für kleine Steigungen: h ~~k \*s =0,12 \*5 km =0,6 km =600 m

-----

Winkel -> cos -> Winkelfunktionswert

Winkel <- cos^(-1) <- Winkelfunktionswert

-----

Zwei Aufgaben:

* zueinem Winkel zugehörige Winkelfunktionswerte (Seitenverhältnisse) bestimmen
* zueinem Winkelfunktionswert (Seitenverhältnis) den (oder die) zugehörigen Winkel ermitteln

-----

|Zusammenhang zwischen Steigung k und Steigungswinkel 'al|

Es gilt tan('al) =k und 'al =tan^(-1)(k).

-----

##-Beispiel 5.15: Basketball (A, B)

Dieses Beispiel stammt aus dem Buch "Mathematik und Sport: Olympische Disziplinen im mathematischen Blick" von Matthias Ludwig (2008). "Ich habe mir damals ein Stück Papier genommen und mich gefragt: Gibt es einen Schuss, bei dem ich Fehler machen darf und der Ball trotzdem durch den Ring fällt?", sagt Geschwindner. "Und dann habe ich eine Skizze gezeichnet: Der Ball muss mindestens einen Einfallswinkel von 32 Grad haben, Dirk ist 2,13 Meter groß, seine Arme haben eine bestimmte Länge, und wenn man dann noch die Gesetze der Physik kennt, kommt man schnell zu einer Problemlösung."

(Quelle: Die Zeit 2004/04)

Rechnen Sie mithilfe der Skizze in der Randspalte diesen minimalen Winkel 'rh von 32°, unter dem ein Basketball mit dem Radius r =12 cm gerade noch durch den Ring des Basketballkorbs mit dem Radius R =22,5 cm fällt, nach. Im eingezeichneten rechtwinkeligen Dreieck ist R die Hypotenuse und r die Gegenkathete zu 'rh, weshalb Sie den Sinus verwenden können:

sin('rh) =(GK)/(HY) =r/R =(12)/(22,5) ~~0,53^.

Also 'rh =sin^(-1)(0,53^.) ~~32,23° ~~32°

Der Basketball (Radius r) fällt gerade noch durch den Ring (Radius R).

-----

##-Beispiel 5.16: Stollenbahn - Länge und Steigungswinkel (A, B)

Die Stollenbahn Pitz-Express bringt Schifahrer und Bergsteiger von der Talstation mit der Höhe 1720 m auf die Höhe 2860 m. In einer Karte mit dem Maßstab 1 : 50000 misst man die horizontale Entfernung 7,0 cm.

a) Berechnen Sie die Länge s der Stollenbahn.

1. Die gemessenen 7 cm entsprechen

7 cm \*50000 =350000 cm =3500 m Horizontalentfernung.

-----

2. Höhendifferenz:

2860 m -1720 m =1140 m

3. Länge der Stollenbahn: s ='w(3500^2 +1140^2) ~~3681

Die Stollenbahn ist etwa 3680 m lang.

-----

Abb.: Die horizontale Entfernung zwischen Tal und Bergstation beträgt in der Karte 7,0 cm.

j-121

##-Beispiel 5.16: Stollenbahn - Länge und Steigungswinkel (Fortsetzung) (A, B)

b) Berechnen Sie den mittleren Steigungswinkel der Stollenbahn.

Den Steigungswinkel 'al berechnen Sie aus dem rechtwinkeligen Dreieck mit dem Seitenverhältnis von Gegen- zu Ankathete, also dem Tangens von 'al:

tan('al) =(GK)/(AK) =(1140)/(3500)

'al =tan^(-1)((1140)/(3500)) ~~18°

Der mittlere Steigungswinkel beträgt ca. 18°.

-----

##-Beispiel 5.17: Höhenlinien - Geländeneigung (A, B)

In den Karten des Alpenvereins mit dem Maßstab 1 : 25000 sind die Höhenlinien jeweils im gleichen Vertikalabstand von 20 m eingezeichnet. Aus dem Abstand zweier Höhenlinien auf der Karte kann die Neigung des Geländes erschlossen werden.

Ein Bergsteiger misst auf der Karte den Abstand 2 mm zwischen zwei Höhenlinien.

Berechnen Sie mit diesen Informationen die Neigung, also den Steigungswinkel des Geländes.

-----

Lösung:

Der Vertikalabstand ist 20 m und die gemessenen 2 mm entsprechen 2 \*25000 mm =50000 mm =50 m Horizontalentfernung.

'al =tan^(-1)(0,4) ~~21,8°

Das Gelände hat eine durchschnittliche Neigung von etwa 22°.

-----

Höhenlinien, auch Isohypsen oder Höhenschichtlinien genannt, werden in Karten benutzt, um in der ebenen Abbildung des Geländes die Höheninformationen darzustellen. Hierzu werden in regelmäßigen Intervallen (Äquidistanz) alle Punkte gleicher Höhe durch eine Kurve verbunden.

(Quelle: Wikipedia)

-----

##-Beispiel 5.18: Neusiedler See (A, B)

Von Neusiedl am See am Nordufer bis zum ungarischen Südufer hat der Neusiedler See eine Länge von ca. b =35 km.

a) Bestimmen Sie, wie "hoch" der Neusiedler See ist.

Für den maximalen Abstand x zwischen Kreisbogen und zugehöriger Sekante berechnen Sie die Höhe y im eingezeichneten gleichschenkeligen Dreieck.

(Erdradius R ~~6376 km)

Kreisbogen: b =(R \*'pi \*'al)/(180°)

'al =(b \*180°)/(R'pi) =(35 \*180°)/(376'pi) ~~0,3145°

y =R \*cos(('al)/2) ~~6375,976

x =R -y ~~0,024

Nur bei der Eingabe im TR muss man auf die richtige Wahl der Einheit aufpassen.

Die "Höhe" des Neusiedler Sees beträgt etwa 24 Meter.

-----

b) Ermitteln Sie, welche Höhe H ein Turm in Neusiedl am See mindestens hat, wenn man ihn vom ungarischen Südufer des Sees aus sieht.

cos('al) =R/(H +R)

H \*cos('al) +R \*col('al) =R

H =(R \*(1 -cos('al)))/(cos('al)) ~~0,096

Die Mindesthöhe eines gerade noch sichtbaren Turmes beträgt etwa 96 Meter.

-----

Skizze zur Berechnung

* des maximalen Abstandes x zwischen Kreisbogen und Sekante und
* der notwendigen Höhe k eines Turmes

j-122

##-Beispiel 5.19: Regelmäßiges Fünfeck - Umkreis (A, B)

Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Fünfecks beträgt A =540 cm^2.

Umschreiben Siedern Fünfeck einen Kreis und berechnen Siedessen Umfang (auf 2 Dezimalen).

-----

Lösung:

Wegen 72° ist 36° der eine Winkel im rechtwinkeligen Dreieck mit den Katheten x und y. Für diese beiden Katheten stellt man zwei Gleichungen auf:

A =540 =10 \*(xy)/2 (1)

xy =108 (1')

-----

tan(36°) =x/y (2)

x =y \*tan(36°) (2')

Dieses Gleichungssystem löst man mit der Einsetzungsmethode, setzt (2') in (1') ein und erhält:

y^2 \*tan(36°) =108 mit der positiven Lösung

y ='w((108)/(tan(36°))) ~~12,19

Den gesuchten Radius r berechnet man mit dem Kosinus:

cos(36°) =y/r r =y/(cos(36°)) ~~15,07

u =2r'pi ~~94,69

Der Umfang des Umkreises beträgt etwa 94,7 cm.

-----

Abb.: Eines der fünf gleichschenkeligen Dreiecke des regelmäßigen Fünfecks mit dem umschriebenen Kreis vom Radius r wurde in zwei kongruente rechtwinkelige Dreiecke zerlegt.

### \*\*-3 - 5.2.2 Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis

Bisher wurden die Winkelfunktionswerte nur für spitze Winkel 0° <'al <90° im rechtwinkeligen Dreieck definiert. In allgemeinen Dreiecken treten aber auch Winkel auf, die größer als 90° sind. Sinus, Kosinus und Tangens müssen also auch für Winkel größer als 90° definiert werden. Dazu legt man in den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems den Mittelpunkteines Einheitskreises (Kreis mit Radius r =1 Längeneinheit).

Man zeichnet im ersten Quadranten einen Winkel 'al ein, wobei der Scheitel im Ursprung (0|0) liegt und ein Schenkel mit der x-Achse (Abszissenachse) zusammenfällt. Den zweiten Schenkel erhält man durch Drehung im mathematisch positiven Drehsinn (entgegen dem Uhrzeigersinn). Er schneidet den Einheitskreis im Punkt P(x|y).

Man erhält im zugehörigen rechtwinkeligen Dreieck (Hypotenusenlänge =1 LE):

sin('al) =(GK)/(HY) =y/1 =y

cos('al) =(AK)/(HY) =x/1 =x

tan('al) =(GK)/(AK) =y/x

Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte können also am Einheitskreis abgelesen werden.

-----

Abb.: Ein Einheitskreis hat - nomen est omen - einen Radius von 1 Längeneinheit. In ihm kann man die Funktionswerte sin('al) und cos('al) (später auch tan('al) ablesen.

j-123

|Definition: Sinuswert und Kosinuswert eines Winkels

'al 'el [0°; 360°]|

Im Einheitskreis definiert man für den Winkel 'al 'el [0°; 360°] mit dem zugeordneten Punkt P(x|y):

Der Sinuswert von 'al ist gleich dem y-Wert von P(x|y).

Der Kosinuswert von 'al ist gleich dem x-Wert von P(x|y).

y =sin('al) (lies: Sinus von 'al)

x =cos('al) (lies: Kosinus von 'al)

-----

Diese Definitionen gelten für alle Winkel 'al 'el 'R. Es genügt aber, Winkel 'al zu betrachten, die zwischen 0° und 360° liegen, weil beispielsweise ein Winkel von 400° zum selben Punkt führt wie der Winkel von 40°.

Aus ihnen folgt, dass die Sinus- und Kosinuswerte eines Winkels reelle Zahlen aus dem Intervall [-1; +1] sind.

Auch den Tangenswert eines Winkels 'al kann man am Einheitskreis ablesen. Man zeichnet dazu im Punkt (1|0) die Tangente an den Einheitskreis. Sie besitzt die Gleichung x =1. Man schneidet sie mit dem Schenkel des Winkels 'al, der nicht mit der Abszissenachse zusammenfällt, und erhält den Schnittpunkt Q(1|y\_T). Im rechtwinkeligen Dreieck mit den Eckpunkten (0|0), (1|0) und Q gilt:

tan('al) =y/x =(y\_T)/1 =y\_T

Sofort erkennt man den entscheidenden Unterschied zu den Sinus- und Kosinuswerten: Diese sind durch -1 und 1 begrenzt, während der Tangens über jede Schranke wächst (bzw. fällt), wie man es im Beispiel 5.13 schon gesehen hat.

-----

Im Einheitskreis hat ein Punkt P dieses Kreises die Koordinaten (cos('al)|sin('al)).

Im Einheitskreis hat ein Punkt Q auf der Tangente zum Punkt (1|0) die Koordianten (1|tan('al)).

tangens: abgeleitet von Tangente

-----

|Definition: Tangenswert eines Winkels 'al 'el [0°; 360°] \ {90°, 270°}|

Der Tangenswert des Winkels 'al ist gleich jenem Abschnitt y\_T auf der Tangente x =1, den die Schenkel des Winkels 'al bilden.

y\_T =tan('al) (lies: Tangens von 'al)

-----

Die Tangenswerte sind reelle Zahlen. In [0°; 360°] ist der Tangenswert für alle Winkel 'al, ausgenommen 90° und 270°, erklärt. Für 90° und 270° ist der zweite Schenkel des Winkels 'al parallel zur Tangente x =1, weshalb kein Schnittpunkt existiert.

Die folgenden Abbildungen veranschaulichen die Winkelfunktionswerte sin('al), cos('al) und tan('al) in den vier Quadranten.

0° <'al <90°

90° <'al <180°

180° <'al <270°

270° <'al <360°

Aus den Definitionen erhalten Sie zusammen mit den obigen vier Abbildungen die Vorzeichentabelle für die Winkelfunktionswerte:

... | 0° <'al <90° | 90° <'al <180° | 180° <'al <270° | 270° <'al <360°

sin('al) | + | + | - | -

cos('al) | + | - | - | +

tan('al) | + | - | + | -

-----

Abb.: Die Darstellung der Winkelfunktionswerte für negative Winkel erfolgt wie für positive Winkel.

j-124

|Beziehungen zwischen den Winkelfunktionswerten eines Winkels|

Zeichnen Sie die drei Winkelfunktionswerte sin('al), cos('al) und tan('al) des Winkels 'al (für den Fall, dass 'al im ersten Quadranten liegt) im Einheitskreis ein.

Mithilfe des pythagoräischen Lehrsatzes erhalten Sie eine Gleichung zwischen dem Sinuswert und dem Kosinuswert von 'al.

(sin('al))^2 +(cos('al))^2 =1

sin^2('al) +cos^2('al) =1

Aufgrund der Ähnlichkeit gilt

(sin('al))/(cos('al)) =(tan('al))/1 =tan('al)

Diese Beziehungen können entsprechend für die anderen Quandranten nachgewiesen werden.

-----

Hinweis: Statt (sin('al))^2 schreibt man nur kurz sin^2('al).

Im Allgemeinen gilt aber: sin^2('al) \=sin('al)^2 =sin('al^2)

Im ersten Fall wird der Sinuswert, im zweiten der Winkel quadriert.

-----

|Satz: Zusammenhang zwischen den Winkelfunktionswerten sin('al), cos('al) und tan('al)|

Für alle Winkel 'al 'el [0°; 360°] gilt:

* sin^2('al) +cos^2('al) =1
* tan('al) =v

-----

Diese beiden Beziehungen bedeuten, dass es genügt, einen der drei Werte sin('al), cos('al) oder tan('al) anzugeben. Die anderen beiden lassen sich (wenn auch ohne Zusatzinformationen nicht immer eindeutig) mithilfe der beiden Beziehungen berechnen.

-----

Diese beiden Beziehungen kann man natürlich auch für die Definitionen der Winkelfunktionswerte im rechtwinkeligen Dreieck ableiten:

sin('al) =(GK)/(HY) und cos('al) =(AK)/(HY) führt direkt zu

sin^2('al) +cos^2('al) =1 und zu

(sin('al))/(cos('al)) =(GK)/(HY) =tan('al).

j-125

|Winkelfunktionswerte für die Winkel 0°, 30°, 45°, 60° und 90°|

Aus den folgenden Skizzen lesen Sie die Sinus- und Kosinuswerte ab und berechnen Sie, wo das Ablesen nicht möglich ist, daraus die Tangenswerte. In den drei Fällen 0°, 45° und 90°, bei denen das Ablesen des Tangeswertes möglich ist, verwendet man die Berechnung zur Kontrolle.

sin(0°) =0

cos(0°) =1

tan(0°) =0

-----

sin(30°) =1/2

cos(30°) =('w(3))/2

tan(30°) =1/('w(3))

-----

sin(45°) =('w(2))/2

cos(45°) =('w(2))/2

tan(45°) =1

-----

sin(60°) =('w(3))/2

cos(60°) =1/2

tan(60°) ='3

-----

sin(90°) =1

cos(90°) =0

tan(90°) nicht definiert ('ue)

-----

Da bei diesen speziellen Winkeln spezielle Dreiecke entstehen, ergeben sich schöne Regelmäßigkeiten:

sin(0°) =1/2 \*'w(0)

sin(30°) =1/2 \*'w(1)

sin(45°) =1/2 \*'w(2)

sin(60°) =1/2 \*'w(3)

sin(90°) =1/2 \*'w(4)

-----

|Symmetriebeziehungen|

Am Einheitskreis ermittelt man Beziehungen für Winkel, die sich um 90° oder 180° unterscheiden.

* Die erste Skizze stellt die Winkelfunktionswerte zu den Winkeln 'al und -'al gegenüber.
* Die zweite vergleicht die Winkelfunktionswerte für die Winkel 'al, 180° -'al und 180° +'al.
* Die dritte macht schließlich Aussagen über die Winkelfunktionswerte zu 'al und 90° +'al.

-----

Tipp: Diese Symmetriebeziehungen werden in der Literatur auch als Reduktionsformeln bezeichnet.

Der Name spricht für sich: In der Beziehung sin (90° +'al =cos('al) wird der Winkel von 90° +'al auf 'al reduziert.

-----

sin(-'al) =-sin('al)

cos(-'al) =cos('al)

tan(-'al) =-tan('al)

-----

sin(180° -'al) =sin('al)

cos(180° -'al) =-cos('al)

tan(180° -'al) =-tan('al)

-----

sin(90° +'al) =cos('al)

cos(90° +'al) =-sin('al)

tan(90° +'al) =-1/(tan('al))

-----

In gleicherweise kann man die grafischen Veranschaulichungen für Winkel beziehungsweise Winkelpaare in allen Quadranten ausführen und entsprechende Beziehungen ablesen.

In den Skizzen wurde stets ein spitzer Winkel 'al (0° <'al <90°) verwendet. Entsprechend sind die Bilder und damit die Beziehungen für Winkel aus den anderen drei Quadranten. Damit ist deren Gültigkeit für den Bereich 'al 'el 'R gegeben.

-----

Für die Winkel 'al und 360° +'al gelten die Beziehungen:

sin(360° +'al) =sin('al)

cos(360° +'al) =cos('al)

tan(360° +'al) =tan('al) =tan (180° +'al)

-----

Begründung und Herleitung der Beziehung:

tan(90° +'al) =-1/(tan('al))

tan(90° +'al) =(sin(90° +'al))/(cos(90° +'al)) =

=(cos('al))/(-sin('al)) =-1/(tan('al))

j-126

### \*\*-3 - 5.2.3 Sätze für das allgemeine Dreieck

Jedes beliebige Dreieck lässt sich durch Zeichnen einer Höhe in zwei rechtwinkelige Dreiecke zerlegen.

Die Höhe h\_c lässt sich berechnen: h\_c =b \*sin('al)

Eingesetzt in die Flächenformel A =(c \*h\_c)/2 ergibt das A =(b \*c \*sin('al))/2.

Diese Rechnung kann auch für die Höhen h\_a und h\_b durchgeführt werden.

-----

Abb.: Skizze zur Herleitung der trigonometrischen Flächeninhaltsformel:

A =(c \*h\_c)/2

h\_c =b \*sin('al)

A =(b \*c \*sin('al))/2

-----

|Satz: Trigonometrische Flächeninhaltsformel|

A =(a \*b \*sin('ga))/2 =(a \*c \*sin('be))/2 =(b \*c \*sin('al))/2

-----

##-Beispiel 5.20: Trigonometrische Flächeninhaltsformel (B)

Berechnen Sie den Flächeninhalt eines regelmäßigen Fünfecks, das einem Kreis mit Radius r =3 cm eingeschrieben ist.

Trigonometrische Flächeninhaltsformel mit 'ga =(360°)/5 =72° an:

A =5 \*(3 \*3 \*sin(72°))/2 ~~21,4

Der Flächeninhalt des regelmäßigen Fünfecks beträgt etwa 21,4 cm^2.

-----

Mit dem Sinus- und dem Kosinussatz kann man jedes beliebige Dreieck berechnen, ohne es in zwei rechtwinkelige zu zerlegen.

-----

|Sinussatz|

Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinuswerte ihrer gegenüberliegenden Winkel.

a/(sin('al)) =b/(sin('be)) =c/(sin('ga))

-----

Der Sinussatz kann auf zwei verschiedene Arten abgeleitet werden.

1. Aus den Formeln für den Flächeninhalt eines Dreiecks erhält man

(b \*c \*sin('al))/2 =(a \*c \*sin('be))/2 also b/(sin('be)) =a/(sin('al))

-----

2. Man berechnet die Höhe h\_c des allgemeinen Dreiecks über die beiden enthaltenen rechtwinkeligen Dreiecke.

h\_c =b \*sin('al)

h\_c =a \*sin('be)

Gleichsetzen liefert: b \*sin('al) =a \*sin('be), also a/(sin('al)) =b/(sin('be)).

-----

Hinweis: Bei allen folgenden Beispielen werden stets

a) die gegebenen Größen färbig eingezeichnet, weil dadurch die anzuwendenden Sätze förmlich "ins Auge springen", und

b) die einzelnen Rechenschritte durchnummeriert 1., 2., ...

j-127

##-Beispiel 5.21: Dreiecksberechnung mit dem Sinussatz (A, B)

Von einem Dreieck kennt man c =50 mm, 'al =72° und 'be =49°.

Berechnen Sie die beiden anderen Seiten a und b, den Winkel 'ga und den Flächeninhalt A.

Überprüfen Sie die Ergebnisse an einer Zeichnung.

-----

Lösung:

Da der Sinussatz Seiten mit ihren gegenüberliegenden Winkeln verknüpft, braucht man zuerst den Winkel 'ga.

1. 'ga =180° -'al -'be =59°

-----

2. Berechnung von a mit dem Sinussatz:

a/(sin('al)) =c/(sin('ga))

a =(c \*sin('al))/(sin('ga)) =(50 sin(72°))/(sin(59°)) ~~55,5 mm

a ~~55,5 mm

-----

3. Berechnung von b mit dem Sinussatz:

b/(sin('be)) =c/(sin('ga))

b =(c \*sin('be))/(sin('ga)) =(50 \*sin 49°)/(sin(59°)) ~~44 mm

b ~~44 mm

-----

4. Flächeninhalt:

A =(b \*c \*sin('al))/2 ~~(44 \*50 \*sin(72°)/2 ~~1047 mm^2

A ~~1047 mm^2

-----

Der Konstruktionsweg zu Beispiel 5.21:

1. Seite c einzeichnen.

-----

2. Winkel 'al einzeichnen liefert eine Halbgerade, auf der die Seite b liegt.

-----

3. Winkel 'be liefert eine zweite Halbgerade, auf der die Seite a liegt.

-----

4. Der Schnittpunkt dieser beiden Halbgeraden ist der Punkt C und liefert damit die beiden Seiten a und b.

-----

##-Beispiel 5.22: Regelmäßiges Achteck - Umfang mit dem Sinussatz (A, B)

Gegeben ist ein regelmäßiges Achteck, das einem Kreis mit dem Radius 10 cm eingeschrieben ist.

Ermitteln Sie den Umfang des Achtecks.

-----

Lösung:

Das Achteck lässt sich in 8 gleichschenkelige Dreiecke zerlegen, deren Zentriwinkel (360°)/8 =45° ist.

1. Winkel 'be:

'be =(180° -45°)/2 =67,5°.

-----

2. a mit Sinussatz: a/(sin(45°)) =(10)/(sin(67,5°))

a ~~7,654 cm

-----

3. u =8 \*a \*61,23 cm

Zeichnet man die Höhe h\_a in einem der gleichschenkeligen Dreiecke ein, kommt man sogar ohne Sinussatz aus:

sin(22,5°) =(a/2)//r =a/(2r)

a =2r \*sin(22,5°) ~~7,654

a ~~7,654 cm

-----

Hinweis: Hier im Beispiel ist das die Seitenlänge a des regelmäßigen Achtecks.

-----

Abb.: Das gleichschenkelige Dreieck des regelmäßigen Achtecks wird durch die eingezeichnete Höhe in zwei kongruente rechtwinkelige Dreiecke mit einem Winkel von 22,5° zerteilt.

j-128

Beachten Sie bei der Berechnung von rechtwinkeligen und allgemeinen Dreiecken:

|Rechtwinkeliges Dreieck|

Drei Größen - zwei Seiten und ein Winkel - sind durch die Definitionen von Sinus, Kosinus und Tangens miteinander verknüpft.

z. B. sin('al) =(GK)/(HY) =a/c

Kennt man zwei der drei Größen, kann man die dritte berechnen:

'al =sin^(-1)((GK)/(HY)) =sin^(-1)(a/c)

a =c \*sin('al)

c =a/(sin('al))

-----

|Allgemeines Dreieck|

Vier Größen - zwei Seiten und zwei Winkel - sind im Sinussatz miteinander verknüpft.

(sin('al))/a =(sin('be))/b

Kennt man drei passende Größen, (z. B. a, b und 'be), so kann man die vierte berechnen:

'al =sin^(-1)((a 'sin('be))/b

-----

Der Konstruktionsweg zu Beispiel 5.23:

1. Zeichnen Sie den Winkel 'al =40°.

-----

2. Tragen Sie auf einem Schenkel die Länge b =70 mm ab.

-----

3. Nehmen Sie die Länge a =50 mm in den Zirkel und schlagen Sie diese im Eckpunkt C ab. Sie erhalten zwei mögliche Eckpunkte B\_1 und B\_2 und damit zwei mögliche Dreiecke AB\_1C und AB\_2C.

-----

##-Beispiel 5.23: Dreiecksberechnung mit zwei Lösungen (A, B)

Von einem Dreieck kennt man a =50 mm, b =70 mm und 'al =40°.

a) Zeichnen Sie das Dreieck.

-----

b) Berechnen Sie die Seite c, die beiden Winkel 'be und 'ga und den Flächeninhalt A.

-----

Lösung:

b) 'be mit Sinussatz: (sin('al))/a =(sin('be))/b

sin('be) =(b \*sin('al))/a =(70 \*sin(40°))/(50) ~~0,9

'be ~~sin^(-1)(0,9) ~~64,145°

Sie haben eine Lösung gefunden: 'be\_1 ~~64,1°.

Aus der Skizze erkennen Sie, dass es eine zweite Lösung gibt.

'be\_1 und 'be\_2 ergänzen einander auf 180°, da das B\_2B\_1C gleichschenkelig ist.

'be\_1 und 'be\_2 sind also supplementäre Winkel.

Die Gleichung sin('be) ~~0,9 hat in [0°; 180°] zwei Lösungen:

'be\_1 ~~64,145° und 'be\_2 =180° -64,145° =115,855°, da sin('be) =sin(180° -'be).

-----

Berechnen Sie die weiteren Bestimmungsstücke der beiden Dreiecke:

AB\_1C: 'be\_1 ~~64,145°

'ga\_1 =180° -'al -'be\_1 ~~75,855°

c\_1 =(a \*sin('ga\_1))/(sin('al)) ~~75,44

c\_1 ~~75,44

A\_1 =(a \*b \*sin('ga\_1))/2 ~~1697

A\_1 ~~1697 mm^2 =16,97 cm^2

-----

AB\_2C: 'be\_2 ~~115,855°

'ga\_2 =180° -'al -'be\_2 ~~24,145°

c\_2 =(a \*sin('ga\_2))/(sin('al)) ~~31,76

c\_2 ~~31,76 mm

A\_2 =(a \*b \*sin('ga\_2))/2 ~~716

A\_2 ~~716 mm^2 =7,16 cm^2

-----

Zwei Winkel 'be\_1 und 'be\_2 führen im Intervall [0°; 180°] zu einem Sinuswert von 0,9.

-----

Tipp:

Längen- und Flächenmaße:

1 cm =10 mm

1 cm^2 =(10 mm)^2 =100 mm^2

j-129

Zwei mögliche Dreiecke als Lösungen einer Aufgabe treten nur dann auf, wenn zwei Seiten und ein anliegender Winkel gegeben sind und die kleinere Seite (a =50 mm <b =70 mm) diesem Winkel gegenüberliegt. Man bezeichnet diesen Fall als SSW.

Es können drei Lösungsfälle auftreten, abhängig von h\_c =b \*sin('al)

1. Fall: a >h\_c: zwei Lösungen

2. Fall: a =h\_c: eine Lösung

3. Fall: a <h\_c: keine Lösung

-----

SSW-Satz: Zwei Dreiecke, die in zwei Seitenlangen und in jenem Winkel übereinstimmen, der der längeren Seite gegenüberliegt, sind kongruent.

SSS-Satz: Zwei Dreiecke, die in ihren drei Seitenlangen übereinstimmen, sind kongruent.

-----

In der Trigonometrie stellt der Kosinussatz eine Beziehung zwischen den drei Seiten eines Dreiecks und dem Kosinus eines der drei Winkel des Dreiecks her.

|Kosinussatz|

Sind von einem Dreieck die drei Seiten (SSS) oder zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel (SWS) gegeben, so kann der Sinussatz nicht angewendet werden. In diesen Fällen hilft der Kosinussatz.

Leiten Sie ihn für ein Dreieck mit den zwei Seiten a und b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel 'ga ab. Beschränken Sie sich dabei auf den Fall 0° <'ga <90°.

Zerlegen Sie durch die Höhe auf a das allgemeine Dreieck in zwei rechtwinkelige Dreiecke und wenden Sie den pythagoräischen Lehrsatz für das gelbe rechtwinkelige Dreieck an:

c^2 =(a -b \*cos('ga))^2 +(b \*sin('ga))^2

c^2 =a^2 -2 \*a \*b \*cos('ga) +b^2 \*cos^2('ga) +b^2 \*sin^2('ga) =

=a^2 -2 \*a \*b \*cos('ga) +b^2 \*(cos^2('ga) +sin^2('ga)) =a^2 +b^2 -2 \*a \*b \*cos('ga)

-----

Abb.: Die "Blickrichtung" für den Kosinussatz: Kennt man zwei Seiten und den von diesen eingeschlossenen Winkel, so kann man die dritte dem gegebenen Winkel gegenüber liegende Seite berechnen.

Auch für 90° <'ga <180° kann der Kosinussatz abgeleitet werden.

Entsprechende Beziehungen gelten auch für die anderen Seiten:

-----

|Kosinussatz|

In jedem Dreieck gilt, dass das Quadrat einer Seitenlänge gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen, vermindert um das doppelte Produkt dieser Seitenlängen mal dem Kosinuswert des von ihnen eingeschlossenen Winkels ist.

a^2 =b^2 +c^2 -2 \*b \*c \*cos('al)

b^2 =a^2 +c^2 -2 \*a \*c \*cos('be)

c^2 =a^2 +b^2 -2 \*a \*b \*cos('ga)

-----

Spezialfall: für 'ga =90° ist cos(90°) =0 und dann gilt: c^2 =a^2 +b^2.

Das ist der Satz des Pythagoras.

-----

|Kosinussatz:|

a^2 =b^2 +c^2 -2 \*b \*c \*cos('al)

b^2 =a^2 +c^2 -2 \*a \*c \*cos('be)

c^2 =a^2 +b^2 -2 \*a \*b \*cos('ga)

-----

Hinweis: Der Lehrsatz des Pythagoras ist ein Spezialfall des Kosinussatzes.

Umgekehrt ist der Kosinussatz eine Verallgemeinerung des Lehrsatzes des Pythagoras für allgemeine Dreiecke.

-----

Der Konstruktionsweg zu diesem Beispiel:

1. Seite c einzeichnen

2. Seite b von A aus abschlagen

3. Seite a von B aus abschlagen

4. C wird als Schnittpunkt der beiden Kreise geliefert.

-----

##-Beispiel 5.24: Dreiecksberechnung mit dem Kosinussatz (A, B)

Von einem Dreieck kennt man die Seiten a =5 cm, b =6 cm und c =7 cm.

Berechnen Sie die Winkel dieses Dreiecks und den Flächeninhalt.

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse an einer Zeichnung.

-----

Lösung:

'ga mit Kosinussatz:

c^2 =a^2 +b^2 -2 \*a \*b \*cos('ga)

2 \*a \*b \*cos('ga) =a^2 +b^2 -c^2

cos('ga) =(a^2 +b^2 -c^2)/(2 \*a \*b) =0,2

'ga =cos^(-1)(0,2) ~~78,46°

j-130

##-Beispiel 5.24: Dreiecksberechnung mit dem Kosinussatz (Fortsetzung) (A, B)

'al mit Sinussatz:

(sin('al)) =(sin('ga))/c

sin('al) =(a \*sin('ga))/c ~~44,42°

'al ~~sin^(-1)(0,7) ~~44,42°

'be =180° -'al -'ga ~~57,12°

-----

Flächeninhalt:

A =(a \*b \*sin('ga))/2 ~~14,7

A ~~14,7 cm^2

-----

### \*\*-3 - 5.2.4 Vermessungsaufgaben

Vermutlich haben auch Sie bereits Vermessungstechniker beobachtet, die mit Geräten die Landschaft vermessen.

Wird eine neue Straße geplant oder eine neue Leitung im Boden verlegt, muss das Gelände möglichst genau vermessen werden. Dazu verwenden die Techniker einen Theodoliten. Der Theodolit besteht im Wesentlichen aus einem Fernrohr, das in horizontaler und vertikaler Richtung geschwenkt werden kann und mit dem Punkte im Gelände anvisiert sowie Winkel mit großer Genauigkeit gemessen werden können.

Im 19. jahrhundert wurde die Erde systematisch vermessen und kartografiert. Ausgehend von einer geraden Strecke wurde von deren Endpunkten ein dritter Punkt anvisiert. Die Strecken zu diesem Punkt bildeten wieder die Basis weiterer Dreiecke, die Landschaft wurde so mit einem "trigonometrischen Netz" überzogen.

Obwohl die Satellitennavigation GPS (Global Positioning System) heute die Vermessungstechnik revolutioniert, werden nach wie vor Theodoliten eingesetzt.

-----

|Winkel bei Vermessungen|

1. Höhenwinkel: Von der Horizontalen wird nach oben (in die Höhe) gemessen.

-----

2. Tiefenwinkel: Von der Horizontalen wird nach unten (in die Tiefe) gemessen.

-----

3. Sehwinkel: Winkel, unter dem ein Objekt gesehen wird.

-----

Wenn Vermessungstechniker im Gelände die Länge einer Strecke (oft wird eine Standlinie abgesteckt) und zwei Winkel kennen, können sie mit dem Sinus- und dem Kosinussatz die Längen weiterer Strecken berechnen (Vorwärtsschnitt).

j-131

##-Beispiel 5.25: Standlinie (A, B, C)

Entlang eines Flussufers wurde eine Standlinie von 100 m Länge abgesteckt. Von ihren Endpunkten werden die Winkel nach einem am anderen Ufer stehenden Baumstamm gemessen: 'al =43° und 'be =21°.

a) Erstellen Sie eine maßstabsgetreue Zeichnung.

-----

b) Lesen Sie aus der Zeichnung die Breite des Flusses näherungsweise ab. DerFluss ist an dieser Stelle etwa 27 m breit.

-----

c) Berechnen Sie die Breite des Flusses an dieser Stelle.

Der fehlende Winkel im Dreieck ist 180° -(43°+21°) =116°

Sinussatz: a/(sin('al)) =(100)/(sin(116°))

a =100 \*(sin(43°))/(sin(116°)) ~~75,88 m

Definition des Sinus im rechtwinkeligen Dreieck: sin('be) =d/a

d =a \*sin('be) ~~27,19 m

Der Fluss ist an dieser Stelle etwa 27 m breit.

-----

Man kann die Aufgabe konstruktiv lösen:

1. Standlinie erstellen.

2. Winkel 'al und 'be konstruieren.

3. Die beiden Halbgeraden schneiden.

4. Die Flussbreite entspricht der Länge der Strecke d.

-----

##-Beispiel 5.26: Masthöhenbestimmung mithilfe einer Standlinie (A, B, D)

Ein Beobachter will die Höhe eines Mastes ermitteln, zu dessen Fußpunkt er nicht gelangen kann. Er steckt in Richtung des Mastes eine horizontale Standlinie von a =20 m Länge ab und misst von ihren Endpunkten die Höhenwinkel 'al =27,21° und 'be =30,147° zur Mastspitze.

a) Zeigen Sie, dass sich die Höhe x des Mastes durch x =(a \*sin('al) 'sin('be))/(sin('be -'al)) berechnen lässt.

Sinussatz für das allgemeine Dreieck ABS:

y/(sin('al)) =a/(sin('be -'al))

y =(a \*sin('al))/(sin('be -'al))

Definition des Sinus für das rechtwinkelige Dreieck BFS:

sin('be) =x/y, x =y \*sin('be)

Damit erhalten Sie für die Masthöhe x allgemein x =(a \*sin('al) 'sin('be))/(sin('be -'al)).

-----

b) Berechnen Sie die Masthöhe.

Setzt man die gegebenen Größen ein, so erhält man x ~~89,65 m.

-----

c) Erklären Sie, welche Größe durch den Ausdruck x/(sin('be)) berechnet wird.

Damit wird die Entfernung y berechnet, weil sin('be) =x/y und damit y =x/(sin('be)).

-----

Abb.: "Die Vermessung der Welt" ist ein 2005 auf Deutsch erschienener Roman von Daniel Kehlmann.

Thema ist die fiktive Doppelbiografie des Mathematikers Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) und des Naturforschers Alexander von Humboldt (1769 bis 1859).

j-132

##-Beispiel 5.27: Sehwinkel für ein Gemälde (A, B)

Ein 40 cm hohes Gemälde hängt lotrecht an einer Wand. Das Auge eines Betrachters ist vom unteren Bildrand 13 dm und vom oberen Bildrand 15 dm entfernt. Berechnen Sie den Sehwinkel.

Mit dem Kosinussatz für das Dreieck ABC kann man den Sehwinkel 'al aus den drei bekannten Seitenlängen berechnen:

4^2 =15^2 +13^2 -2 \*15 \*13 \*cos('al)

cos('al) ~~0,969; 'al ~~14,3°

Der Betrachter sieht das Gemälde unter einem Sehwinkel von etwa 14,3°.

-----

##-Beispiel 5.28: Ballonhöhe

Ein Beobachter, der sich auf einem Turm 18 m über der Fläche eines Sees befindet, beobachtet einen Ballon unter einem Höhenwinkel von 'al =54,537° und dessen Spiegelbild im Wasser unter einem Tiefenwinkel von 'be =57,68°.

Ermitteln Sie die Höhe des Ballons über dem See.

-----

Lösung:

Verwenden Sie die beiden eingezeichneten rechtwinkeligen Dreiecke:

tan('al) =x/y

tan('be) =(x +36)/y, also

(tan('al)/(tan('be)) =x/(x +36)

x =(36 \*tan('al))/(tan('be) -tan('al)) ~~285,92

Der Ballon befindet sich etwa 286 m +18 m, also etwa 304 m über dem Seespiegel.

-----

### \*\*-3 - 5.2.5 Winkelfunktionen als reelle Funktionen

Definitions- und Wertemenge von Funktionen sind meistens Teilmengen der reellen Zahlen.

Um die Winkelfunktionen in einem kartesischen Koordinatensystem darzustellen, wird deshalb auf der x-Achse das Bogenmaß des Winkels aufgetragen.

|Bogenmaß eines Winkels|

Während man alle Vermessungsaufgaben und Berechnungen am Dreieck im Gradmaß ausführen kann, braucht man für die Winkelfunktionen ein zusätzliches Winkelmaß. Damit kann man die Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion als reelle Funktionen definieren.

So wie man eine Länge von l =120 cm auch als l =1,2 m oder l =12 dm oder l =1200 mm schreiben kann, kann man auch einen Winkel von 90° anders anschreiben, nämlich als ('pi)/2 rad oder nur ('pi)/2. Dabei ist 1 rad (1 Radiant) ein ganz spezieller Winkel.

-----

Tipp: Die Einteilung des Kreises in 360° leitet sich vom babylonischen Zahlensystem mit der Basis 60 ab.

In der Zeitmessung ist die Basis 60 noch gegenwärtig:

1 h =60 min =3600 s

-----

|Definition: Radiant rad|

1 rad (1 Radiant) ist derjenige Winkel, bei dem der zugehörige Bogen eines Kreissektors mit dem Radius ident ist. Dieser Winkel ist (180°)/('pi) also etwa 57,296°.

j-133

Beim Einheitskreis (Radius r =1 Längeneinheit =1 LE) gehört zum vollen Winkel von 360° der Bogen b =u =2r'pi =2'pi LE.

Abkürzungen für die folgende Tabelle:

Bogen b - Bogen b in Längeneinheit

Winkel 'al - Zugehöriger Winkel 'al in Grad

Bogen b | Winkel 'al

2'pi | 360

1 | (360)/(2'pi) =(180)/('pi)

-----

Ein Bogen von 1 LE gehört daher zum Winkel von (180)/('pi).

1 rad =(180)/('pi) ~~57,296°

-----

Das babylonische Jahr hatte 360 Tage +Schalttage.

Die Zahl 360 hat den Vorteil, dass sie viele Teiler besitzt.

Ihre Teilermenge ist:

T\_(360) ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360}

-----

Umrechnung von Grad in Radiant:

Winkel 'al in Grad | Winkel x in Radiant

360 | ~~6,2832

1 | (2'pi)/(360) =('pi)/(180)

'al | ('al \*'pi)/(180)

-----

|Definition: Bogenmaß|

Für einen Kreissektor mit Radius r und Bogenlänge b nennt man das Verhältnis von Bogenlänge b zu Radius r das Bogenmaß x des zugehörigen Winkels: x =b/r

-----

Bogenmaß x:

x =b/r =('al \*'pi)/(180°)

b =(r \*'pi \*'al)/(180°)

-----

Gibt man den Winkel x im Bogenmaß an, folgt aus der Definition die einprägsame und kurze Beziehung b =r \*x für die Bogenlänge.

x ist die Maßzahl der Länge des zum Winkel 'al gehörenden Bogens am Einheitskreis.

In der Tabelle werden einige Winkel im Grad- und im Bogenmaß gegenübergestellt:

Gradmaß ° | Bogenmaß in rad

360 | 2'pi

180 | 'pi

90 | ('pi)/2

60 | ('pi)/3

45 | ('pi)/4

30 | ('pi)/6

1 | ('pi)/(180)

(180)/('pi) =57,296 | 1

-----

Einstellung für den GTR:

Gradmaß: DEGREE

Bogenmaß: RADIAN

* Bei geometrischen Berechnungen verwendet man im Allgemeinen das Gradmaß.
* Bei der Untersuchung und der Darstellung von Winkelfunktionen wird im Allgemeinen das Bogenmaß verwendet.

Beide Winkelmaße sind gleichwertig, wie Längen in Meter oder in Fuß angegeben werden können.

Der Einheitskreis wurde bereits wiederholt äußerst hilfreich eingesetzt. Auch die Graphen der Winkelfunktionen werden am Einheitskreis ermittelt.

-----

|Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion am Einheitskreis|

Die Sinus- und die Kosinusfunktion sind auf ganz definiert und haben die Wertemenge [-1; 1].

|Der Graph der Sinusfunktion|

Das Bogenmaß für 90° ist ('pi)/2.

j-134

|Der Graph der Kosinusfunktion|

Das charakteristische Merkmal der trigonometrischen Funktionen ist ihre Periodizität.

Das Bogenmaß für 180° ist 'pi.

-----

|Definition: Periodische Funktion|

Eine Funktion f heißt periodisch mit der Periode oder Periodenlänge p, wenn für alle x 'el D gilt:

f(x +p) =f(x)

periodos: griechisch für "das Herumgehen"

-----

Aus den beiden Graphen kann man charakteristische Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion ablesen:

-----

|Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion|

* Die Sinus- und die Kosinusfunktion sind periodische Funktionen. Die Periodenlänge beträgt 2'pi, das entspricht 360°.
* Die Sinusfunktion schneidet die x-Achse bei: ..., -2'pi, -'pi, 0, 'pi, 'pi, ...
* Die Kosinusfunktion schneidet die x-Achse bei: ..., -(3'pi)/2, -('pi)/2, ('pi)/2, (3'pi)/2, ...
* Der Graph der Sinusfunktion ist gegenüber dem der Kosinusfunktion auf der x-Achse um ('pi)/2 verschoben.

-----

Die Periodizität mit der Periodenlänge 2'pi bedeutet, dass der Sinus- und der Kosinuswert unverändert bleiben, wenn man zu ihrem Argument ein ganzzahliges Vielfaches von 2'pi(360°) addiert oder subtrahiert.

-----

Hinweis: Periodische Vorgänge wiederholen sich in gleichen Zeitabständen in gleicherweise.

Sinus- und Kosinusfunktion haben die Periodenlänge 2'pi:

sin(x +2'pi) =sin(x)

cos(x +2'pi) =cos(x)

-----

Allgemein:

sin(x +k \*2'pi) =sin(x)

cos((x +k \*2'pi) =cos(x)

k 'el 'Z

-----

|Tangensfunktion|

Da tan(x) =(sin(x))/(cos(x)) ist, müssen alle x-Werte, bei denen der Kosinus verschwindet (null ist), aus der Definitionsmenge der Tangensfunktion ausgeschlossen werden:

D ='R \ {(2k +1) \*('pi)/2 | k 'el 'Z}.

Die Wertemenge ist 'R. Es ergibt sich ein gänzlich anderes Bild als bei der Sinus- und der Kosinusfunktion.

j-135

|Der Graph der Tangensfunktion|

Aus dem Graphen werden die typischen Eigenschaften der Tangensfunktion abgelesen:

-----

|Eigenschaften der Tangensfunktion|

* Die Tangensfunktion ist eine periodische Funktion. Die Periodenlänge beträgt 'pi, das entspricht 180°.
* Die Tangensfunktion schneidet die x-Achse bei: ..., -2'pi, -'pi, 0, 'pi, 2'pi, ...
* Die Stellen, an denen der Graph eine Asymptote (Grenzgerade) hat, die parallel zur y-Achse verläuft, sind: ..., -(3'pi)/2, ('pi)/2, (pi)/2, (3'pi)/2, ...

Der Funktionswert der Tangensfunktion nimmt innerhalb der Intervalle

..., ]-(3'pi)/2; ('pi)/2[, ]-('pi)/2; ('pi)/2[, ]('pi)/2; (3'pi)/2[, ... beständig zu.

-----

asymptotos: griechisch für nicht zusammenfallend

Die Tangensfunktion weist eine Periodizität mit Periodenlänge 'pi auf:

tan(x +'pi) =tan(x)

tan(x +k \*'pi) =tan(x) mit k 'el 'Z

-----

* Die Periodenlänge von 'pi bedeutet, dass die Tangenswerte unverändert bleiben, wenn man zu ihrem Argument ein ganzzahliges Vielfaches von 'pi (180°) addiert oder subtrahiert: tan(x +k \*'pi) =tan(x) mit k 'el 'Z
* Die Nullstellen der Tangensfunktion sind mit denen der Sinusfunktion ident.
* Die Asymptoten sind genau dort, wo die Tangensfunktion nicht definiert ist; das sind die x-Koordinaten der Nullstellen der Kosinusfunktion.

Bei den Dreiecksberechnungen werden sehr häufig Winkel im Gradmaß mithilfe von sin^(-1) (Wert), cos^(-1) (Wert) und tan^(-1) (Wert) berechnet.

Im Bogenmaß heißen die Umkehrfunktionen Arkussinus (arcsin), Arkuskosinus (arccos) und Arkustangens (arctan).

Die Umkehrung der Sinusfunktion y =sin(x) ist keine Funktion, da die Sinusfunktion nicht eindeutig umkehrbar ist. Sie erhalten den Graphen der Umkehrung, indem Sie den Graphen der Sinusfunktion an der Geraden mit der Gleichung y =x spiegeln.

Eine Umkehrfunktion existiert, wenn man sich etwa auf das Intervall [-('pi)/2; ('(pi)/2] beschränkt. In diesem Intervall besitzt die Sinusfunktion die Umkehrfunktion Arkussinus.

-----

Abb.: Beim Windowsrechner und bei vielen anderen Taschenrechnern stellt man mit Deg und Rad ein, wie man Winkel eingeben bzw. berechnen möchte.

Pi steht als eigene Schaltfläche zur Verfügung.

-----

Funktion und Umkehrfunktion:

Sinusfunktion D =[-('pi)/2; ('(pi)/2] W =[-1; 1]

Arkussinusfunktion D =[-1; 1] W =[-('pi)/2; ('(pi)/2]

-----

Definitionsmenge D

Wertemenge W

f(x) | f^(-1)(x)

sin(x) | arcsin(x)

cos(x) | arccos(x)

tan(x) | arctan(x)

j-136

|Veranschaulichung einiger Eigenschaften der Winkelfunktionen mit Technologie|

Im Menü (MODE) wählt man das Bogenmaß (Radian).

-----

##-Beispiel 5.29: Sinus- und Kosinusfunktion (A, B)

Stellen Sie die Funktionen f\_1 und f\_2 mit f\_1(x) =sin(x) und f\_2(x) =cos(x)

in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem im Intervall [-1; 7] grafisch dar.

Drücken Sie dazu die Taste (Y=) und geben Sie die Funktionsterme ein. Um die Funktionsgraphen besser unterscheiden zu können, soll der Graph der zweiten Funktion dick gezeichnet werden. Gehen Sie dazu müdem Cursor auf die schräge Linie vor dem Funktionsnamen und drücken Sie (ENTER).

Bei der Einstellung des Grafikfensters geben Sie Xscl ='pi/4 ein.

-----

##-Beispiel 5.30: Amplitude A der Sinusfunktion f mit f(x) =A \*sin(x) (A; B)

Stellen Sie die Funktionen f\_1 bis f\_3 mit f\_1(x) =sin(x), f\_2(x) =3 \*sin(x) und f\_3(x) =-1,5 \*sin(x) in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem in [-1; 7] grafisch dar.

Die Funktion f\_1 mit f\_1(x) =sin(x) wird zu Vergleichszwecken dick gezeichnet.

Bei der Einstellung des Grafikfensters geben Sie Ymin =-4 und Ymax =4 und für Xscl ='pi/4 ein.

Auswirkungen der Amplitude A auf den Graphen der Funktion:

Der Graph der Funktion f\_2 geht aus dem Graphen der Funktion f\_1 durch eine Streckung um den Faktor 3 in positivery-Richtung hervor. (Dabei bleiben die Nullstellen natürlich unverändert.)

Der Graph der Funktion f\_3 geht aus dem Graphen der Funktion f\_1 durch eine Streckung um den Faktor 1,5 in negativer y-Richtung hervor. Man kann diesen Prozess auch in zwei Schritte zerlegen. Beispielsweise: 1. Streckung um den Faktor 1,5 in positiver y-Richtung und 2. Spiegelung an der x-Achse.

-----

Abb.: Die drei Graphen. Der Cursor befindet sich auf dem Graphen der Funktion f\_3:

f\_3(2,6595745) ~~ -0,6953525

-----

Tipp: Die Amplitude bzw. Schwingungsweite ist die maximale Auslenkung einer periodischen Funktion.

-----

Beispiel 5.31: Frequenz 'om der Sinusfunktion f mit f(x) =sin('om \*x) (A, B)

Stellen Sie die Funktionen f\_1 bis f\_3 mit

f\_1(x) =sin(x),

f\_2(x) =sin(3 \*x) und

f\_3(x) =sin(x/2)

in einem kartesischen Koordinatensystem im Intervall [-1; 7] grafisch dar.

* Der Graph der Funktion f\_2 macht im Intervall [0; 2'pi] drei volle Schwingungen, während
* der Graph der Funktion f\_3 in diesem Intervall nur eine halbe Schwingung ausführt.

Das meint der Begriff Frequenz:

* Die Funktion f\_2 schwingt dreimal so oft wie die Ausgangsfunktion f\_1, während
* die Funktion f\_3 nur halb so viele Schwingungen ausführt wie die Ausgangsfunktion f\_1.

Eine andere Sichtweise geht erneut über Streckung und Stauchung, wie Sie es bei der Amplitude beobachtet haben: Die Frequenz 'om hat eine Streckung (für 'om <1) bzw. eine Stauchung (für 'om >1) des Graphen der zugehörigen (Ausgangs)Funktion in x-Richtung zur Folge.

-----

Abb.: Die Funktion f\_1 mit f\_1(x) =sin(x) wird zu Vergleichszwecken wieder dick gezeichnet.

j-137

##-Beispiel 5.32: Amplitude A und Frequenz 'om von f mit f(x) =A \*sin('om \*x) (A, B, C)

Vergleichen Sie die beiden Funktionen f und g mit f(x) =A \*sin('om \*x) und g(x) =sin(x), indem Sie deren Graphen zeichnen und die Amplitude A und die Frequenz 'om über Schieberegler verändern.

a) Die Graphen der beiden Funktionen. Für f ist A =2,7 und 'om =1,1:

-----

b) Die Graphen der beiden Funktionen. Für f ist A =3,2 und 'om =0,5:

Im ersten Fall geht der Graph der Funktion f aus dem Graphen der Funktion g durch eine Streckung um 2,7 hervor. Die Frequenz ist nur um 10 % größer, weshalb die Funktion f etwas "früher" mit einer Schwingung "fertig ist".

Im zweiten Fall wird der Graph um den Faktor 3,2 in y-Richtung gestreckt. Die Funktion f schwingt mit der halben Frequenz von g, macht also eine vollständige Schwingung, während g zwei volle macht.

-----

Tipp: Mit Frequenz (lateinisch frequentia, Häufigkeit) bezeichnet man die Anzahl von Ereignissen innerhalb eines bestimmten Zeitraums.

Die Einheit der Frequenz ist das Hertz (Hz): 1 Hz =1/s

Sie ist nach dem deutschen Physiker Heinrich Rudolf Hertz benannt.

-----

##-Beispiel 5.33: Schwebung - Summe von Winkelfunktionen (A, B)

Stellen Sie die Summe zweier Sinusfunktionen s mit s(x) =sin('om \*x) +sin('om \*x) im Intervall [-1; 13] grafisch dar.

Die Summe der beiden Sinusfunktionen ergibt eine Funktion mit einer sich ändernden Amplitude.

Dieses Phänomen ist aus der Akustik unter dem Begriff Schwebung bekannt.

-----

Tipp: Eine Schwebung ist eine Schwingung mit periodisch veränderlicher Amplitude.

In der Akustik ist eine Schwebung deutlich zu hören: Erklingen zwei Töne, deren Frequenzen sich nur wenig unterscheiden, so ist ein Ton zu hören, der lauter und leiser wird.

j-138

##-Beispiel 5.34: Photovoltaikanlage (A, B, C)

In einer Tabelle sind die über mehrere Jahre gemittelten Erträge einer Photovoltaikanlage in Kilowattstunden (kWh) angegeben.

Monat | t | Stromertrag in kWh

Jänner | 1 | 113

Februar | 2 | 203

März | 3 | 491

April | 4 | 574

Mai | 5 | 665

Juni | 6 | 740

Juli | 7 | 757

August | 8 | 651

September | 9 | 450

Oktober | 10 | 344

November | 11 | 157

Dezember | 12 | 141

-----

Lösung:

Der Hersteller der PV-Anlage gibt an, den Stromertrag im Monat t mithilfe der Funktion Euro mit E(t) =330 \*sin(0,5t -1,6) +430 hinreichend genau beschreiben zu können.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion Euro und die gegebenen Datenpaare in ein Koordinatensystem.

-----

b) Lesen Sie aus dem Graphen von Eden Maximalwert der Funktion Euro ab.

E\_(max) =760 kWh

Lesen Sie aus dem Graphen von Euro den Minimalwert der Funktion Euro ab.

E\_(min) =100 kWh

Ermitteln Sie, welchem Parameter der Funktion Euro der Wert (E\_(max) -E\_(min))/2 entspricht.

Der Wert (E\_(max) -E\_(min))/2 =330 entspricht der Amplitude der Sinusfunktion E.

-----

c) Berechnen Sie den Mittelwert aus Maximalwert und Minimalwert der Funktion E. Ermitteln Sie, welchem Wert der Sinusfunktion Euro dieser berechnete Wert entspricht.

Durchschnitt =(760 +100)/2 =430

Der Wert 430 entspricht der vertikalen Verschiebung d des Graphen der Sinusfunktion Euro mit E(t) =330 \*sin(0,5t -1,6) +430 gegenüber der Grundfunktion f mit f(t) =sin(t) in y-Richtung.

-----

d) Lesen Sie aus dem Graphen von Euro die Periodenlänge der Sinusfunktion ab. Vom Maximalwert zum Minimalwert von Euro liegt die halbe Periodenlänge mit 6,3 Monaten vor.

Die abgelesene Periodenlänge ist somit ca. 12,6 Monate.

-----

e) Ermitteln Sie, in welchem Monat der Funktionswert am stärksten vom gemessenen Wert abweicht.

Berechnen Sie in diesem Monat die prozentuelle Abweichung.

Am stärksten weicht der Funktionswert (ca. 397 kWh) im März vom gemessenen Wert (491 kWh) ab.

Die Abweichung vom gemessen Wert beträgt im März ca. -19,14%.

j-139

#### \*\*-4 - Übungsaufgaben

Fertigen Sie bei allen Aufgaben eine beschriftete Skizze an.

Sie führen damit die Handlungskompetenz A (Transferieren und Modellieren) aus, weil Sie den Text in eine Zeichnung übertragen.

5.066.)

C

Betrachten Sie das rechtwinkelige Dreieck DEF in der Randspalte.

a) Ergänzen Sie die entsprechenden Winkel ('de und 'ep) und Begriffe (Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse).

f ist die **[]**.

d ist die Gegenkathete von **[]** und die Ankathete von **[]**.

e ist die **[]** von 'de und die **[]** von s.

-----

b) Vervollständigen Sie

sin('de) =**[]** cos('ep) =**[]**

cos('de) =**[]** sin('ep) =**[]**

tan('de) =**[]** tan('ep) =**[]**

-----

5.067.)

C

Betrachten Sie das rechtwinkelige Dreieck RST in der Randspalte.

a) Ergänzen Sie:

**[]** ist die Hypotenuse.

**[]** ist die Gegenkathete von 'si.

r ist die Ankathete von **[]**.

-----

b) Vervollständigen Sie:

r/t =**[]** s/t =**[]**

r/s =**[]** r/t =**[]**

s/r =**[]** s/t =**[]**

s^2 +r^2 =**[]**

-----

Kein der Geometrie Unkundiger möge hier eintreten.

Dieser Spruch stand über dem Eingang der von Platon gegründeten und geleiteten Akademie in Athen.

-----

5.068.)

A, B

Ein rechtwinkeliges Dreieck ist durch 'al =50° und

a) c =5 cm und

b) c =7 cm gegeben. Zeichnen Sie dieses Dreieck, messen Sie die Längen der beiden anderen Seiten ab und berechnen Sie mit diesen Werten näherungsweise den Sinus-, Kosinus- und Tangenswert von 50°.

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den exakten Werten, indem Sie die absoluten und relativen Abweichungen angeben.

-----

5.069.)

A, B

Wie 5.068 für 'al =30°.

-----

5.070.)

A, B

Berechnen Sie die fehlenden Größen des rechtwinkeligen Dreiecks

(Längenmaße in mm, A in mm^2):

... | a | b | c | 'al | 'be | A

a) | 5 | **[]** | **[]** | **[]** | 67,38° | **[]**

b) | **[]** | 15 | **[]** | **[]** | 61,93° | **[]**

c) | **[]** | 12 | 13 | **[]** | **[]** | **[]**

d) | 8 | **[]** | **[]** | 28,07° | **[]** | **[]**

e) | 14 | **[]** | 50 | **[]** | **[]** | **[]**

f) | 14 | **[]** | **[]** | 31,89° | **[]** | **[]**

g) | **[]** | **[]** | **[]** | **[]** | 73,74° | 336

h) | **[]** | **[]** | 26,5 | **[]** | 58,11°

j-140

5.071.)

A, B

Eine 3,5 m lange Leiter wird an eine Mauer gelehnt und reicht dort bis in eine Höhe von 2,8 m.

Berechnen Sie den Neigungswinkel, den die Leiter mit der waagrechten Bodenfläche einschließt.

-----

5.072.)

A, B

Norbert M. aus Tirol ist ein begeisterter Segelflieger. Sein Segelflugzeug geht aus 340 m Höhe im Gleitflug unter einem Winkel von 5,4° nieder.

Ermitteln Sie, welche Strecke das Flugzeug im Gleitflug zurücklegt.

-----

Abb.: Ein Segelflugzeug: Vielleicht hören Sie da auch Reinhard Mey singen "Über den Wolken ...".

-----

5.073.)

A, B

Eine Seilbahn überwindet mit einem 1350 m langen Seil eine Höhe von 735 m.

Berechnen Sie den Neigungswinkel des Seils zur Horizontalen. Den Durchhang des Seils brauchen Sie nicht berücksichtigen.

-----

5.074.)

A, B

Ein 5,4 m langer Stab wirft einen 3,5 m langen Schatten.

Berechnen Sie die Sonnenhöhe, das ist der Neigungswinkel der Sonnenstrahlen zur Horizontalen.

-----

5.075.)

A, B

Ein Hubschrauber, der bei Windstille lotrecht aufsteigt, wird von Markus, der 1,5 km vom Aufstiegsort entfernt ist, unter einem Höhenwinkel von 46,4°, einige Zeit später unter einem um 2,6° größeren Höhenwinkel gesehen. Bestimmen Sie, um wie viel Meter der Hubschrauber inzwischen gestiegen ist.

-----

Abb.: Ein Höhenwinkel 'al ist der Winkel eines Punktes über dem Horizont, während die Höhe der lotrechte Abstand ist.

-----

5.076.)

A, D

Zeigen Sie, dass in jedem rechtwinkeligen Dreieck der Sinus des einen spitzen Winkels gleich dem Kosinus des anderen spitzen Winkels ist.

-----

5.077.)

C

Betrachten Sie das rechtwinkelige Dreieck ABC mit der Höhe h\_c auf die Hypotenuse c in der Randspalte.

a) Ergänzen Sie die entsprechenden Winkel ('al und 'be) und Begriffe (Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse).

b ist die Gegenkathete von **[]**, die Ankathete von **[]** und die **[]** im Dreieck ADC.

a ist die **[]** von 'al, die **[]** von 'be und die **[]** im Dreieck BCD.

h\_c ist im Dreieck **[]** die Gegenkathete von 'al und im Dreieck BCD die **[]** von 'be.

-----

b) Vervollständigen Sie:

sin('al) =**[]** =**[]** cos('be) =**[]**

cos('al) =**[]** =**[]** sin('be) =**[]**

tan('al) =**[]** =**[]** tan('be) =**[]**

-----

5.078.)

A, D

Ergänzen Sie für ein rechtwinkeliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse c die entsprechenden Winkel ('al, 'be) und die entsprechenden Winkelfunktionen (sin, cos, tan).

Begründen Sie Ihre Aussage.

a) Wenn sich die Seiten a und b wie 2 / 1 verhalten, dann ist der **[]** von **[]** =2.

-----

b) Wenn sich die Seiten c und b wie 2 / 1 verhalten, dann ist der **[]** von 'be =1/2.

-----

c) Wenn sich die Seiten c und b wie 3 / 1 verhalten, dann ist der **[]** von 'al =1/3.

j-141

5.079.)

B, D

Der Sinus des Winkels 'al ist -3/5, der Kosinus von 'al ist 4/5.

a) Berechnen Sie den Tangens von 'al ohne Technologieunterstützung.

-----

b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie den Winkel 'al berechnen und damit den Tangens von 'al berechnen.

-----

5.080.)

A, B

Eine Straße hat auf einer 4 km langen Strecke einen Steigungswinkel von 3,8°.

Berechnen Sie, wie viele Meter der Endpunkt der Straße höher als der Ausgangspunkt liegt.

-----

5.081.)

A, B

Die Brenner-Bundesstraße hat von Innsbruck (570 m Seehöhe) bis zum Brennerpass (1370 m Seehöhe) eine Länge von 40 km.

a) Berechnen Sie die mittlere Steigung der Straße in Prozent.

-----

b) Berechnen Sie den zugehörigen Steigungswinkel.

-----

5.082.)

A, B

Eine Bergstraße hat auf einer Strecke von 3,2 km eine mittlere Steigung von 16 %.

a) Ermitteln Sie, um wie viel Höhenmeter die Straße auf dieser Strecke ansteigt.

-----

b) Berechnen Sie den zugehörigen Steigungswinkel der Straße.

-----

Tipp: Die Steigung k einer Geraden und ihr Steigungswinkel 'al hängen über k =tan('al) zusammen.

-----

5.083.)

A, B

In der Metro der tschechischen Hauptstadt Prag ist die längste Rolltreppe Europas im Einsatz. Auf einer Länge von ca. 100 m wird eine Förderhöhe von 43,6 m mit einer mittleren Geschwindigkeit von 0,75 m/s überwunden. Das führt zu einer theoretische Förderkapazität von 13500 Personen pro Stunde.

a) Berechnen Sie den Steigungswinkel der Rolltreppe.

b) Berechnen Sie die Steigung der Rolltreppe.

c) Berechnen Sie die ungefähre Förderzeit, also die Zeit, die eine Person für eine Fahrt auf dieser Rolltreppe benötigt.

-----

5.084.)

A, B

Die DIN Norm DIN 18024 beschreibt die Anforderungen für das barrierefreie Bauen öffentlicher Verkehrswege und Gebäude für Behinderte und ältere Menschen. Bei Rampen ist eine Steigung von maximal 6 % zulässig.

a) Berechnen Sie den Steigungswinkel für die Steigung von 6 %.

-----

b) Berechnen Sie die Mindestlänge einer normgerechten Rampe, die eine Höhe von 1,3 m überwindet.

-----

5.085.)

A, B

Der behindertengerechte Zugang zur Pfarrkirche Aigen im Mühlkreis (Oberösterreich) ist 10 m lang und hat eine Steigung von 10%.

a) Berechnen Sie den Steigungswinkel dieses Zugangs.

-----

b) Berechnen Sie die Höhe, die mit diesem Zugang überwunden wird.

-----

c) Berechnen Sie die horizontale Gesamtlänge, die notwendig wäre, um diesen Zugang nach der DIN-Norm (höchstens 6 % Steigung) zu adaptieren.

-----

5.086.)

A, B, C

Olympische Winterspiele, Sotschi 2014

a) Berechnen und vergleichen Sie die mittleren (negativen) Steigungswinkel für die Damen- und die Herrenabfahrt.

... | Herren | Damen

Länge in m | 3495 | 2713

Höhendifferenz in m | 1075 | 790

-----

b) Der Österreicher Matthias Mayer gewann die Olympiaabfahrt in einer Zeit von 2 min 6,23 s (2:06.23) sechs Hundertstelsekunden vordem Italiener Christof Innerhofer.

Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit von Matthias Mayer in m/s und km/h.

Zum Vergleich: Im Sektor 4 der Abfahrt wurde bei Mayer eine Momentangeschwindigkeit von 134,83 km/h ermittelt.

j-142

5.087.)

B, D

"Wie halten sich Kurzbahn-Eisschnellläufer auf den Beinen? Faszinosum Short-Track: Vier bis acht Läufer rotieren auf einer 111 Meter langen Bahn im Kreis (genauer: im Oval) und erreichen trotz dichten Gedränges im Pulk Geschwindigkeiten und Schräglagen, von denen der klassische Wiener Eistraumbenutzer tatsächlich nur träumen kann."

Zwischen dem Winkel 'be, der die Schräglage zur Horizontalen beschreibt, dem Radius R der Kurve (in m) und der Geschwindigkeit v (in m/s) des Läufers gilt folgender Zusammenhang: tan('be) =(Rg)/(v^2).

g ~~10 m/s^2 Erdbeschleunigung

"Bei einem Radius von 8,5 Metern und einer Geschwindigkeit von 10 Metern pro Sekunde (36 km/h) muss sich der Läufer demzufolge in einem Winkel von 39,8 Grad zur Bahn neigen, um auf derselben zu bleiben."

(Quelle: profil nr. 5, 27. 1. 2014, S. 67)

a) Rechnen Sie den Winkel von 39,8° nach.

-----

b) Zeigen Sie, dass ein Läufer, der sich mit 45° "in die Kurve legt", eine Geschwindigkeit von etwa 9,1 m/s hat.

-----

c) Erklären Sie, wie sich der Winkel ändert, wenn der Radius der Bahn kleiner wird (Innenbahn).

-----

Abb.: Short-Track wurde als Vorbereitung auf Sotschi 2014 physikalisch betrachtet.

(Quelle: profil nr. 5, 27.1.2014, S. 67)

-----

5.088.)

D

Begründen Sie anhand einer geeigneten Skizze den Zusammenhang k =tan('al) zwischen der Steigung k einer Geraden und deren Steigungswinkel 'al.

-----

5.089.)

A, B

Golf:

a) Ein Golfball wird unter einem Winkel von 36° mit einer Geschwindigkeit von 37 m/s abgeschlagen.

Berechnen Sie die beiden Geschwindigkeitskomponenten v\_x und v\_y.

-----

b) Ein Golfball hat beim Abschlag in x-Richtung eine Geschwindigkeit von 22 m/s und in y-Richtung eine Geschwindigkeit von 16 m/s.

Berechnen Sie den Abschlagwinkel.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Golfballs beim Abschlag.

-----

c) Ein Golfball wird mit einer Geschwindigkeit von 37 m/s abgeschlagen. Seine Geschwindigkeit in x-Richtung beträgt 18 m/s.

Berechnen Sie den Abschlagwinkel.

-----

Jede Geschwindigkeit kann in eine horizontale Geschwindigkeitskomponente v\_x

und eine vertikale Komponente v\_y zerlegt werden.

-----

5.090.)

A, B

Auf einer Karte vom Maßstab 1 : 50000 misst man ein 3,20 cm langes Straßenstück, dessen Endpunkte die Höhenangaben 346 m und 405 m haben.

a) Berechnen Sie den durchschnittlichen Steigungswinkel dieses Straßenstücks.

-----

b) Berechnen sie die durchschnittliche Steigung dieses Straßenstücks.

-----

5.091.)

A, B, D

Bestimmen und begründen Sie den Böschungswinkel, den ein Hang mit 100 % Steigung hat.

-----

5.092.)

A, B

Auf einer Karte vom Maßstab 1 : 25000 haben zwei aufeinanderfolgende 50-m-Höhenlinien einen Abstand von 4,0 mm.

Berechnen Sie mithilfe einer geeigneten Skizze den Böschungswinkel des Geländes an dieser Stelle.

-----

5.093.)

D

Schattenspiele:

h ist die Höhe eines Baumes, s ist die Länge seines Schattens und 'al ist der Winkel, den die Sonnenstrahlen mit der Horizontalen einschließen.

Erklären Sie, was die Ausdrücke h/(sin('al)), s/(cos('al)), s \*tan('al) und h/(tan('al)) bedeuten.

-----

5.094.)

D

Fadenpendel:

Erklären Sie, was die Ausdrücke l \*sin('ph) und l \*cos('ph) bedeuten.

-----

5.095.)

A, B

Der Tangens von 'al ist gleich Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks in der Randspalte ohne Technologieunterstützung.

j-143

5.096.)

A, B

Einem Kreis mit einem Flächeninhalt von 'pi cm^2 ist wie in der Randspalte gezeigt ein Quadrat eingeschrieben.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats.

-----

b) Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte von Quadrat und Kreis.

-----

5.097.)

A, B

Berechnen Sie die fehlenden Größen des gleichschenkeligen Dreiecks

(Längenmaße in mm, A in mm^2):

... | a | c | 'al | 'ga | A

a) | 17 | 16 | **[]** | **[]** | **[]**

b) | 53 | **[]** | 58,1° | **[]** | **[]**

c) | 32,5 | **[]** | **[]** | 12,7° | **[]**

d) | **[]** | 8 | 84,3° | **[]** | **[]**

e) | **[]** | 7,2 | **[]** | 12,72° | **[]**

f) | **[]** | 16 | **[]** | **[]** | 120

g) | 10,9 | **[]** | **[]** | **[]** | 54,6

-----

Hinweis zur Übungsaufgabe 5.097 g): Berechnen Sie zuerst die Höhe auf a \*h\_a!

-----

|Regelmäßige Vielecke|

5.098.)

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des regelmäßigen 5-, 10-, 100-, 1000- und 10000-Ecks, dessen umschriebener Kreis den Radius r =1 LE hat. Welchem Wert nähern sich die Flächeninhalte mit wachsender Eckenanzahl n an?

-----

b) Verallgemeinern Sie Ihre Überlegungen für den Flächeninhalt eines regelmäßiges n-Ecks:

Erstellen Sie eine Formel für den Flächeninhalt des regelmäßigen n-Ecks mit

dem Umkreisradius r =1 LE.

Ein regelmäßiges 100-Eck, das gar nicht mehr "eckig" aussieht.

-----

5.099.)

A, B

Wie 5.098, aber für den Umfang eines regelmäßigen n-Ecks.

-----

5.100.)

B, D

Regelmäßige Vielecke:

a) Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Umkreisradius r gemäß

A =n \*r^2 \*sin ((360°)/n)//2 berechnen lässt.

-----

b) Argumentieren Sie, wie sich der Flächeninhalt verändert, wenn der Radius verdoppelt wird.

-----

c) Untersuchen Sie, wie sich der Flächeninhalt verändert, wenn die Anzahl der Ecken von 4 auf 8 und von 8 auf 16 erhöht wird.

-----

5.101.)

B, D

GeoGebra liefert für ein regelmäßiges Siebeneck mit einer Seitenlänge von 1 cm einen Flächeninhalt von 3,63 cm^2.

Zeigen Sie, dass das der richtige Flächeninhalt ist.

-----

5.102.)

A, B

Der Flächeninhalteines regelmäßigen 8-, 10-, 12-, 15-, 18-Ecks beträgt 7200 cm^2.

Bestimmen Sie den Umfang des dem Vieleck umschriebenen Kreises.

-----

Zu Übungsaufgabe 5.102:

A\_(\d) =(a \*b \*sin('ga))/2

-----

GeoGebra macht das Zeichnen von regelmäßigen Vielecken sehr einfach:

Es hat ein eigenes Symbol "Regelmäßiges Vieleck" in der Symbolleiste, mit dem man über zwei Punkte und eine Zahl (eben die Anzahl der Ecken) regelmäß

ige Vielecke konstruieren lassen kann.

-----

Mit der Funktion Vieleck[] kann man in GeoGebra regelmäßige Vielecke erstellen. Das Siebeneck hat die Seitenlänge 1. Siebeneck =Vieleck[(0|0), (1|0), 7]

-----

j-144

|Grad- und Bogenmaß; Einheitskreis; Winkelfunktionswerte|

5.103.)

A, B

Zeichnen Sie jeweils den gegebenen Winkel und drücken Sie ihn im Bogenmaß aus.

a) 16,7°

b) 27°

c) 110,3°

d) 87,4°

-----

5.104.)

A, B

Drücken Sie den Winkel in Grad aus:

a) 0,01 rad

b) 1 rad

c) 8,5 rad

d) 10 rad

-----

5.105.)

A, B

Ermitteln Sie zeichnerisch mithilfe der Darstellung am Einheitskreis (Einheit 10 cm) und eines Winkelmessers die Funktionswerte sin('al), cos('al) und tan('al) für die folgenden Winkel:

a) 'al =28°

b) 'al =173°

c) 'al =200°

d) 'al =290°

-----

5.106.)

B, D

Berechnen und begründen Sie die Größe der drei Winkel 'al, 'be und 'ga der drei zugehörigen Kreissektoren in der Randspalte.

-----

5.107.)

C, D

Interpretieren und erklären Sie die Grafik mit den vier Kreissektoren jeweils hinsichtlich Winkel, Radius und Bogenlänge.

Vervollständigen Sie die Tabelle:

Kreissektot | 1 | 2 | 3 | 4

Winkel in ° | **[]** | **[]** | **[]** | **[]**

Bogenlänge | **[]** | **[]** | **[]** | **[]**

Bogenlänge/Radius | **[]** | **[]** | **[]** | **[]**

Winkel in rad | **[]** | **[]** | **[]** | **[]**

-----

5.108.)

A, B, C

Einheitskreis:

i) Stellen Sie zeichnerisch am Einheitskreis (Einheit 10 cm) die folgenden Kreisfunktionswerte dar.

-----

ii) Lesen Sie den (die) zugehörigen Winkel mithilfe eines Winkelmessers ab.

a) sin('al) =0,37

b) cos('al) =0,17

c) sin('al) =-0,48

d) cos('al) =-0,91

e) tan('al) =1,2

f) tan('al) =-3

-----

5.109.)

A, B, C

Ermitteln Sie zeichnerisch mithilfe der Darstellung am Einheitskreis (Einheit 10 cm) und eines Winkelmessers die Werte der drei Kreisfunktionen sin, cos und tan von

a) 10°, 20°, ..., 80°

b) 100°, 110°,..., 170°

-----

5.110.)

A, B, C

Ermitteln Sie grafisch durch Darstellung am Einheitskreis (Einheit 10 cm) jeweils die Werte der anderen beiden Kreisfunktionen für

a) sin('al) =0,3

b) cos('al) =0,7

c) tan('al) =1,2

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse rechnerisch.

-----

Verknüpfung:

Unterscheiden Sie zwischen Funktion und Funktionswert: sin(30°) ist der Funktionswert an der Stelle 30°, während sin die Funktion selbst ist.

(\*) sin(30°) Funktionswert

(\*) sin Funktion

-----

5.111.)

A, B

Ermitteln Sie für folgende im Gradmaß bzw. Bogenmaß gegebenen Winkel mithilfe eines Taschenrechners die Werte aller Winkelfunktionen. Schätzen Sie das Ergebnis jeweils vorher.

0,6° 0,6 rad 2° 2 rad 96,3°

'pi rad 185,2° 3 rad 280,05° ('pi)/2 rad

-----

5.112.)

A, B

Die angegebenen Werte sind aufzufassen als

a) Sinuswerte und

b) Kosinuswerte.

Ermitteln Sie in [0°; 360°] die zugehörigen Winkel im Gradmaß (jeweils zwei Lösungen).

0,6 0,4 -0,7 -0,1

-----

5.113.)

A, B

Die angegebenen Werte sind als Tangenswerte aufzufassen.

Ermitteln Sie in [0°; 360°] die zugehörigen Winkel im Gradmaß (jeweils zwei Lösungen).

0,17 -0,08 0,4 -4,58

-----

Hinweis: Für alle Übungsaufgaben empfehlen wir Ihnen, das in den Beispielen vorgestellte Verfahren - bekannte Größen färbig einzuzeichnen und die Schritte durchzunummerieren (Handlungskompetenz (C) Interpretieren und Dokumentieren) - anzuwenden.

j-145

5.114.)

A, B, C, D

Ermitteln Sie grafisch und rechnerisch die Winkel 'al 'el [0°; 360°] mit

a) sin('al) =0,15

b) sin('al) =0,25

c) cos('al) =0,11

d) cos('al) =0,21

e) tan('al) =1

f) tan('al) =2

Erklären Sie, warum die Gleichung jeweils zwei Lösungen hat.

Erklären Sie, wie diese zwei Lösungen Zusammenhängen.

-----

|Allgemeine Dreiecke und Vierecke|

5.115.)

A, B

Ermitteln Sie grafisch und rechnerisch die fehlenden Größen des allgemeinen Dreiecks

(Längenmaße in mm, A in mm^2).

... | a | b | c | 'al | 'be | 'ga | A

a) | 102 | 61 | **[]** | 67° | **[]** | **[]** | **[]**

b) | 232 | **[]** | 229 | **[]** | 15,2° | **[]** | **[]**

c) | 450 | 85 | 445 | **[]** | **[]** | **[]** | **[]**

d) | 102 | **[]** | **[]** | **[]** | 33,4° | 79,6° | **[]**

e) | 232 | **[]** | **[]** | 85,2° | **[]** | 79,6° | **[]**

f) | **[]** | 85 | 445 | **[]** | 10,9° | **[]** | **[]**

-----

Hinweis: Es ist immer erfreulich, wenn man mehrere Lösungsmöglichkeiten hat. Dadurch kann man die auf dem einen Weg ermittelte Lösung mit der anderen vergleichen und überprüfen.

-----

5.116.)

A, B

Berechnen Sie von einem Parallelogramm mit den Bestimmungsstücken a, b, e, f, 'al, 'be und A jeweils die fehlenden:

a) a =10,12 b =6,17 'al =74,17°

b) a =7,3 b =5,2 Euro =9,8

c) a =52,1 Euro =75,3 'al =65,2°

d) a =135 'al =81,2° A =16200

-----

5.117.)

A, B

Berechnen Sie von einem Trapez mit den Bestimmungsstücken

a, b, c, d, e, f, 'al, 'be, 'ga, 'de und A jeweils die fehlenden:

a)

b =6,7

e =8,5

f =8,1

'ga =109,8°

-----

b)

a =43,1

c =21,8

d =33,5

f =45,2

-----

c)

a =6,1

c =3,4

'al =65,3°

'be =71,2°

-----

d)

a =81,2

d =69,8

e =85,1

'be =69,2°

-----

5.118.)

A, B

Berechnen Sie von einem allgemeinen Viereck mit den Bestimmungsstücken

a, b, c, d, e, f, 'al, 'be, 'ga, 'de und A jeweils die fehlenden:

a)

a =41,2

'al =106,3°

'wi(BAC) ='al\_1 =54,2°

'be =101,7°

'wi(ABD) ='be\_1 =48,0°

-----

b)

a =4,62

b =6,91

'al =95,2°

'be =99,8°

'wi(ABD) ='be\_1 =39,7°

-----

c)

a =4,12

b =5,18

'al =109,7°

'be =112,3°

'ga =78,9°

-----

d)

a =65,1

b =58,3

'be =105,1°

'ga =60,5°

'de =88,7°

-----

|Vermessungsaufgaben|

5.119.)

A, B, C, D

Wien und Linz liegen etwa auf dem 48. Breitengrad und unterscheiden sich um 2 Längengrade.

Ermitteln Sie, wie groß die Entfernung Wien - Linz in Luftlinie ist.

Erdradius r ~~6370 km

-----

5.120.)

A, B

Von einem ebenen Grundstück von der Form eines allgemeinen Vierecks ABCD werden die Strecken

|AB| =44,9 m, |BC| =59,2 m und |AD| =53,7 m sowie die Winkel 'al ='wi(BAD) =141,45° und 'be ='wi(ABC) =92,25° ermittelt.

Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt dieses Grundstücks.

j-146

5.121.)

A, B

Vorwärtseinschneiden nach zwei Punkten: Um die Entfernung zweier unzugänglicher Punkte C und D berechnen zu können, wird eine Standlinie a =AB =200 m abgesteckt, von deren Endpunkten die Punkte C und D sichtbar sind. Nun werden die Horizontalwinkel

'al ='wi(BAD) =112,2°, 'al\_1 ='wi(BAC) =29,8°,

'be ='wi(ABC) =120,4° und 'be\_1 ='wi(ABD) =41,1° gemessen.

Ermitteln Sie grafisch und rechnerisch die Länge der Strecke |CD|.

-----

5.122.)

A, B

Um eine Strecke |AD| zu bestimmen, deren Endpunkte nicht zugänglich sind, wählt man auf |AD| einen Punkt C, von dem A und D sichtbar sind, sowie auß

erhalb der Strecke einen geeigneten Hilfspunkt B. Gemessen werden

|BC| =185 m, 'wi(BCA) ='ga =81,3°, 'wi(ABC) ='be =34,8° und 'wi(CBD) ='de =28,5°.

Berechnen Sie die Längen der Strecken |AD|, |AB| und |BD|.

-----

5.123.)

A, B, C, D

Ein Beobachter (Augenhöhe 1,6 m) will die Höhe eines Turmes bestimmen, zu dessen Fußpunkt er nicht gelangen kann. Er misst von den Endpunkten einer in der Richtung des Turms abgesteckten Standlinie von 40 m Länge die Höhenwinkel 'al =24,1° und 'be =38,3° zur Turmspitze.

a) Bestimmen Sie die Höhe des Turms.

b) Erklären Sie, was Sie bei Ihrer Skizze und Rechnung voraussetzen.

-----

5.124.)

A, B

Von einem Flugzeug werden zwei vor ihm liegende, mit ihm in einer Vertikalebene befindliche Orte gleicher Seehöhe unter den Tiefenwinkeln 'al =55,4° und 'be =68,8° angepeilt. Die Entfernung der Orte auf einer Karte vom Maßstab 1 : 10000 beträgt 4,5 cm.

Berechnen Sie die Höhe, in der sich das Flugzeug befindet.

-----

5.125.)

A, B, C, D

Ein 22 m hoher Turm befindet sich 65 m vom Ufer eines Flusses entfernt.

Von der Turmspitze aus erscheint er unter einem Winkel von 'al =12,6°.

a) Bestimmen Sie die Breite des Flusses an dieser Stelle.

-----

b) Erklären Sie, was Sie bei Ihrer Skizze und Rechnung voraussetzen.

-----

5.126.)

A, B

Helmut befindet sich in 100 m horizontaler Entfernung von einem Turm. Die Turmspitze erscheint ihm unter dem Höhenwinkel von 'al =13,6° und der Fußpunkt unter dem Tiefenwinkel von 'be =4,5°.

Berechnen Sie die Höhe des Turms.

-----

5.127.)

A, B

Bestimmen Sie, unter welchem Sehwinkel Kathrin ein 2,1 m hohes Bild erscheint, wenn ihr Auge vom unteren Ende 4,9 m und vom oberen Ende 6,2 m entfernt ist.

-----

5.128.)

A, B

Ein Haus und ein Mast stehen auf derselben Horizontalebene. Von einem 6 m über der Ebene liegenden Fenster des Hauses misst man gegen den Fußpunkt den

Tiefenwinkel 'be =l,4°und gegen die Spitze des Mastes den Höhenwinkel 'al =8,8°.

Berechnen Sie die Höhe des Mastes.

-----

5.129.)

A, B, D

Von der Plattform eines Turmes, von dem aus in gerader Richtung eine Straße führt, visiert man zwei 200 m voneinander entfernte Punkte auf der Straße unter den Tiefenwinkeln d =40,4° und 'be =10,6° an.

a) Berechnen Sie die Höhe des Turms.

b) Erklären Sie, was Sie bei Ihrer Skizze und Rechnung voraussetzen.

-----

5.130.)

A, B

Von einem 10 m über dem Boden befindlichen Fenster eines Hauses erscheint das diesseitige Ufer eines Sees unter einem Tiefenwinkel von 'al =35,7°, das jenseitige Ufer unter einem Tiefenwinkel von 'be =6,2°. Berechnen Sie, wie weit das Haus vom Seeufer entfernt ist und wie breit der See an dieser Stelle ist.

-----

5.131.)

A, B

Ein Kreuz auf der Spitze eines 53 m hohen Turmes erscheint in einer waag- rechten Entfernung von 100 m vom Fußpunkt des Turmes unter dem Sehwinkel von 0,54°.

Ermitteln Sie die Höhe des Kreuzes.

-----

Das Schönste, was wir erleben können, ist das Geheimnisvolle. Es ist das Grundgefühl, das an der Wiege von wahrer Kunst und Wissenschaft steht. Wer es nicht kennt und sich nicht wundern, nicht mehr staunen kann, der ist sozusagen tot und sein Auge erloschen.

Abb.: ALBERT EINSTEIN, 1879 BIS 1955, DEUTSCHER PHYSIKER

j-147

Die Philosophie ist geschrieben in jenem großen Buche, das immer vor unseren Augen liegt; aber wir können es nicht verstehen, wenn wir nicht zuerst die Sprache und die Zeichen lernen, in denen es geschrieben ist. Diese Sprache ist Mathematik, und die Zeichen sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren, ohne die es dem Menschen unmöglich ist, ein einziges Wort davon zu verstehen; ohne diese irrt man in einem dunklen Labyrinth herum.

GALILEO GALILEI, 1564 BIS 1642, ITAL. NATURWISSENSCHAFTER (AUS DEM "SAGGIATORE")

-----

Mona Lisa

Die Mona Lisa ist ein weltberühmtes Ölgemälde von Leonardo da Vinci. Das Bild ist 76,8 cm 'x 53 cm groß und hängt heute im Louvre in Paris.

-----

5.132.)

A, B

Fritz beobachtet von einem 8 m über dem Wasserspiegel befindlichen Fenster einen Hubschrauber unter dem Höhenwinkel von 'al =37,9° und das Spiegelbild des Hubschraubers im Wasser unter dem Tiefenwinkel von 'be =48,9°. Bestimmen

Sie, wie hoch der Hubschrauber über dem See fliegt.

-----

5.133.)

A, B

Von einem Beobachtungspunkt aus erscheint ein Bergrücken unter einem Höhenwinkel von 'al =10,3°. Theresia, die mit einem Fernrohr ausgerüstet ist, erwartet ein Flugzeug, das in gleichbleibender Höhe von 1000 m mit gleichbleibender Geschwindigkeit von 200 m pro Sekunde, hinter dem Bergrücken hervorkommend, über sie hinwegfliegt.

Berechnen Sie, unter welchem Höhenwinkel Theresia das Fernrohr einstellen muss, wenn das Flugzeug 6 Sekunden nach dem Auftauchen in das Gesichtsfeld des Fernrohres kommen soll.

-----

5.134.)

A, B

Mit einem Theodoliten, der

a) 12 m und

b) 13 m über dem ebenen Gelände steht, visiert man zwei in der Ebene liegende Punkte an, die mit dem Beobachtungspunkt in einer lotrechten Ebene liegen.

Der Tiefenwinkel zum näheren Messpunkt beträgt 'al =24,6° (42,8°), der Tiefenwinkel zum weiter entfernten Messpunkt 'be =18,4° (26,7°).

Ermitteln Sie, wie weit die Messpunkte voneinander entfernt sind.

(Angaben für b) jeweils in Klammer.)

-----

5.135.)

A, B

Von einem Beobachtungsort, der vom Aufstiegsplatz eines Ballons

a) 265 m und

b) 530 m entfernt ist, wird der genau senkrecht aufsteigende Ballon unter dem Höhenwinkel von 'al =37,2° (45,2°) und einige Zeit später unter dem Höhenwinkel 'be =72,3° (71,3°) gesehen.

Bestimmen Sie, um wie viel Meter der Ballon inzwischen gestiegen ist.

(Angaben für b) jeweils in Klammer.)

-----

5.136.)

A, B

Auf einem 234 m hohen Hügel steht ein Mast einer Hochspannungsleitung. Von einem Beobachtungspunkt in der Ebene erscheint der Mast unter einem Sehwinkel von 'al =2,6°. Der in die Horizontalebene des Beobachters projizierte Fußpunkt des Mastes ist auf einer Karte vom Maßstab 1 : 25000 5 mm entfernt.

Berechnen Sie die Höhe des Mastes.

-----

5.137.)

A, B

Mona Lisa von Leonardo Da Vinci:

a) Ermitteln Sie, unter welchem Sehwinkel Ihnen die 76,8 cm hohe lotrecht aufgehängte Mona Lisa von Leonardo Da Vinci erscheint, wenn Sie 2 m davor stehen und die untere Bildkante 1,6 m über Ihren Augen liegt.

-----

b) Bestimmen Sie, wie groß dieser Sehwinkel für eine Entfernung von 1 m bzw. 3 m ist.

Geben Sie dazu die Funktion s an, die zu jeder Entfernung x(>0) den zugehörigen Sehwinkel s(x) angibt und stellen Sie diese Funktion grafisch dar.

-----

5.138.)

A, B

Von einem 10 m über dem Spiegel eines Sees liegenden Punkt sieht man eine Kirchturmspitze unter einem Höhenwinkel von 'al =17,6°, ihr Spiegelbild im See unter einem Tiefenwinkel von 'be =52,6°.

Ermitteln Sie, wie hoch die Kirchturmspitze über dem Wasserspiegel liegt.

-----

5.139.)

A, B

Von einem Leuchtturm wird ein ruhender Ballon unter einem Höhenwinkel von 'al =17,2° gesehen. Sein Spiegelbild erscheint unter einem Tiefenwinkel von 'be =54,2°. Die Horizontalentfernung zwischen Ballonlot und Leuchtturm beträgt 250 m.

Berechnen Sie die Höhe des Ballons über dem Wasserspiegel.

-----

5.140.)

A, B

Entlang eines Flussufers wurde eine Standlinie von 150 m Länge abgesteckt. Von ihren Endpunkten werden die Winkel nach einem am anderen Ufer stehenden Mast gemessen: 'al =28,4° und 'be =56,8°.

Berechnen Sie die Breite des Flusses an dieser Stelle.

j-148

5.141.)

A, B, D

Hangneigungsmessung mit Skistöcken:

1. Zuerst legt man einen Skistock längs in den Schnee, so dass der liegende Stock einen Abdruck erzeugt.

-----

2. Der liegende Skistock wird nun aus dem Abdruck gehoben und am oberen Ende

des Abdrucks eingesteckt.

-----

3. Der zweite Skistock wird mit dem Griff an den aus dem Abdruck gehobenen ersten Skistockgriff gehalten und solange justiert, bis er senkrecht nach unten zeigt.

-----

4. Wenn der zweite Skistock eine senkrechte Position erreicht hat, wird seine Spitze in den Schnee gesteckt und mit dem liegenden Abdruck des ersten

Skistocks verglichen.

-----

Trifft der hängende, zweite Skistock unterhalb des Abdrucks des ersten Stocks auf die Schneeoberfläche, ist der Hang steiler als 30°, sonst flacher. Je weiter die Spitze des zweiten Stockes unterhalb des Abdrucks steckt, desto steiler ist der Hang:

Eine Grifflänge (ca. 10 cm) entsprechen ca. 3°.

a) Erklären Sie, warum der Hang 30° steil ist, wenn der pendelnde Stock das Ende des Griffabdrucks erreicht.

-----

b) Berechnen Sie die Hangneigung für eine Abweichung von 10 cm bei einer Stocklänge von 125 cm.

Vergleichen Sie mit den angegebenen 3° pro 10 cm.

-----

Tipp: 30° Hangneigung ist ein kritischer Winkel. Ab dieser Hangneigung steigt die Lawinengefahr (bei entsprechenden Bedingungen) stark an.

-----

|Aufgaben im Raum|

5.142.)

D

"Ein Dreieck, sagte sie [das Mädchen], habe nur auf einer Fläche hundertachtzig Grad Winkelsumme, auf einer Kugel aber nicht. Damit stehe und falle doch alles." (aus: D. Kehlmann: Die Vermessung der Welt.)

Erklären Sie anhand des Bildes in der Randspalte, dass das Mädchen recht hat.

-----

5.143.)

A, B, D

a) Skizzieren Sie einen Würfel (Grundfläche ABCD). Zeichnen Sie die Diagonale der Grundfläche AC und die Raumdiagonale AG ein.

Berechnen Sie den Winkel, den diese beiden Diagonalen miteinander einschließen.

-----

b) Zeichnen Sie die beiden Raumdiagonalen AG und BH ein.

Berechnen Sie den Winkel, den diese beiden Raumdiagonalen miteinander einschließen.

-----

c) Begründen Sie, warum diese Winkel für alle Würfel gleich, also unabhängig von der Seitenlänge des Würfels, sind.

-----

5.144.)

A, B

Die Cheopspyramide bei Gizeh (erbaut um 2500 v. Chr.) hat die Form einer quadratischen Pyramide.

Die ursprüngliche Lange der Basiskante betrug 230,3 m.

Der Neigungswinkel der Seitenfläche zur Basisfläche 'al =51,85°.

-----

Tipp:

Pyramide:

V =(G \*h)/3

O =G +M

G Grundfläche

M Mantel

h Höhe

-----

a) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

-----

b) Die Seitenflächen der Pyramide waren ursprünglich mit Marmor verkleidet. Berechnen Sie, wie viele Quadratmeter Marmor dazu nötig waren (ohne Verschnitt).

-----

c) Ermitteln Sie, wie groß der Winkel zwischen zwei diagonal gegenüberliegenden Seitenkanten an der Spitze der Pyramide ist.

-----

5.145.)

A, B

Ein Hafenmeister, der sich 50 m über Meeresniveau auf einem Hafenturm befindet, misst die Tiefenwinkel zu zwei Schiffen A und B im Hafen. Der Bug der Schiffes A erscheint unter einem Tiefenwinkel von 'al =8°. Nach einem Schwenk des Theodoliten um den Horizontalwinkel von 102° beträgt der Tiefenwinkel zum Bug des zweiten Schiffes B 'be =12°.

Berechnen Sie, wie weit die beiden Schiffe voneinander entfernt sind.

j-149

5.146.)

A, B

Von der Spitze eines 550 m hohen Berges sieht man den Kirchturm der Gemeinde A unter einem Tiefenwinkel von 34°. Schwenkt man das Fernrohr um den Horizontalwinkel von 93°, sieht man den Kirchturm der Gemeinde B unter dem Tiefenwinkel von 18°. Die beiden Kirchtürme stehen in derselben Horizontalebene.

Berechnen Sie die gegenseitige Entfernung der beiden Türme.

-----

5.147.)

A, B

Von der Spitze eines Berges sieht man den Kirchturm der Gemeinde A unter einem Tiefenwinkel von 30°. Schwenkt man das Fernrohr um den Horizontalwinkel von 120°, sieht man den Kirchturm der Gemeinde B unter dem Tiefenwinkel von 15°. Die beiden Kirchtürme stehen in derselben Horizontalebene und haben (laut Wanderkarte) eine gegenseitige Entfernung von 3,4 km.

Berechnen Sie die Höhe des Berges.

-----

|Winkelfunktionen und ihre Graphen, Reduktionsformeln|

5.148.)

B

Zeichnen Sie den Graphen folgender Funktion f im Intervall [0; 2'pi]:

a) f(x) =2 \*sin(x)

b) f(x) =0,5 \*sin(x)

c) f(x) =1 -sin(x)

d) f(x) =cos(x -1)

e) f(x) =sin(x) +cos(x)

f) f(x) =sin(x) -cos(x)

-----

5.149.)

B

Zeichnen Sie den Graphen folgender Funktion g im Intervall ]-('pi)/2; (3'pi)/2[

a) g(x) =3 \*tan(x)

b) g(x) =0,5 \*tan(x)

c) g(x) =1 +tan(x)

d) g(x) =tan(x -1)

e) g(x) =2 \*tan(x +1)

-----

5.150.)

C, D

Im Koordinatensystem sind die Graphen der drei Funktionen f, g und h mit

f(x) =cos(3x),

g(x) =2 \*cos(3x) und

h(x) =3 \*cos(2x) zu sehen.

* Beschriften Sie die drei Graphen.
* Begründen Sie Ihre Zuordnungen.
* Beschriften Sie die Skalierungsstriche auf den beiden Achsen.

Abb.: Mit der Funktion Funktion[f, a, b] wird in GeoGebra der Graph der Funktionen f nur im Intervall [a; b] gezeichnet.

Eingabe: g(x) =Funktion[f, 0, 2 'pi]

j-150

5.151.)

A, B

Durch Überlagerung trigonometrischer Funktionen können Funktionen, die in der Technik von großer Bedeutung sind, erzeugt werden.

Zeichnen Sie im Intervall [-2'pi; 2'pi] die Grafen der Funktionen f\_1, f\_2 und f\_3. Geben Sie die zugehörigen Funktionen f\_4 und f\_5 an. Schreiben Sie die Funktionsgleichung von f\_(50) mit dem Summenzeichen und zeichnen Sie f\_(50) mit einem CAS.

a)

f\_1(x) =sin(x)

f\_2(x) =sin(x +1/2) \*sin(2x)

f\_3(x) =sin(x +1/2) \*sin((2x) +1/3) \*sin(3x)

-----

b)

f\_1(x) =sin(x)

f\_2(x) =sin(x +1/3) \*sin(3x)

f\_3(x) =sin(x +1/3) \*sin((3x) +1/5) \*sin(5x)

-----

c)

f\_1(x) =cos(x)

f\_2(x) =cos(x +1/(3^2)) \*cos(3x)

f\_3(x) =cos(x +1/(3^2)) \*cos((3x) +1/(5^2)) \*cos(5x)

-----

Tipp:

Das Summensymbol 'Si:

a\_1 +a\_2 +a\_3 +... +a\_n ='Si[i =1;n](a\_i)

-----

5.152.)

B, C

In den beiden Grafiken und in der Tabelle in der Randspalte sind die Tageslängen für Linz im Jahr 2014 dargestellt.

a) Lesen Sie aus der Grafik die maximale Tageslänge für die eingezeichnete Kurve ab.

-----

b) Lesen Sie aus der Grafik die minimale Tageslänge ab.

-----

c) Berechnen Sie den Mittelwert aus maximaler und minimaler Tageslänge. Ermitteln Sie, welchem Wert der eingezeichneten Funktion dieser berechnete Wert entspricht.

-----

d) Lesen Sie aus dem Graphen der Funktion die Periodenlänge ab.

-----

Tageslänge für Linz im Jahr 2014:

Abkürzungen für die folgende Tabelle:

SA - Sonnenaufgang

SU - Sonnenuntergang

Datum | SA | SU | Tageslänge

01.12.2013 | 07:33 | 16:10 | 08:37

01.01.2014 | 07:53 | 16:19 | 08:25

01.02.2014 | 07:30 | 17:02 | 09:31

01.03.2014 | 06:43 | 17:47 | 11:04

01.04,2014 | 06:39 | 19:33 | 12:53

01.05.2014 | 05:42 | 20:16 | 14:34

01.05.2014 | 05:05 | 20:55 | 15:49

01.07.2014 | 05:06 | 21:07 | 16:01

01.08.2014 | 05:38 | 20:39 | 15:00

01.09.2014 | 06:21 | 19:44 | 13:23

01.10.2014 | 07:02 | 18:42 | 11:39

01.11.2014 | 06:49 | 16:43 | 09:54

01.12.2014 | 07:33 | 16:10 | 08:37

01.01.2015 | 07:53 | 16:19 | 08:25

Die Daten stammen von www.sunrise-and-sunset.com/de.

j-151

#### \*\*-4 - Ziele erreicht?

Z 5.1.)

A, C

Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck:

a) Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an:

**[]** t =r/(sin('rh))

**[]** t =r \*sin('rh)

**[]** sin('rh) =t/r

**[]** sin('rh) =r/t

**[]** t =(cos('si))/r

**[]** t =r \*cos('si)

**[]** cos('si) =r/t

**[]** cos('si) =t/s

-----

b) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von s, wenn 'rh und r bekannt sind.

-----

Z 5.2.)

A, D

Zeigen Sie, dass in einem Rechteck für jenen Winkel 'my, den die Diagonale f mit der Seite a einschließt, gilt:

b/(sin('my)) =a/(cos('my))

-----

Z 5.3.)

C

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an:

Aussage: genau zwei Seiten sind parallel

Raute: **[]**

Parallelogramm: **[]**

Deltoid: **[]**

Trapez: **[]**

-----

Aussage: jeweils zwei Seiten sind parallel

Raute: **[]**

Parallelogramm: **[]**

Deltoid: **[]**

Trapez: **[]**

-----

Aussage: Diagonalen stehen aufeinander normal

Raute: **[]**

Parallelogramm: **[]**

Deltoid: **[]**

Trapez: **[]**

-----

Aussage: Diagonalen halbieren einander

Raute: **[]**

Parallelogramm: **[]**

Deltoid: **[]**

Trapez: **[]**

-----

Z 5.4.)

A, B, C, D

Die Form einer rotationssymmetrischen Vase kann durch eine Zusammenstellung mehrerer geometrischer Körper beschrieben werden.

a) Beschreiben Sie, aus welchen geometrischen Figuren sich der Querschnitt der Vase zusammensetzt.

-----

b) Theo misst den Umfang U der Vase auf Höhe h und den Bodendurchmesser d.

Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Neigungswinkels 'al.

-----

Z 5.5.)

A, C, D

In der Skizze ist der Verlauf einer Gondelbahn von der Talstation T über die Mittelstation M bis zur Bergstation B dargestellt.

a) Erklären Sie, welche Größe durch die Formel a \*tan('al) +b \*tan('be) berechnet wird.

-----

b) Maria entnimmt einer Landkarte die Länge der Strecken zwischen Talstation und Mittelstation, sowie zwischen Mittelstation und Bergstation. Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Strecken für die Gondelbahn.

-----

c) Erstellen Sie mithilfe der Höhen h\_M und h\_B und den Winkeln 'al und 'be eine Formel für die von der Gondel zurückgelegte Strecke.

Erklären Sie, welche Größen gegeben sein müssten, um die Strecke ohne Winkelfunktionen berechnen zu können und erstellen Sie die entsprechende Formel.

-----

d) Es soll die Länge der Strecke TB berechnet werden.

Peter behauptet: |TB| :h\_B =|TM| /h\_M und daher |TB| =(|TM| /h\_B)/(h\_M)

Erklären Sie, welchen Fehler Peter bei dieser Überlegung macht.

j-152

Z 5.6.)

A, B

Eine Treppe wird so aus Steinquadern gebaut, dass die Stufen h cm hoch und t cm tief sind.

a) Zeichnen Sie eine passende Skizze und erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Neigungswinkels 'al einer direkt auf den Stufen aufliegenden Rollstuhlrampe.

-----

b) Die Treppe besteht insgesamt aus 10 Stufen mit h =10 cm und t =20 cm.

Berechnen Sie die Länge einer Rollstuhlrampe, die direkt auf die Stufen montiert wird.

-----

c) Eine Rollstuhlrampe überwindet bei einer Steigung von 12 % einen Höhenunterschied von einem halben Meter.

Berechnen Sie, über welche horizontale Distanz die Rampe verläuft.

-----

Z 5.7.)

A, C, D

a) Formulieren Sie einen passenden Angabetext zur Berechnung von F unter Angabe der restlichen eingezeichneten Größen.

-----

b) Erklären Sie anhand der Skizze, wie man F aus den gegebenen Größen berechnen kann.

-----

Z 5.8.)

A, B, C

Ein allgemeines Viereck hat die in der Randspalte dargestellte Form.

a) Zur Berechnung der Seite x wurde folgende Rechnung angestellt:

e^2 =m^2 +s^2

x ='w(e^2 +l^2 -2 \*e \*l \*cos('ep))

Beschriften Sie die zur Berechnung verwendeten Seiten und den Winkel 'ep in der Skizze, wenn m <s ist.

-----

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks für

|OP| =267 mm, |PQ| =312 mm, |PR| =277 mm und 'wi(RQP) =32°.

Runden Sie Ihr Ergebnis auf dm^2.

-----

Z 5.9.)

A, C

Erklären Sie mithilfe des Einheitskreises die Beziehung sin^2('al) +cos^

2('al) =1

j-153

## \*\*-2 - Lösungen

#### \*\*-4 - 1 Lineare Gleichungssysteme

-----

1.001.)

a) L ={(2 3/(13)|(17)/(26))}

b) L ={(5|3)}

c) L ={(22|11)}

d) L ={(4|2)}

e) L ={(2|5)}

f) L ={(8|-2)}

-----

1.002.)

a) L ={(-2|10)}

b) L ={(8/3|-7/3)}

-----

1.003.)

a) L ={(1,6|0,9)}

b) L ={(2|1)}

c) L ={(3|2)}

-----

1.004.)

a) L ={}

b) L ={(6|2)}

c) L ={(4|3)}

d) L ={(x|y) | 2x +3y =6}

-----

1.005.)

a) L ={}

b) L ={(3|4)}

c) L ={(x|y) | -x +y =1}

-----

1.006.)

a)

3x -y =-4

x +y =6

L ={(0,5|5,5)}

-----

b)

2x -y =-3

2x -y =1

L ={}

-----

c)

-0,5x +y =-1

0,5x +y =-1

L ={(0|-1)}

-----

d)

x -4y =-12

0,25x -y =-3

L ={(x|y) | x -4y =-12}

-----

1.007.)

a) unendlich viele Lösungen;

Gleichung (1) \*(-1) =Gleichung (2)

-----

b) genau eine Lösung, da die linken Seiten der Gleichungen nicht durch Multiplikation mit einem Faktor ineinander übergeführt werden können

-----

c) keine Lösung, da für die linken Seiten der Gleichungen gilt:

(1) \*0,5 =(2), für die rechten Seiten aber 9 \*0,5 \=4 ist

-----

d) genau eine Lösung; Argumentation wie in b)

-----

e) unendlich viele Lösungen, da Gleichung (1) \*5 =Gleichung (2)

-----

f) keine Lösung, da für die linken Seiten der Gleichungen gilt.

(1) /3 =(2), rechts aber 9 /3 \=27 ist

-----

1.008.)

a) (2) z. B. 2x +y =3

b) (2) z. B. 2x +y =4

c) (2) z. B. x +y =1

d) b =2

(2) 4x +2y =6

-----

e) a =2

(2) 2x +6y =3

-----

f) a \=1

z. B. (2) 5x +2y =2

-----

1.009.)

a) a =1, b =5

b) b =3, c \=4

c) a beliebig, b \=0,5

-----

1.010.)

a) Die Summe zweier Zahlen ist 80. Die eine ist 7-mal so groß wie die andere. Die Zahlen sind 10 und 70.

-----

b) Addiert man zum Doppelten der ersten Zahl das 5-fache der zweiten Zahl, erhält man 17.

Die Differenz der beiden Zahlen ist 5. Die Zahlen sind 6 und 1.

-----

c) Addiert man zu einer Zahl das Doppelte einer zweiten Zahl, erhält man 10. Subtrahiert man von der ersten Zahl die Hälfte der zweiten Zahl, erhält man 5. Die Zahlen lauten 6 und 2.

-----

1.011.)

Sietreffen einander gegen 13:41 Uhr. Helmut hat ca. 12,3 km und Klaus ca. 700 m zurückgelegt.

-----

1.012.)

Die beiden Fahrzeuge treffen einander um ca. 10:18 Uhr. Die Entfernung des Treffpunktes von Linz beträgt ca. 72,9 km.

-----

1.013.)

a)

s\_I(t) =10t

s\_M(t) =15 \*(t -0,25)

-----

b) Max holt Irene 30 Minuten nach seinem Start ein. Sie befinden sich zu diesem Zeitpunkt 9,5 km vom Ziel entfernt.

-----

1.014.)

Der Intercity holt den Güterzug um 11:46 Uhr, ca. 47 km von Salzburg entfernt ein.

Ankunft Intercity: 12:09 Uhr

-----

1.015.)

a) Durch die beiden Gleichungen x +y =40 und x +2y =66 kann die Anzahl der Ein- und Zweibettzimmer eindeutig ermittelt werden.

-----

b) 14 Ein- und 26 Zweibettzimmer

-----

1.016.)

10 dag Schinken kosten Euro 1,30; 10 dag Aufschnitt kosten Euro 0,85.

-----

1.017.)

E 14,00 Stundenlohn Maurer;

E 8,00 Stundenlohn Hilfsarbeiter

-----

1.018.)

3 kg

-----

1.019.)

0,3 kg

-----

1.020.)

E 270,00; Euro 230,00

-----

1.021.)

E 7,00; Euro 4,90

-----

1.022.)

GOP: Euro 6,00/kg; GFBOP: Euro 8,00/kg

j-154

1.023.)

5 und 7 Pfennige

-----

1.024.)

5 und 7 Säcke

-----

1.025.)

Grundgebühr: Euro 24,00;

Kosten pro kWh : Euro 0,16

-----

1.026.)

Unternehmen A: Grundgebühr Euro 3,00 und Euro 1,60/km

Unternehmen B: Grundgebühr Euro 1,80 und Euro 1,90/km

-----

1.027.)

K(x) =35x +550

-----

1.028.)

a) x Betrag am Sparkonto, y Betrag am Kapitalsparbuch

x +y =43500

x \*0,005 +y \*0,03 =1267,50

-----

b) x =E 1.500,00 und y =E 42.000,00

-----

1.029.)

a) Der Betrag am ersten Sparbuch ist geringer als jener am zweiten, da durch das Vertauschen der Zinssätze die Gesamtzinsen steigen.

-----

b) x Betrag am 1. Sparbuch, y Betrag am 2. Sparbuch

x \*0,02 +y \*0,015 =852,50

x \*0,015 +y \*0,02 =897,50

-----

c) x =E 20.500,00 und y =E 29.500,00 => Gesamtbetrag: Euro 50.000,00

-----

1.030.)

a) x Betrag am Kapitalsparbuch, y Betrag am Bonussparbuch

x \*0,03 +y \*0,02 =800

x \*1,03 \*0,03 +y \*1,02 \*0,025 =909,75

-----

b) x =E 15.000,00 und y =E 17.500,00

-----

1.031.)

Kaufpreis des Hauses: x, Kaufpreis des Gartens: y

x +y =185100

0,12x -0,05y =18421

-----

Das Haus kostete Euro 162.800,00; der Garten kostete Euro 22.300,00.

-----

1.032.)

s +b =1,1

s =b +1

-----

b +1 +b =1,1 2b =0,1 b =0,05

Der Ball kostet 5 Cent und der Schläger 1,05 Euro.

-----

Z 1.1.)

a) x =6; y =-4

b) x =3; y =11

c) x =9; y =16

-----

Z 1.2.)

a)

-3x +y =15

x -y =-25

Kontrolle: Schnittpunkt (5|30)

-----

b)

3/4x -y =2

-1/2x +y =-3

Kontrolle: Schnittpunkt (-4|-5)

-----

Z 1.3.)

a) b =12

b) b \=-8

c) b =-1/5

-----

Z 1.4.)

a) Preis für eine Flasche Mineralwasser: x, Preis für eine Flasche Limonade:

y

5x +2y =7,33

8x +4y =9,46 +3,3

-----

b) x =E 0,95; y =E 1,29

-----

Z 1.5.)

Betrag in Sparbuch 1: Euro 12.000,00

Betrag in Sparbuch 2: Euro 15.000,00

-----

Z 1.6.)

a) Fahrzeit Railjet: t\_1; Fahrzeit Personenzug: t\_2

108t\_1 +60t\_2 =75

t\_1 -0,5 =t\_2

-----

b) Die Züge treffen einander um ca. 14:03 Uhr, 7,5 km von Innsbruck entfernt.

j-155

#### \*\*-4 - 2 Matrizenrechnung

2.001.)

a) A ='mat([0; 849; 587; 655]

[849; 0; 395; 186]

[587; 395; 0; 445]

[655; 186; 445; 0]);

A ist eine symmetrische und quadratische 4 'x 4-Matrix

-----

b) a\_(42) =186;

Entfernung Wien - Graz in km

-----

c) a\_(43) +a\_(31) =1032;

Entfernung Wien - München - Berlin in km

-----

d) a\_(41) +a\_(12) +a\_(23) +a\_(31) +a\_(14) =3141

-----

2.002.)

a) a\_(51) =4; a\_(43) =2; a\_(25) =5; a\_(41) =3

b) 2; 1; 19

-----

2.003.)

a) 'va +'vb +'vc =(4|3|-8); 2 \*'va -3 \*'vb =(-4|9|4)

-----

b) 'va^T \*'vb =1; 'vb^T \*'vc =11

-----

c) t\_1 =1; t\_2 =2; t\_3 =-1

-----

2.004.)

a) 42000 Pkw; 29000 Lkw; 33000 Mr

-----

b) Erlös A +Erlös B +Erlös C +Erlös D =

=1752000000 +3016000000 +672000000 +3484000000 =8924000000

Gesamterlös (alle Preise in Euro)

-----

2.005.)

a) 5 \*(3|1|4|2) +5 \*(2|6|3|5) +10 \*(5|4|2|5) ='mat

([15 +10 +50]

[5 +30 +40]

[20 +15 +20]

[10 +15 +50]) =(75|75|55|75)

-----

b) (100|80|60|90) -(75|75|55|75) =(25|5|5|15)

-----

2.006.)

a) Zuordnungstabelle:

... | E\_1 | E\_2

R\_1 | 2 | 3

R\_2 | 1 | 2

R\_3 | 4 | 1

-----

b) zugehörige Matrix: 'mat

([2; 3]

[1; 2]

[4; 1])

-----

c) Für die Fertigung eines Endproduktes E\_1 werden 2 Einheiten des Rohstoffes R\_1, 1 Einheit des Rohstoffes R\_2 und 4 Einheiten des Rohstoffes R\_3 benötigt. Für die Fertigung eines Endproduktes E\_2 werden 3 Einheiten des Rohstoffes R\_1, 2 Einheiten des Rohstoffes R\_2 und 1 Einheit des Rohstoffes R\_3 benötigt.

-----

2.008.)

a) 4 R\_1 für 1 E\_1

-----

2.009.)

a) 'mat

([2; 2; 3]

[0; 4; 3]

[2; 1; 5])

-----

b) 'mat

([2; 2]

[1; 4]

[1; 1])

-----

c) 'mat

([2; 2; 3]

[0; 4; 3]

[2; 1; 5]) \*'mat

([2; 2]

[1; 4]

[1; 1]) ='mat

([9; 15]

[7; 19]

[10; 13])

-----

2.010.)

'mat

([1; 0; 0]

[1; -4; -1])

-----

2.011.)

'mat

([0; -3]

[-3; 6])

-----

2.012.)

a) (-24|1)

-----

b) 'mat

([-3; 10; 3; 7]

[-8; 8; -6; 14]

[0; 4; 3; 1])

-----

c) 'mat

([x -5y +2z]

[3y -2z]

[-3x +y -4z])

-----

d) 'mat

([2x\_1 +3x\_2 +x\_4]

[-3x\_1 +7x\_2 +2x\_3]

[x\_1 +x\_2 -x\_4]

[5x\_1 +7x\_2 +x\_3 -3x\_4])

-----

2.013.)

a) A +B ='mat

([1; 5]

[-1; 7])

-----

b) B -A ='mat

([-1; 1]

[3; 1])

-----

c) B \*C ='mat

([6; -9]

[6; -11])

-----

d) C \*B ='mat

([1; -2]

[-3; -6])

-----

2.014.)

a) 'mat

([7; 4]

[11; 12])

b) (11|20)

c) (11|20)

d) Es gilt das Distributivgesetz.

-----

2.015.)

B^T ='mat

([1; 3; -1]

[4; 2; 0])

-----

B \*B^T ='mat

([17; 11; -1]

[11; 13; -3]

[-1; -3; 1])

-----

B^T \*B ='mat

([11; 10]

[10; 20])

-----

2.016.)

A^T \*B^T ='mat

([-1; 1]

[0; 2]);

(B \*A)^T ='mat

([-1; 2]

[0; 2])

Die Aussage ist richtig.

-----

2.017.)

a) A^T \*B ='mat

([10; 10]

[1; 2]);

B \*A^T ='mat

([6; 4; 9]

[2; 3; 3]

[2; 3; 3])

-----

b) A \*B^T ='mat

([6; 2; 2]

[4; 3; 3]

[9; 3; 3])

B^T \*A ='mat

([10; 1]

[10; 2])

nicht kommutativ

j-156

2.018.)

a) A \*B ='mat

([1; 5; -5]

[3; 10; 0]

[2; 9; -7]);

B \*A ='mat

([29; -56; 27]

[17; -36; 19]

[14; -25; 11]); ungleich

-----

b) A^T \*B ='mat

([7; 17; 25]

[-15; -38; -48]

[8; 21; 23])

B^T \*A ='mat

([7; -15; 8]

[17; -38; 21]

[25; -48; 23]); ungleich

-----

2.019.)

a) A ='mat

([3; 15; 10; 30; 14]

[16; 12; 12; 24; 8]

[8; 5; 15; 20; 20]

[10; 8; 14; 10; 25]);

P =(3|2|1|2|3);

A \*P =(151|156|149|155)

-----

b) Gruppe B hat die größte Punktezahl (156).

-----

2.020.)

A ='mat

([20; 0; 30]

[30; 10; 20]); B ='mat

([2; 0; 1]

[3; 1; 0]

[1; 2; 1]

[0; 1; 0]);

B \*A^T ='mat

([70; 80]

[60; 100]

[50; 70]

[0; 10])

-----

... | 1. HJ | 2. HJ

Liter Farbe | 70 | 80

Glasscheiben | 60 | 100

Beschläge | 50 | 70

Schlösser | 0 | 10

-----

2.021.)

a) A ='mat

([3; 5]

[2; 1]

[1; 3]);

B ='mat

([10; 2; 6]

[2; 3; 5]);

A \*B ='mat

([40; 21; 43]

[22; 7; 17]

[16; 11; 21]);

-----

b) M =(10|3|2);

A \*B \*M =(549|275|235)

Es müssen 549 Glasscheiben, 275 Beschläge und 235 Liter Farbe bereitgestellt werden.

-----

2.022.)

a) A ='mat

([0,20; 0,28; 8,80; 13,00]

[0,18; 0,29; 8,40; 16,00])

B ='mat

([6; 6; 0,25; 0,3]

[10; 3; 0,50; 0,1])

-----

b) A \*B^T ='mat

([8,98; 8,54]

[9,72; 8,47])

Huber sollte bei B kaufen. Der kleinere Wert der 2. Spalte für Huber steht in der 2. Zeile (Kaufmann B).

Mayer sollte bei A kaufen. Der kleinere Wert der 1. Spalte für Mayer steht in der 1. Zeile (Kaufmann A).

-----

2.023.)

a) Zusammenhang zwischen Rohstoffen und Zwischenprodukten:

'mat

([4; 2; 1]

[3; 0; 1])

Zusammenhang zwischen Zwischenprodukten und Endprodukten:

'mat

([1; 3; 8]

[2; 0; 3]

[7; 4; 1])

-----

b) 'mat

([4; 2; 1]

[3; 0; 1]) \*'mat

([1; 3; 8]

[2; 0; 3]

[7; 4; 1]) ='mat

([15; 16; 39]

[10; 13; 25]);

Für 1 Endprodukt E\_1 benötigt man 15 Einheiten von R\_1.

-----

c) Die erste Zeile der Produktmatrix gibt an, wie viel Rohstoffe R\_1 für die drei Endprodukte E\_1, E\_2 und E\_3 benötigt werden.

Die zweite Zeile der Produktmatrix gibt an, wie viel Rohstoffe R\_2 für die drei Endprodukte E\_1, E\_2 und E\_3 benötigt werden.

-----

d) 'mat

([15; 16; 39]

[10; 13; 25]) \*(3|5|10) =(515|345)

-----

2.024.)

a) L ={(-3|0|2)}

-----

b) L ={'mat

([4,6 -0,6 \*z]

[-2,4 -1,4 \*z]

[z])}

-----

d) L ={'mat

([-0,76596 -x\_4]

[1 +0,89362 \*x\_4]

[-1 +0,17021 \*x\_4]

[x\_4])}

-----

2.025.)

a), e) und f) haben eine eindeutige Lösung, weil die Ergebnismatrix aus der Einheitsmatrix und dem Lösungsvektor besteht.

-----

b) und d) haben keine Lösung, weil die letzte Zeile zu einem Widerspruch führt: 0x +0y =1 bzw. 0x +0y +0z =1

-----

c) hat unendlich viel Lösungen, da die letzte Zeile für alle Paare in 'R 'x 'R erfüllt ist: 0x +0y =0.

j-157

a) L ={(5|3)}

b) L ={}

c) L ={(x|y) | x +1,5y =3}

d) L ={}

e) L ={(2|3|4)}

f) L ={(1|2|-3)}

-----

2.026.)

a) Für die Erzeugung eines Endproduktes Euro werden 5 Stück des Zwischenproduktes D benötigt.

-----

b) 'mat

([2; 4]

[2; 3]) \*'mat

([4; 3]

[5; 4]) ='mat

([28; 22]

[23; 18])

-----

c) 8600 A und 7050 B

-----

2.027.)

a) 'mat

([2; 3; 1]

[2; 1; 4])

-----

b) 'mat

([3; 4]

[3; 1]

[0; 2])

-----

c) 'mat

([15; 13]

[9; 17])

In der ersten Zeile steht der Bedarf am Rohstoff R\_1 für die beiden Endprodukte E\_1 und E\_2.

Die Summe der ersten Zeile (28) gibt die geforderte Menge des Rohstoffs R\_1 für die beiden Endprodukte an.

-----

d) 140 von Z\_1, 80 von Z\_2 und 40 von Z\_3

-----

2.029.)

Maschine A: 665 Minuten, Maschine B: 530 Minuten

-----

2.030.)

a) Im ersten Produktionsjahr wurden als Maximum von Produkt B in der Region West 4800 Stück produziert.

Im zweiten Produktionsjahr wurden als Maximum von Produkt B in der Region Ost 5000 Stück produziert.

-----

b) J\_1 +J\_2 ='mat

([4,7; 5,3; 5,5; 2,4]

[7,4; 8,1; 6; 8,5]

[7,3; 6,6; 8,2; 6,5])

Verkaufszahlen in den beiden Jahre zusammen

-----

c) Die zweite Zeile der Summenmatrix gibt die Verkaufszahlen des Produktes B in den beiden Produktionsjahren an: 7400 Stück in Nord, 8100 Stück in Ost, 6000 Stück in Süd und 8500 Stück in West.

-----

d) J\_2 -J\_1 ='mat

([1,7; 1,7; 0,5; 0,6]

[1,4; 1,9; 1; -1,1]

[0,5; -0,6; 0,8; 1,5])

Die Matrix gibt die Änderung der Verkaufszahlen vom 1. zum 2. Jahr an.

-----

e) Die dritte Spalte der Matrix gibt die Änderung der Verkaufszahlen vom 1. zum 2. Jahr in der Region Süd an.

-----

f) J\_2 -1,2 \*J\_1 ='mat

([1,4; 1,34; 0; 0,42]

[0,8; 1,28; 0,5; -2,06]

[-0,18; -1,32; 0,06; 1])

Die gewünschte Absatzsteigerung wurde größtenteils erreicht.

-----

2.031.)

Kohle AG: Euro 76.267,00; (Energie GmbH: Euro 77.070,00; Eisen und Co: Euro 76.970,00)

-----

2.032.)

a) Stahl: 151 ME, Holz: 396 ME, Glas: 282 ME, Isolation: 158 ME, Farbe: 209 ME, Arbeit: 397 ME

-----

b) 16619 GE

-----

c) Adria: 749 GE, Karibik: 883 GE, Marmara: 741 GE

-----

d) ca. 19575 GE

-----

2.033.)

a) Partei B: 0,3; Partei C: 0,3; Partei D: 0,7

-----

b) Wählerstrommatrix ='mat

([70,3; 0,2; 0,2; 0,3]

[0,3; 0,3; 0; 0,4]

[0,6; 0; 0,3; 0,1]

[0; 0; 0,3; 0,7])

-----

c) 5000, 6000, 12500 und 17500

-----

d) Partei A gewinnt als einzige Partei (5800 Stimmen).

j-158

2.034.)

b) Mengenbedarf für 50 Packungen Mandelölcreme, 100 Packungen Regenerationscreme und 50 Packungen Thymiancreme: Für diese Produktion benötigt man 4000 g Lanolin.

-----

c) Ja, es werden 875 g Bienenwachs für je 35 Stück benötigt.

-----

d) 20; 50; 30

-----

2.035.)

b) Aus der Gleichung

'mat

([0,2; 0,6; 0,1]

[0,3; 0,1; 0,3]

[0; 0,6; 0,1]) \*(200|150|130) +(y\_1|y\_2|y\_3) =(200|150|130) ergibt sich durch Umformern

-----

(y\_1|y\_2|y\_3) ='mat

([0,8; -0,6; -0,1]

[-0,3; 0,9; -0,3]

[0; -0,6; 0,9]) \*(200|150|130) =(57|36|27)

Es können 57 ME der Landwirtschaft, 36 ME der Industrie und 27 ME Dienstleistungen an den Markt abgegeben werden.

-----

c) Aus der Gleichung

'mat

([0,2; 0,6; 0,1]

[0,3; 0,1; 0,3]

[0; 0,6; 0,1]) \*(x\_1|x\_2|x\_3) +(135|135|45) =(x\_1|x\_2|x\_3) ergibt sich durch Umformen:

(x\_1|x\_2|x\_3) ='mat

([1,94; 1,85; 0,83]

[0,83; 2,22; 0,83]

[0,56; 1,48; 1,67]) \*(135|135|45) =(550|450|350)

Es müssen 550 ME der Landwirtschaft, 450 ME der Industrie und 350 ME Dienstleistungen produziert werden.

-----

Z 2.1.)

a)

**[x]** B -2 \*A

**[x]** A^T

**[]**B^(-1) Die Berechnung der Inversen von B ist nicht möglich, da B keine quadratische Matrix ist.

**[]** 2 \*C -3 \*D

2 \*C -3 \*D kann nicht berechnet werden, da 2 \*C eine 2 'x 2-Matrix und 3 \*D eine 2 'x 1-Matrix ist.

Die Subtraktion von Matrizen ist nur möglich, wenn beide dieselbe Dimension haben.

**[]** A \*C

Die Multiplikation A \*C ist nicht durchführbar, da die Spaltenanzahl von A nicht mit der Zeilenanzahl von C übereinstimmt.

2 'x 3 mal 2 'x 1 ist nicht möglich!

**[x]** C^(-1) \*D

-----

b) B -2 \*A ='mat

([-3; -5; 5]

[-7; -6; 11]),

A^T ='mat

([2; 2]

[0; 4]

[1; -5]),

C^(-1) \*D ='mat

([0,25; 0,25]

[0,5; -0,5]) \*(3|2) =(0,25|2,5)

-----

Z 2.2.)

Die Matrix B muss 3 Zeilen und 7 Spalten haben: 5 'x 3 mal 3 'x 7 ergibt 5 'x 7.

-----

Z 2.3.)

Die Lösung a) stimmt, da hier im Gegensatz zu b) die Spaltenbeschriftung der ersten Matrix (Rosa, Violett, Lila) mit der Zeilenbeschriftung der zweiten Matrix übereinstimmt.

Man benötigt 11,2 ME Rot, 5,2 ME Blau und 6,6 ME Weiß.

j-159

Z 2.4.)

'mat

([0,93; 0,05; 0,02]

[0,01; 0,99; 0]

[0,03; 0,05; 0,92])

Der Eigenbedarf der Filiale Kufstein (0,92) steht in diesem Fall in der 3. Zeile und 3. Spalte, also a\_(33).

-----

Z 2.5.)

a) 'mat

([1; 3; 2]

[2; -1; 3]

[1; 2; -1]) (x|y|z) =(1|-9|10)

-----

b)

'mat

([1; 3; 2]

[2; -1; 3]

[3; 2; -1])^(-1) \*(1|-9|10) =(1|2|-3)

-----

Z 2.6.)

a) 11 g Vitamin B

b) 762 g Füllstoff

-----

#### \*\*-4 - 3 Potenzen mit rationalen Exponenten und Potenzfunktionen

3.001.)

a) 'w(4) =2 da 2^2 =4

b) 'w(49) =7, da 7^2 =49

c) 'w(100) =10, da 10^2 =100

d) ^(3)'w(1000) =10, da 10^3 =1000

e) ^(3)'w(64) =4, da 4^3 =64

f) ^(3)'w(1/(37)) =1/3, da(1/3)^3 =1/(27)

g) ^(4)'w(16) =2, da 2^4 =16

h) ^(4)'w(0,0016) =1, da (1/5)^4 =0,0016

i) ^(5)'w(0,00001) =1/(10), da (1/(10))^5 =0,00001

j) ^(4)'w =0, da 0^4 =0

-----

3.002.)

Für die Wurzel aus -4 müsste gelten, dass das Quadrat dieser Zahl -4 ergibt.

Das Quadrat von reellen Zahlen ist aber immer größer oder gleich null.

-----

3.003.)

a) 4^(1/3)

b) 125^(1/3) =5

c) 16^(1/3) =2

d) 0,09^(1/2) =0,3

e) 0,16^(1/2) =0,4

f) (a +b^2)^(1/2)

g) (a^3)^(1/3) =a^(3/3) =a^1 =a

h) (x^2)^(1/7) =x^(2/7)

i) 'w((a^3)^(-1)) =((a^3)^(-1))^(1/2) =a^(-3/2)

-----

3.004.)

... | A | B | C

1 | a) | 1,41421356 | =WURZEL(2)

2 | b) | 1,25992105 | =2^(1/3)

3 | c) | 1,78179744 | =2^(5/6)

4 | d) | 0,25044169 | =(PI()/200)^(1/3)

-----

3.005.)

a) 5^(2/5)

b) 2^(2/3)

c) a^(5/6)

d) a

e) x +y

f) (x -y)^(2/3)

-----

3.006.)

a) a^(1/5)

b) b^(1/n)

c) a^(4/5)

d) c^(-1/3)

e) a^-(7/5)

f) (a^2 +b^2)^(1/3)

-----

3.007.)

a) ^(4)'w(2)

b) ^(5)'w(3)

c) ^(8)'w(9)

d) 'w(0,05)

e) ^(4)'w(3a +1)

f) (a^5)^(1/6) =^(6)'w(a^5)

g) (a^(-1))^(1/4) =^(4)'w(a^(-1)) =^(4)'w(1/a)

h) ^(5)'w((a +b)^(-1)) =^(5)'w(1/(a +b))

-----

3.008.)

a) ^(5)'w(4^2)

b) ^(4)'w(10^3)

c) ^(4)'w(x^3)

d) ^(7)'w(y^4)

e) ^(4)'w((2a -3)^3)

f) ^(3)'w((x -y)^2)

-----

3.009.)

a) ^(3)'w(8) =2

b) ^(4)'w(16) =2

c) ^(5)'w(32) =2

d) 'w(25) =5

e) ^(10)'w(1024) =2

f) ^(3)'w(8) =2

g) 1/('w(4)) =1/2

h) 0

i) 1

j) 1/('w(9)) =1/3

k) 16^(3/4) =^(4)'w(16^3) =8

l) - ^(3)'w(8) =-2

m) 1/2

n) ^(3)'w(0,008) =0,2

o) 16^(1/4) = ^(4)'w(16) =2

p) 36^(3/2) ='w(36^3) =216

q) 16^(-1/4) =1/( ^(4)'w(16)) =1/2

r) 0,001

s) 125

-----

3.010.)

a) ^(3)'w(a^2)

b) ^(8)'w(b^7)

c) 'w(c^9)

d) 'w(a +b)

e) 1/( ^(4)'w(x +y))

g) ^(n)'w((2a -3b)^2)

h) ^(n +2)'w((u +v)^(n +1))

i) 1/('w(a^3))

j) -'w(a^3)

k) 1/( ^(3)'w(a^2)) l) ^(3)'w((a +b)^2)

m) ^(4)'w(a^3)

n) 'w(a)

o) ^(6)'w(b^5)

p) 1/('w(x))

r) 1/( ^(5)'w(z))

s) 1/( ^(5)'w(a^6))

-----

3.011.)

a) x = ^(4)'w(c^3)

b) x = ^(12)'w(b)

c) x = ^(7)'w(a^5)

d) x ='w(a/(3'pi))

-----

3.012.)

a) 'w(3^2 \*4^2) ='w((3 \*4)^2) =3 \*4; richtig, da 'w(a^2 \*b^2) ='w((a \*b)^2) =a \*b

-----

b) 'w(3^2 +4^2) ='w(25) =5 \=3 +4; falsch, denn (a +b)^2 ergibt nicht a^2 +b^2, sondern a^2 +2ab +b^2

j-160

3.013.)

a) 'w(4 +2) ='w(4) \*'w(2) =2 \*'w(2)

b) ^(3)'w(2^3) =2

c) 'w(2 \*3 \*9) ='w(2 \*3) \*'w(9) =3 \*'w(6)

d) ^(3)'w(2 \*27) = ^(3)'w(2 \*3^3) = ^(3)'w(2) \* ^(3)'w(3^3) = ^(3)'w(2) \*3

e) ^(3)'w(3 \*8) = ^(3)'w(3) \* ^(3)'w(2^3) = ^(3)'w(3) \*2

f) ^(3)'w(3 \*2^6) = ^(3)'w(3) \* ^(3)'w(2^6) = ^(3)'w(3) \*2^2 = ^(3)'w(3) \*4

g) 3 \* ^(3)'w(3)

h) 2 \*'w(2)

i) 4 \* ^(3)'w(3)

j) 2/3 \* ^(3)'w(4/3)

k) 24 \*'w(5)

-----

3.014.)

a) a \*'w(a)

b) a \* ^(3)'w(a^2)

c) a \* ^(4)'w(a^3)

d) a^2 \* ^(3)'w(a^2)

e) a^9 \* ^(3)'w(a^2)

f) a^5 \*b^4 \* ^(5)'w(b)

g) x^4 \* ^(3)'w(x^2 \*y)

h) 3ab \* ^(3)'w(3a \*c^2 \*d)

-----

3.015.)

a) 'w(3^2 \*5) ='w(45)

b) ^(3)'w(3^3 \*5) = ^(3)'w(135)

c) ^(3)'w(3^6 \*5/(3^2)) = ^(3)'w(3^4 \*5) = ^(3)'w(405)

d) ^(4)'w((3^4 \*a^(12) \*(3b)/(a^(10))) = ^(4)'w(3^5 \*a^2 \*b)

e) 'w(75)

f) ^(3)'w(16)

g) 'w(4,5)

h) ^(4)'w(6)

i) ^(3)'w(a^4)

j) 'w(ax)

k) 'w(y/x)

l) ^(3)'w((4a)/3)

m) ^(3)'w((a^2b)/c)

n) 'w(16 -x^2)

-----

3.016.)

a) 6

b) 36

c) 2

d) 4

e) 5

f) 4/5 =0,8

-----

3.017.)

a) 'w(2)

b) 26 -5 \*w(5)

c) 21 \*'w(3) -20

d) 'w(6) -21

-----

3.018.)

a) a +2 \*'w(ab) +b

b) 14 +8 \*'w(3)

c) a -2 \*'w(ab) +b

d) 18 -8 \*'w(5)

e) 11 -4 \*'w(6)

f) 21 -6 \*'w(6)

g) a -b

-----

3.019.)

a) a \*'w(a) +3(a) \*'w(b) +3 \*'w(a) \*b +b \*'w(b)

b) 15 \*'w(3) +26

c) a \*'w(a) -3(a) \*'w(b) +3 \*'w(a) \*b -b \*'w(b)

d) 72 -32 \*'w(5)

e) 34 -'w(2) -27 \*'w(3)

f) 162 -'w(2) -132 -\*'w(3)

-----

3.020.)

a) ^(6)'w(x^5)

b) ^(6)'w(x)

c) ^(8)'w(a^5)

d) x \* ^(12)'w(x^5)

e) ^(p \*q)'w(a^(p +q))

f) ^(p \*q)'w(a^(q -p))

g) a^2

h) a \* ^(12)'w(a^(11))

i) ^(6)'w(a)

j) x^3

k) ^(15)'w(a^(13))

l) 'w(a)

m) a \* ^(15)'w(a)

n) ^)6)'w(ab)

-----

3.021.)

a) ^(4)'w(a)

b) 4

c) ^(3)'w(4)

d) ^(8)'w(2)

e) ^(3n)'w(a)

f) ^(2n)'w(a)

g) ^(6)'w(10)

h) ^(8)'w(3^7)

-----

3.022.)

a) ('w(6))/3

b) 6 \*'w(2)

c) (5 \*'w(3))/3

d) 1 +('w(6))/2

e) 3 \* ^(3)'w(2)

f) ( ^(3)'w(8))/2

g) (17 \* ^(3)'w(400))/(200)

h) 'w(7) -2

i) ('w(5))/3 \*('w(5) -'w(2))

j) 5 +3 \*'w(3)

-----

3.023.)

a) a^(4/3)

b) b^(3/2)

c) c^(3k)

d) ^(5)'w(x)

e) ^(3)'a

f) ^(4)'w(a^4)

g) a^3

h) ^(3)'w(a^2)

i) 'w(2) ~~1,414

j) a^4

k) b^3

l) ^(4)'w(x^3)

-----

3.024.)

a) x^(5/6)

b) x^(1/6)

c) x^(-1/6)

d) x^(-1)

e) x^(3/2)

f) x^(-5/2)

-----

3.025.)

a) v' ='w(2g \*2h) ='w(2) \*'w(2g \*h) ~~1,41 \*'w(2g \*h) =1,41 \*v

d. h., die Geschwindigkeit hat sich ca. um den Faktor 1,41, also um ca. 41 %

erhöht.

-----

b) 2 \*v =2 \*'w(2g \*h) ='w(2g \*4h), d. h., die Höhe muss vervierfacht werden.

-----

c) h =(v^2)/(2g)

-----

3.026.)

a) T' =2'pi \*'w((3 \*L)/g) ='w(3) \*2'pi \*'w(L/g) ~~1,73 \*2'pi \*'w(L/g) =1,73 \*T

d. h., die Schwingungsdauer nimmt ca. um den Faktor 1,73, also um ca. 73 % zu.

-----

b) 3 \*T =3 \*2'pi \*'w(L/g) =2'pi \*'w((p \*L)/g) d. h., die Länge muss verneunfacht werden.

-----

c) L =(g \*T^2)/(4'pi^2)

-----

3.027.)

a) e' =1,96 \*'w((p \*(1 -p))/(2 \*n)) =1/('w(2)) \*1,96 \*'w((p \*(1 -p))/(n)) ~~0,71 \*e

d. h., die Schwankungsbreite nimmt ca. um den Faktor 0,71 ab, also um ca. 29 %.

j-161

b) 1/2 \*e =1/2 \*1,96 \*'w((p \*(1 -p))/(n)) =1,96 \*'w((p \*(1 -p))/(4 \*n))

d. h., der Stichprobenumfang muss vervierfacht werden.

c) n =(1,96^2 \*p \*(1 -p))/(e^2)

-----

3.028.)

a) Y =A^(0,8) \*K^(0,2) =A^(4/5) \*K^(1/5) = ^(5)'w(A^4 \*K)

-----

b) Y = ^(5)'w((1,5 \*A)^4 \*K) = ^(5)'w(1,5^4) \* ^(5)'w(A^4 \*K) ~~1,38 \* ^(5)'w(A^4 \*K),

d. h., der Output steigt ca. um den Faktor 1,38, also um ca. 38 %.

-----

c) Y =1,25 \* ^(5)'w(A^4 \*K) = ^(5)'w(A^4 \*1,25^5 \*K) ~~ ^(5)'w(a^4 \*3,05 \*K),

d. h., der Kapitaleinsatz muss ca. verdreifacht werden.

-----

d) Y^5 =A^4 \*K

(Y^5)/K =A^4

A = ^(4)'w((Y^5)/K)

-----

3.029.)

a) Grundform

b) Streckung

c) Stauchung

d) Stauchung und Spiegelung an der x-Achse

e) Grundform

f) Stauchung

-----

3.030.)

a) Spiegelung an der x-Achse

b) Streckung

c) Stauchung

d) Stauchung und Spiegelung an der x-Achse

-----

3.031.)

a) y =1/2 \*x^(-1)

b) y =-1/2 \*x^4

c) y =x^(-3) =1/(x^3)

d) y =2x^(-1) =2/x

e) y =1/2 \*x^2

f) y =1/2 \*x^(-2)

g) y =-1/2 \*x^3

h) y =-x^(-3)

i) y =2x^(-3) =2/(x^3)

-----

Z 3.1.)

Wurzelschreibweise | Potenzschreibweise

^(3)'w(a^2) | a^(2/3)

1/( ^(4)'wx) | x^(-1/4)

4 \* ^(5)'w(y^2) | 4y^(2/5)

3 \*'w(a^2 +b^2) | 3 \*(a^2 +b^2)^(1/2)

- ^(5)'w(x^3) | -x^(3/5)

-----

Z 3.2.)

a) ^(3)'w(a) \*'w(a) =a^(1/3) \*a^(1/2) =a^(2/6 +3/6) =a^(5/6) = ^(6)'w(a^5)

-----

b) (- ^(4)'w(x^3))^2 =(-x^(3/4))^2 =x^(3/2) ='w(x^3)

-----

c) ( ^(4)'w(25x))/('w()5) =( ^(4)'w(25) \* ^(4)'w(x))/('w(5)) =

=( ^(4)'w(5^2) \* ^(4)'w(x))/('w(5)) =('w(5) \* ^(4)'w(x))/('w(5)) = ^(4)'w(x)

-----

d) ^(3)'w(x) +2 \* ^(3)'w(2y) -1/2 \* ^(3)'w(x) =1/2 \* ^(3)'w(x) +2 \* ^(3)'w(2y)

-----

Z 3.3.)

a) richtig, da ('w(8a))/('w(2a)) ='w((8a)/(2a)) ='w(4) =2

-----

b) richtig, da 1/('w(a)) =(1 \*'w(a))/('w(a) \*'w(a)) =('w(a))/a

-----

c) falsch, da (a -b)^2 =a^2 -2ab +b^2

-----

d) richtig, da 4 \*'w(x/2) ='w((16 \*x)/2) ='w(8x) ='w(4 \*2 \*x) =2 \*'w(2x)

j-162

Z 3.4.)

a) r = ^(3)'w(3/(4'pi) \*V)

-----

b) für V =(32)/3 'pi dm^3 ergibt sich: r =2 dm

-----

c) r = ^(3)'w(3/(4'pi) \*2V) = ^(3)'w2 = ^(3)'w(3/(4'pi) \*V) ~~1,26... \* ^(3)'w(3/(4'pi) \*V)

Der Radius wurde ca. um den Faktor 1,26, also um ca. 26 % vergrößert.

-----

d) r = ^(3)'w(3/(4'pi) \*1/2 V) = ^(3)'w(1/2) = ^(3)'w(3/(4'pi) \*V) ~~9,79... \* ^(3)'w(3/(4'pi) \*V)

Der Radius wurde ca. um den Faktor 0,79, also um ca. 21 % verkleinert.

-----

Z 3.5.)

a)

n >0: B, C

n <0: A, D

-----

b) B und D. Für gerade Hochzahlen sind für alle x der Definitionsmenge die Funktionswerte von x und -x gleich und deshalb die Graphen symmetrisch zur y-Achse.

-----

c) D

-----

d) Da f(1) =c, muss c den Wert-0,5 haben.

-----

#### \*\*-4 - 4 Gleichungen höheren Grades und Polynomfunktionen

4.001.)

a) Die Grundparabel wird bei f\_1 um den Faktor 1/4 in y-Richtung gestaucht, bei f\_2 um den Faktor 1/2 in y-Richtung gestaucht und an der x-Achse gespiegelt, bei f\_3 um den Faktor 2 in y-Richtung gestreckt und an

der x-Achse gespiegelt.

-----

b) Die Grundparabel wird bei g\_1 um 1 entlang der y-Achse nach unten verschoben, bei g\_2 um den Faktor 1/2 in y-Richtung gestaucht und um 1 in y-Richtung nach oben verschoben, bei g\_3 um den Faktor 2 gestreckt und an der x-Achse gespiegelt sowie um 3 nach oben verschoben.

-----

c) Die Grundparabel wird bei h\_1 um 3 in x-Richtung nach links verschoben, bei h\_2 um 1 in x-Richtung nach rechts verschoben und in y-Richtung um den Faktor 2 gestreckt, bei h\_3 um 2 in x-Richtung nach rechts verschoben, um den Faktor 1/2 in y-Richtung gestaucht und an der x-Achse gespiegelt.

-----

d) Die Grundparabel wird bei i\_1 um 1 in x-Richtung nach rechts und in y-Richtung um 2 nach unten verschoben, bei i\_2 an der x-Achse gespiegelt, um 2 in x-Richtung nach links und um 1 in y-Richtung nach oben verschoben, bei i\_3 um den Faktor 1/2 in y-Richtung gestaucht, um 3 in x-Richtung nach rechts und um 1 in y-Richtung nach unten verschoben.

-----

4.002.)

f\_1(x) =x^2 -5;

f\_2(x) =(x +4)^2;

f\_3(x) =(x -3)^2 -2;

f\_4(x) =-(x -1)^2 +5

-----

4.003.)

A: f\_2, da Scheitel S(-4|-4) und um den Faktor 2 in y-Richtung gestreckt

B: f\_4, da Scheitel S(4|4) und um den Faktor 1/2 in y-Richtung gestaucht und an der x-Achse gespiegelt

C: f\_3, da Scheitel S(2|-1) und an der x-Achse gespiegelt

D: f\_1, da Scheitel S(2|-1) und in y-Richtung um den Faktor 1/2 gestaucht

-----

4.004.)

Abbildung 1, da: a >0 bedeutet, dass die Parabel nach oben geöffnet ist.

c <0 bedeutet, dass die Parabel die y-Achse im negativen Bereich schneidet.

-----

4.005.)

a) y =(x -3)^2 -1; S(3|-1)

b) y =(x -3)^2; S(3|0)

c) y =(x -3)^2 +1; S(3|1)

d) y =(x +1)^2 -1; S(-1|-1)

e) y =(x +1)^2; S(-1|0)

f) y =(x +1)^2 +1; S(-1|1)

g) y =(x -3/2)^2 -5/4; S(3/2|-5/4)

h) y =(x -1/2)^2 +7/4; S(1/2)|7/4)

i) y =(x +5/2)^2 -1/4; S(5/2|-1/4)

j) y =(x -2)^2 +4; S(2|4)

k) y =2 \*(x +3/4)^2 -1/8; S(-3/4|-1/8)

l) y =1/2 \*(x +1)^2 +1/2; S(-1|1/2)

-----

4.006.)

a) y =0,5x^2 +0,5x

b) y =2x^2 -2x +1

c) y =-1/4 \*x^2 +x +4

d) y =0,2x^2 -x +30

-----

4.007.)

a) Der Koeffizient a ist negativ, da die Parabel nach unten geöffnet ist.

-----

b) Der Koeffizient a ist positiv, da die Parabel nach oben geöffnet ist.

-----

4.008.)

a) y =-1/8 \*(x -4)^2 +3

b) y =-0,04 \*(x -5)^2 +4

c) y =3 \*(x -4)^2 +1

d) y =0,05 \*(x +8)^2 -2

-----

4.009.)

a) S(60|40); y =a \*(x -60)^2 +40. Die Parabel geht durch den Ursprung:

0 =a \*(0 -60)^2 +40; a =-1/(90); h(x) =-1/(90) \*(x -60)^2 +40

j-163

4.009.)

b) Länge der Brückenstützen:

L(x) =40 -h(x)

L(0) =40

L(20) =40 -h(20) =17,78

L(40) =40 -h(40) =4,44

Die Brückenstützen haben die Längen 40 m, 17,78 m und 4,44 m.

-----

4.010.)

Der Brückenbogen kann wegen der Symmetrie durch die Funktionsgleichung y =ax^2 +c beschrieben werden, wobei c =92.

Durch Einsetzen der Koordinaten eines weiteren Punktes B\_2(123,5|27) kann a ermittelt werden:

27 =a \*123,5^2 +92; a =-0,00426.

Funktionsgleichung: y =-0,00426x^2 +92

-----

4.011.)

h(x) =-0,005x^2 +0,4x

-----

4.012.)

h(x) =-3,2x^2 +3,2x

-----

4.013.)

a) v =(72)/(3,6) m/s =20 m/s

32 =(20^2)/(2a)

a =(20^2)/(2 \*32) =6,25

Die Bremsverzögerung beträgt 6,25 m/s^2.

-----

b)

(1) s =((2v)^2)/2a) =4 \*(v^2)/(2a)

Der Bremsweg vervierfacht sich.

(2) s =(v^2)/(2 \*(a/2)) =2 \*(v^2)/(2a)

Der Bremsweg verdoppelt sich.

-----

c) s(v) =(v/(10))^2

d) s =((72)/((10))^2 =51,84

Der Bremsweg beträgt ca. 52 m.

a =(20^2)(2 \*51,84) ~~3,858

Die Bremsverzögerung beträgt ca. 3,86 m/s^2.

-----

4.014.)

a)

(1) ca. 10 m;

(2) ca. 54 m;

(3) ca. 180 m

-----

b) Susis Vater hat nicht recht. Wenn er statt mit 20 km/h mit 40 km/h fährt, wird der Anhalteweg zwar um 20 m länger, fährt er aber statt mit 120 km/h mit 140 km/h, dann wird der Anhalteweg um ca. 60 m länger.

-----

4.015.)

K(v) =0,0005v^2 -0,04v +6,5

Beachten Sie. Die Funktion beschreibt den Kraftstoffverbrauch sinnvoll im Bereich der angegeben Geschwindigkeiten.

-----

4.016.)

a) quadratische Parabeln ...

b) ca. 6 l/100 km

c) zw. 80 km/h und 85 km/h

-----

4.017.)

a) mittlere Kostenänderung im Produktionsintervall [0; 10]:

('De K)/('De x) =(130 -20)/(10 -0) =(110)/(10) =11

-----

mittlere Kostenänderung im Produktionsintervall [10; 20]:

('De K)/('De x) =(340 -130)/(20 -10) =(210)/(10) =21

Da im Produktionsintervall [0; 10] die Kosten im Mittel um 11 GE/ME steigen, im Produktionsintervall [10; 20] im Mittel um 21 GE/ME steigen, steigen die Kosten nicht linear.

-----

b)

K(0) =20 20 =c

K(10) =130 130 =a \*10^2 +b \*10 +c

K(20) =340 340 =a \*20^2 +b \*20 +c

K(x) =(x^2)/2 +6x +20

-----

4.018.)

a) L ={-12; 12}

b) L ={-2; 2}

c) L ={0}

d) L ={-3; 3}

e) L ={0}

f) L ={-0,9; 0,9}

g) L ={-4; 4}

h) L ={0}

-----

4.019.)

Die Gleichung x^2 =a hat die Lösungen -'w(a) und 'w(a).

Für a >0 erhält man zwei reelle Lösungen, für a =0 eine Lösung, für a <0 keine reelle Lösung.

-----

4.020.)

a) L ={0; 3}

b) L ={0; 5}

c) L ={0; -1/4}

d) L ={0; -1/2}

e) L ={0; -1/4}

f) L ={0; -2/3}

g) L ={0; -1/6}

h) L ={0; 10}

j-164

4.021.)

Max hat nicht richtig gerechnet. Bei der Division durch x muss x \=0 vorausgesetzt werden.

Max muss auch den Fall x =0 untersuchen; für x =0 ist die Gleichung auch erfüllt.

L ={0; 5}

-----

4.022.)

a) x^2 +4x +4 =(x +2)^2

b) x^2 -6x +9 =(x -3)^2

c) z^2 +5z +(25)/4 =(x +5/2)^2

d) u^2 -3u +9/4 =(u -3/2)^2

e) t^2 -9t +(81)/4 =(t -9/2)^2

f) s^2 -2,2 \*s +1,21 =(s -1,1)^2

-----

4.023.)

a) L ={-5; 1}

b) L ={-1; 3}

c) L ={-1; 6}

d) L ={-2; -1}

e) L ={-2}

f) L ={}

-----

4.024.)

a) L ={-4; 1}

b) L ={-3; 1}

c) L ={-5; 1}

d) L ={-5; 3}

e) L ={1; 3}

f) L ={-2; 10}

g) L ={-9; 3}

h) L ={-2; 1}

i) L ={-10; 5}

j) L ={1/3; 5}

k) L ={-2; 4/7}

l) L ={-10; 5}

-----

4.025.)

a)

(1) x\_1 =0; x\_2 =2

(2) x\_1 =x\_2 =1

(3) keine

-----

b)

(1) x\_1 =-0,5; x\_2 =1,5

(2) x\_1 =x\_2 =0,5

(3) keine

-----

c)

(1) x\_1 =-1; x\_2 =3

(2) x\_1 =x\_2 =2

(3) keine

-----

4.026.)

a) x\_1 =2 -'w(3); x\_2 =2 +'w(3)

b) x\_1 =(5 -'w(7))/3; x\_2 =(5 +'w(7))/3

c) x\_1 =4 -'w(6); x\_2 =4 +'w(6)

-----

4.027.)

a) -3/2; 1

b) -4; 5

c) -0,2; -4,5

d) 2/9; 5

e) -1/3; 1/6

f) (3 -'w(2))/8; (3 +'w(2))/8

g) -'w(2); -3 \*'w(2)

h) keine

-----

4.028.)

a) D ='R \ {0}; L ={-1; 3}

b) D ='R \ {0}; L ={6 -3 \*'w(2); 6 +3 \*'w(5)}

c) D ='R \ {0}; L ={5 -'w(15); 5 +'w(15)}

d) D ='R \ {4}; L ={6; 12}

e) D ='R \ {0; 1}; L ={0,5; 6}

-----

4.029.)

a) (25)/4

b) -9/4

c) -1/5

-----

4.030.)

a) -(29)/4

b) -(65)/8

-----

4.031.)

Alex hat nicht recht.

Eine quadratische Gleichung hat mindestens eine Lösung, wenn D =b^2 -4a >=0.

Beispiel für eine quadratische Gleichung ohne reelle Lösung:

x^2 -2x +4 =0 (D =4 -4 \*4 <0)

-----

4.032.)

a) 0 =x \*(-0,04x +0,8); x =0 oder x =20

Die Spannweite beträgt 20 m.

-----

b) h(x) =-0,04 \*(x^2 -20x +100) +4 =-0,04 \*(x -10)^2 +4 Scheitel S(10|4).

Die maximale Höhe beträgt 4 m.

-----

4.033.)

a) h(0) =2,1.

Die Abstoßhöhe beträgt 2,1 m.

-----

b) 0 =-0,06x^2 +0,9x +2,1; x\_1 =-2,05; x\_2 =17,05

Die Wurfweite beträgt 17,05 m.

-----

c) h(x) =-0,06 \*(x^2 -15x +7,52) +0,06 \*7,52 +2,1 =-0,06 \*(x -7,5)^2 +5,475

Scheitel S(7,5|5,475).

Die maximale Höhe beträgt 5,475 m.

-----

4.034.)

a) 0 =-(10)/3 \*x \*(x -1,2); x =0 oder x =1,2.

Die Spritzweite beträgt 1,2 m.

-----

b) h(x) =-(10)/3 \*(x^2 -1,2x +0,6^2) +(10)/3 \*0,6^2 =-(10)/3 \*(x -0,6)^2 +1,2

Scheitel S(0,6|1,2). Die maximale Höhe beträgt 1,2 m.

j-165

4.035.)

a) h(0) =50. Der Stein wird von einer Höhe von 50 m losgelassen.

-----

b) 0 =50 -5t^2; t\_1 ~~ -3,16; t\_2 ~~3,16

Der Stein schlägt nach 3,16 s auf dem Boden auf.

-----

4.036.)

b)

(1) 6,25 l/100 km

(2) 8 l/100 km

-----

c) 15,5 km/h bzw. 64,5 km/h

-----

d) 40 km/h

-----

4.037.)

a) K(10) =130; Die Kosten betragen 130 GE.

b) 244 =(x^2)/2 +6x +20

x\_1 =16; (x\_2 =-28 \'el D)

Bei der Produktion von 16 ME betragen die Kosten 244 GE.

-----

4.038.)

a) E(x) =11x; G(x) -0,1x^2 +5x -40

b) 0 =-0,1x^2 +5x -40; x\_1 =10 ME; x\_2 =40 ME

-----

4.039.)

a) E(x) =p(x) \*x =-1,5x^2 +150x

b)

(1) 0 ME; 100 ME

(2) 20 ME; 80 ME

-----

4.040.)

a) G(x) =E(x) -K(x) -2x^2 +168x -2470

b) 19 ME; 65 ME

-----

4.041.)

a) mittlerer Kostenzuwachs für das Produktionsintervall [10; 100]:

('De K)/('De x) =(20500 -1600)/(100 -10) =210

für [100; 120]: ('De K)/('De x) =(26900 -20500)/(120 -100) =320

Im Produktionsintervall [10; 100] beträgt der mittlere Kostenzuwachs Euro 210,00/t.

Im Produktionsintervall [100; 120] beträgt der mittlere Kostenzuwachs Euro 320,00/t.

Da die mittleren Kostenzuwächse nicht gleich sind, steigen die Kosten nicht linear.

-----

b) K(x) =x^2 +100x +500

c) Die Fixkosten betragen Euro 500,00.

d) K(x) =200x +500

e) Die variablen Kosten betragen Euro 200,00/t.

-----

4.042.)

a) Die Funktionsgleichung von f beschreibt eine Parabel, die durch den Ursprung geht.

f eignet sich für den Graphen 1.

Die Funktionsgleichung von g beschreibt eine zur y-Achse symmetrische Parabel, g eignet sich für den Graphen 2.

-----

b) S(0,25|0,4): 0,4 =0,25^2 \*a +0,25 \*b

N(0,510): 0 =0,5^2 \*a +0,5 \*b

a =-6,4; b =3,2; f(x) =-6,4 \*x^2 +3,2 \*x

-----

c) S(0|0,4): 0,4 =c

N(0,25|0): 0 =0,25^2 \*a +0,4

a =-6,4; g(x) =-6,4 \*x^2 +0,4

-----

4.043.)

a) v\_0 ='w(2 \*g \*H)

b) v\_0 ='w(2 \*10 \*5) =10

Die Abwurfgeschwindigkeit beträgt 10 m/s.

c) H =(8^2)/(20) =3,20

Die maximale Steighöhe beträgt 3,2 m.

d) H' =((2 \*v\_0)^2)/(2g) =4 \*(v\_0)^2)/(2g)

d. h., die maximale Steighöhe nimmt um das Vierfache zu.

-----

4.044.)

a) V =a^2 \*h mit a =(x -6) und h =3

V(x) =(x -6)^2 \*3 bzw. V(x) =3x^2 -36x +108

-----

b) 3x^2 -36x +108 =300

3x^2 -36x -192 =0

x\_1 =16 (x\_2 =-4 \'el D)

Die Seitenlange beträgt 16 cm.

j-166

4.045.)

b) A(-1,28|2,28); B(0,78|0,22)

-----

4.046.)

a) A(0|-2); B(2|2)

b) f(x) =x^2 -2; g(x) =2x -2

c) x^2 -2 =2x -2

d) z. B.: y =2x -4

-----

4.047.)

Lieber Logan! Du musst die Funktionsterme gleichsetzen, die Gleichung lösen und dann die zugehörigen y-Werte berechnen.

-----

4.048.)

a) K(X) =1,5x^2 +150x +5000

-----

b) E(x) =450x

G(x) =E(x) -K(x) =-1,5x^2 +300x -5000

-----

c) K(x) =E(x)

1,5x^2 +150x +5000 =450x

x\_1 ~~18; x\_2 ~~182

-----

d) Verlust, wenn weniger als 20 Stück verkauft;

Gewinn zwischen 20 und ca. 167 verkauften E-Bikes, darüber Verlust

-----

4.049.)

a) 2,5 Meter; ca. (90|-50)

-----

b) horizontale Entfernung 89,6 m; vertikale Entfernung 51,3 m

-----

c) w ='w(48,8^2 +89,6^2) ~~102; Die Sprungweite beträgt ca. 102 m.

-----

4.050.)

a) -4; 3

b) -1; -3

c) 3; 6

d) -3; 4

e) 1; 36

f) 4; -7

g) 5; 14

h) -8; 13

-----

4.051.)

a) q -5; x\_2 =1

b) p =1; x\_2 =-2

c) b =-11/2; x\_2 =3/4

-----

4.052.)

a) x^2 -4x +3 =0

b) x^2 -14x +45 =0

c) x^2 -5x -14 =0

d) x^2 -2x -15 =0

e) x^2 +4x +3 =0

f) x^2 +x -3/4 =0

g) x^2 +2x +1 =0

h) x^2 -6x +9 =0

i) x^2 +(10)/3 x +(25)/9 =0

-----

4.053.)

... | Gleichung | p | q | x\_1 | x\_2 | x\_1 +x\_2 | x\_1 \*x\_2 | Zerlegung in Linerfaktoren

a) | x^2 -6x +5 =0 | -6 | 5 | 1 | 5 | 6 | 5 | (x -1) \*(x -5) =0

b) | x^2 +5x +6 =0 | 5 | 6 | -3 | -2 | -5 | 6 | (x +3) \*(x +2) =0

c) | x^2 +2x -8 =0 | 2 | -8 | -4 | 2 | -2 | -8 | (x +4) \*(x -2) =0

d) | x^2 -3x -4 =0 | -3 | -4 | -1 | 4 | 3 | -4 | (x +1) \*(x -4) =0

e) | x^2 -8x +12 =0 | -8 | 12 | 2 | 6 | 8 | 12 | (x -2) \*(x -6) =0

f) | x^2 -4x =0 | -4 | 0 | 0 | 4 | 4 | 0 | x \*(x -4) =0

g) | x^2 +6x +9 =0 | 6 | 9 | -3 | -3 | -6 | 9 | (x +3) \*(x +3) =0

h) | x^2 +5x =0 | 5 | 0 | -5 | 0 | -5 | 0 | x \*(x +5) =0

i) | x^2 -4 =0 | 0 | -4 | -2 | 2 | 0 | -4 | (x +2) \*(x -2) =0

j) | x^2 =0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | x \*x =0

k) | x^2 -400 =0 | 0 | -400 | -20 | 20 | 0 | -400 | (x +20) \*(x -20) =0

l) | x^2 -15x +50 =0 | -15 | 50 | 5 | 10 | 15 | 50 | (x -5) \*(x -10) =0

m) | x^2 +10x =0 | 10 | 0 | -10 | 0 | -10 | 0 | x \*(x +10) =0

n) | x^2 -2x -1 =0 | -2 | -1 | 1 -'w(2) | 1 +'w(2) | 2 | -1 | (x -(1 -'w(2))) \*(x -(1 +'w(2))) =0

o) | x^2 -3 =0 | 0 | -3 | -'w(3) | '3 | 0 | -3 | (x +'w(3)) \*(x -'w(3)) =0

j-167

4.053.)

a) L ={-2; 1 -'w(3); 1 +'w(3)}

b) L ={-1; 1 -'w(3); 1 +'w(3)}

c) L ={-4; 2 -'w(5); 2 +'w(5)}

d) L ={-6; 3 -'w(2); 3 +'w(2)}

e) L ={-3; 1 -'w(5); 1 +'w(5)}

f) L ={3; 2 -'w(3); 2 +'w(3)}

g) L ={1; 4 -'w(3); 4 +'w(3)}

h) L ={0; 3/2}

i) L ={0; -1/2}

j) L ={-1; 2; 2 -'w(7); 2 +'w(7)}

k) L ={-2; 3; 1 -'e(7); 1 +'w(7)}

-----

4.054.)

a) x^4 -8x^3 +23x^2 -28x +12 =0

b) x^5 -9x^4 +31x^3 -51x^2 +40x -12 =0

c) x^6 -7x^5 +19x^4 -25x^3 +16x^2 -4x =0

d) x^6 -5x^5 +9x^4 -7x^3 +2x^2 =0

e) x^5 +2x^4 -5x^3 -10x^2 +4x +8 =0

-----

4.055.)

a) Die Polynomfunktion hat die drei Nullstellen -1, 0 und 1.

Die Funktionsgleichung erhält man als Produkt der Linearfaktoren: y =(x +1) \*x \*(x- 1) =x^3 -x

-----

b) y =x^3 +2x^2 -x -2

c) y =x^4 -5x^2 +4

d) y =x^4 -4x^2

-----

4.056.) S\_1(0|1); S\_2(-1|0); S\_3(-2|-1)

-----

4.057.)

a) L ={0; 1/4}

b) L ={-1/2; 0; 1/2}

c) L ={0; 3/2}

d) L ={-3; 0; 2}

e) L ={-2; 0; 2}

f) L ={0}

-----

4.058.)

a) V =a^2 \*h mit a =20 -2x und h =x

V(x) =(20 -2x)^2 \*x =4x^3 -80x^2 +400x

-----

c) größtes Volumen ~~600 cm^3 zugehörige Höhe ~~3,3 cm

-----

4.060.)

a) z. B. die Funktion f mit der Geraden y =12 schneiden, die x-Werte der Schnittpunkte liefern die gesuchte Entfernung bzw. in die Funktionsgleichung von f für y den Wert 12 einsetzen und nach x umformen.

-----

b) mögliche Standorte ca. 54 m und ca. 168 m vom Abschlag entfernt

j-168

Z 4.1.)

a) f(x) =(x -2)^2 -3

b) f(x) =x^2 -4x +1

c) (0|1)

d) Der Scheitel von f hat die Koordinaten (2|-3) und liegt im 4. Quadranten.

Da die Grundparabel nach oben offen ist, besitzt die Funktion 2 Nullstellen.

-----

Z 4.2.)

a)

f\_1(x) =0,5x^2 +2x +4

f\_2(x) =x^2

f\_3(x) =-x^2 -4x -3

f\_4(x) =-x^2 +3

f\_5(x) =-0,5x^2 +x -2,5

-----

b) f\_2 und f\_4

-----

Z 4.3.)

b) f(x) -(x -1,5)^2 +4,5

-----

Z 4.4.)

a) S(0|18) => y =a -x^2 +18

N(60|0) => 0 =a \*60^2 +18 => a =-0,005 => y =-0,005 \*x^2 +18

-----

b) f(0) =0 und f(120) =0 => Der Koordinatenursprung liegt am linken Rand der Brücke.

-----

Z 4.5.)

a) Die Nullstellen von h sind 0 und 1,2. Die Diagonale ist daher 1,2 m lang.

-----

b) Die Parabel hat die Scheitelpunktform h(x) =-(10)/9 \*(x -3/5)^2 +2/5

und hat damit den Scheitel S(3/5|2/5). Die maximale Höhe beträgt H =0,4 m.

-----

Z 4.6.)

D =12^2 -16 \*a

a) D =0, also a =9

b) a <9

c) a >9

-----

Z 4.7.)

Wenn a und c unterschiedliche Vorzeichen haben, dann ist ihr Produkt a \*c negativ.

Die Diskriminante D =b^2 -4ac ist in diesem Fall immer positiv.

Die Gleichung hat daher genau zwei Lösungen.

-----

Z 4.8.)

a)

(1) Nullstellen bei -2, 1 und 2

(2) Nullstellen bei -2 und 2

-----

b) Die Gleichung einer Polynomfunktion n-ten Grades erhält man als Produkt ihrer Linearfaktoren:

f(x) =a \*(x -x\_1) \*(x -x\_2) \*... \*(x -x\_n), wobei x\_i .... Nullstelle der Funktion

-----

c)

(1) f(x) =a \*(x +2) \*(x -1) \*(x -2) =a \*(x^3 -x^2 -4x +4)

f(0) =4: 4 =a \*2 \*(-1) \*(-2), a =1

f(x) =x^3 -x^2 -4x +4

-----

(2) f(x) =a \*(x +2)^2 \*(x -2)^2

f(0) =8: 8 =a \*2^2 \*(-2)^2, a =0,5

f(x) =0,5 \*x^4 -4x^2 +8

j-169

#### \*\*-4 - 5 Geometrie und Trigonometrie

-----

5.001.)

a) Die Winkel sind jeweils supplementär, d. h., 'al^\* =180° -'al, ...

-----

b) 180° -'al +180° -'be +180° -'ga =540° -('al +'be +'ga) =540° -180° =360°

-----

c) Wenn der größte Winkel eines Dreiecks weniger als 60° betragen würde, dann wäre die Summe der beiden anderen Winkel größer als 120°. Damit wäre wenigstens einer der beiden anderen Winkel größer als 60°.

-----

5.002.)

a) 90°

b) 95°

c) 30°

-----

5.003.)

a) 17,5 m

b) 14 m

-----

5.004.)

a) 31 m

b) 32 m

j-169

5.005.)

a)

a =4 cm; a' =40000 cm =400 m

b =5 cm; b' =50000 cm =500 m

A =a \*b =20 cm^2

A =a' \*b' =40000 cm \*50000 cm =2000000000 cm^2 =200000 m^2 =20 ha

-----

b) A / A' =20 / 2000000000 =1 / 100000000 =1 / 100002

-----

5.006.)

a) 100 Ar

b) 607,5 Ar

-----

5.007.)

140 m

-----

5.008.)

ca. 430 m

-----

5.009.)

a) Beide Dreiecke sind rechtwinkelig. Die Katheten des blauen Dreiecks verhalten sich wie 2 / 3, die Katheten des großen Dreiecks verhalten sich wie 6 / 9 =2 / 3. Die Dreiecke ABC und A'B'C' sind somit ähnlich.

-----

b) |A'B'| / |AB| =6 / 2 =3 / 1, d. h. k =3

Alle Seiten des Dreiecks werden verdreifacht.

-----

c)

A\_(ABC) =3 cm^2; A\_(A'B'C') =27 cm^2

A\_(ABC) =A\_(A'B'C') =3 / 27 =1 / 9

Die Fläche wird durch die Vergrößerung verneunfacht.

-----

5.010.)

a) 18 cm

b) 16 cm

-----

5.011.)

a) |A'B'| / |AB| =6 / 4 =3 / 2, d. h. k =1,5

b) k^2 =1,5^2 =2,25

A\_(ABCD) =24 cm^2; A\_(A'B'C'D') =54 cm^2

A\_(ABCD) / A\_(A'B'C'D') =24 / 54 =1 / 2,25

Die Fläche A\_(\dA'B'C'D') ist somit k^2 =2,25-mal so groß wie die Fläche Aabcd.

-----

5.012.)

a) 3,6 cm

b) Der Flächeninhalt soll 2,25-mal, also -mal so groß werden, daher muss die Seitenlänge um den Faktor =-=1,5 wachsen. Das sind 50 % Zuwachs.

-----

5.013.)

13,52 cm; 9,1 cm

-----

5.014.)

a) k^2 =4, d. h. Vervierfachung der Fläche

b) k ='w(2) ~~1,41, d. h. Streckung um ca. 41 %

c) k^2 =4, d. h. Vervierfachung

d) k ='w(1,5) ~~1,22, d. h. Streckung um ca. 22 %

-----

5.015.)

Sind die Rechtecke ähnlich, dann gilt:

a /b =a' /b' a /b =b /a/2

(a^2)/2 =b^2

a/('w(2)) =b

a /b =('w(2))/1

-----

5.016.)

a) 71 %; k =1/('w(2))

b) 141 %; k ='w(2)

c) 25 %

d) 122 %; k ='w(1,5)

b) 141 %; k ='w(2)

e) 88%; k =21/24

-----

5.017.)

450 mm^2; 25 mm

-----

5.018.)

a) 384 m^2

b) 499,02 m^2

c) 630 mm^2

-----

5.019.)

3,1941 cm^2; 2,34 cm; 2,184 cm; 2,52 cm

-----

5.020.)

8 cm; 26 cm; 30 cm

-----

5.021.)

a) 5, 12, 23 ist kein pythagoräisches Zahlentripel.

-----

b) Die drei aufeinanderfolgenden Zahlen sind: x -1, x, x +1

Es gilt (x -1)^2 +x^2 =(x +1)^2; x^2 -2x +1 +x^2 =x^2 +2x +1; x^2 -4x =0;

x \*(x -4) =0

1. Lösung: x =0; nicht zulässig, da aus x -1 =0 folgt x =-1 <0

2. Lösung: x =4; x -1 =3; x =4; x +1 =5

Das Zahlentripel 3, 4, 5 ist das einzige pythagoräische Zahlentripel mit aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

j-170

5.022.)

104 m

-----

5.023.)

... | a | b | c | p | q | h | A

a) | 20 | 15 | 25 | 16 | 9 | 12 | 150

b) | 2 | 4 | 5 | 1,8 | 3,2 | 2,4 | 6

c) | 5 | 3,75 | 6,25 | 4 | 2,25 | 3 | 9,375

d) | 8 | 6 | 10 | 6,4 | 3,6 | 4,8 | 24

e) | 1,5 | 2 | 2,5 | 0,9 | 1,6 | 1,2 | 1,5

f) | 12 | 3,5 | 12,5 | 11,52 | 0,98 | 3,36 | 21

g) | 2,4 | 0,7 | 2,5 | 2,304 | 0,196 | 0,672 | 0,84

h) | 35 | 120 | 125 | 9,8 | 115,2 | 33,6 | 2100

i) | 7 | 24 | 25 | 1,96 | 23,04 | 6,72 | 84

-----

5.024.)

a) c =6,25 mm

b) p ~~3,50 mm

c) a ~~4 mm

-----

5.025.)

a) c ~~6,99 dm

b) q =3,5 dm

c) b ~~4,42 dm

-----

5.026.)

x^2 =16 +9 =25; x =5 cm

-----

5.027.)

a) |AB| ='w((5 -1)^2 +(4 -2)^2) ~~4,47

-----

b) |AB| ='w(((4) -(-3))^2 +(1 -(-2))^2) ~~7,62

-----

c) |AB| ='w((x\_2 -x\_1)^2 +(y\_2 -y\_1)^2 ='w(('De x)^2 +('De y)^2)

-----

5.028.)

h ='w(a^2 -(a/2)^2) =...

-----

5.029.)

29,4 cm

-----

5.030.)

a) x ='w(a^2 +(b -c)^2)

b) x =b +'w(c^2 -(a/2)^2)

-----

5.031.)

d ~~10,30 Fuß; u =28 Fuß; A =45 Fuß^2

-----

5.032.)

a) A ~~17,84 m^2

A =192 Fuß^2 =(64)/3 Yard^2

-----

b) Höhe /Breite =1 /3

-----

5.033.)

a) 1500 cm^2

b) 1080 cm^2

-----

5.034.)

a /b =16 /9; 9a =16b; a =16/9 b

a^2 +b^2 =106^2; ((16)/9)^2 +b^2 =106^2;

(256)/(81)b^2 +b^2 =106^2; (337)/(81)b^2 =106^2

-----

b^2 =106^2 \*81/337; b ~~51,97 cm; a =16/9 b ~~92,39 cm; A =a \*b ~~4801 cm^2

-----

5.035.)

k =37/27 ~~1,37; k^2 ~~1,88

Der Bildschirm eines 37-Zoll-Gerätes hat die ca. 1,88-fache Fläche eines 27-Zoll-Gerätes.

Die Fläche hat sich um ca. 88 % vergrößert.

-----

5.036.)

k^2 =3; k ='w(3) ~~1,73

Ein Gerät mit einer Bildschirmdiagonale von ca. 27 \*'w(3) ~~46,76 Zoll hat die

dreifache Bildschirmfläche, wie ein 27-Zoll-Gerät.

-----

5.037.)

Breite /Höhe =a /b =16 /9; 9a =16b; a =16/9 b

a^2 +b^2 =164,22^2; (16/9 b)^2 +b^2 =164,22^2;

(256)/(81) b^2 +b^2 =164,22^2; (337)/(81) b^2 =164,22^2

b^2 =164,22^2 \*(81)/(337); b ~~80,51 cm; a =16/9 b ~~143,13 cm

143,13 cm +2 \*1,6 cm =146,33 cm <150 cm

Der Fernseher hat inkl. Rand eine Breite von weniger als 150 cm. Herr Martin kann das Gerät kaufen.

-----

5.038.)

das Quadrat mit 441 m^2; 'De A =36 cm^2

('De A)/(A\_(Rechteck)) ~~0,089; ('De A)/(A\_(Quadrat)) ~~0,082

-----

5.039.)

765 m^2

-----

5.040.)

b ~~57,06 m; u =57,06 m; A ~~3594,87 m^2

j-171

5.041.)

98 cm; 588 cm^2

-----

5.042.)

582,25 cm^2

-----

5.043.)

a) 80 cm

b) 29 cm

-----

5.043.)

c) 3960 cm^2

d) 24 cm

e) 25 cm

-----

5.044.)

96 cm^2

-----

5.045.)

a) Anna hat nicht recht. Alle drei Dreiecke sind zwar tatsächlich flächengleich. Die Grundlinie aller Dreiecke ist gleich lang (

|HD| =|BF| =|FC|) und auch die Höhen der drei Dreiecke sind gleich lang (|HM| =|CG|).

Somit stimmen nach der Flächenformel

A =(Seite \*zugehörige Höhe)/2

auch die Flächen der Dreiecke überein. Die Dreiecke sind allerdings nicht kongruent, da sie in keinem Winkel übereinstimmen.

-----

b) Alle drei Dreiecke sind flächengleich.

Die Grundlinie aller Dreiecke ist gleich lang (|MG| =|MI|) und auch die Höhen der drei Dreiecke h\_1 und h\_2 sind gleich lang.

Somit stimmen nach der Flächenformel

A =(Seite \*zugehörige Höhe)/2

auch die Flächen der Dreiecke überein. Die Dreiecke sind nicht kongruent, da sie in keinem Winkel übereinstimmen.

-----

5.046.)

Für die Fläche des Parallelogramms gilt

A =a \*h\_a =b \*h\_b |/4

A/4 =(a \*h\_a)/4 =(b \*h\_b)/4 =(a \*(h\_a)/2)/2 =(b \*(h\_b)/2)/2

A/4 =A\_(ABM) =A\_(BCM);

Die Dreiecke sind tatsächlich flächengleich.

-----

5.047.)

1724,25 cm^2

-----

5.048.)

a) 1200 cm^2

b) 85,63 cm

-----

5.049.)

a) 17,66 cm; 503,21 cm^2

b) 67,96 cm; 267,66 cm^2

c) 40 cm; 85 cm

-----

5.050.)

277,142 cm^2

-----

5.051.)

a) 84,82 m; 572,56 m^2

b) 15,71 m; 19,63 m^2

-----

5.052.)

a) 0,67 m

b) 3,24 cm

-----

5.053.)

425-mal

-----

5.054.)

a) 36,33 %

b) 37,89 %

-----

5.055.)

a) 2,052 cm; 2,094 cm; 0,042 cm; 2,1 % (bezogen auf die Länge der Sehne)

b) 4,243 cm; 4,712 cm; 0,470 cm; 11,1%

c) 3,776 cm; 4,084 cm; 0,308 cm; 8,2%

d) 5,196 cm; 6,283 cm; 1,087 cm; 20,9%

-----

5.056.)

a) 0,523 cm

b) 0,785 cm

c) 0,873 cm

d) 1,047 cm

e) 1,571 cm

f) 3,142 cm

g) 4,712 cm

-----

5.057.)

250,67 m

-----

5.058.)

a) 4,57 cm^2

b) 15,35 cm^2

c) 3,26 cm^2

d) 1,41 cm^2

e) 0,42 cm^2

-----

5.059.)

x ='w(49 -16) ='w(33); y ='w(100 -16) ='w(84)

|AB| ='w(33) +'w(84) ~~14,91

-----

5.061.)

Für jede der Münzen ist das Verhältnis von

Umfang /Durchmesser ='pi

Allgemein gilt: u /d =d /'pi /d ='pi /1 ='pi

j-172

5.062.)

a) k =1/('w(2)); h' =(7,75 cm)/('w(2)) ~~5,4 cm

-----

b) k =1/('w(3)) =bzw. k =('w(2))/3; k =1/('w(4)) bzw. k =('w(2))/4 bzw. k =('w(3))/4

-----

5.063.)

a) b ~~6,048 cm

-----

b) A\_(Alma) ~~23,283 cm^2; A\_(Rupp) =21,175 cm^2

'De A ~~2,108 cm^2; ('De A)/(A\_(Rupp)) ~~9,96 %

-----

c) ('De m)/(m\_(Rupp)) =(10)/(40) =25 %

-----

d) Rupp-Käsle: Gleichschenkeliges Trapez mit

a =11 cm, b ~~8,176 cm und

c =5,5 cm A =63,525 cm^2

Alma Rahm-Schmelzkäseecken: A ~~69,849 cm^2

-----

e) Untere Grenzen sind die Abmessungen plus Platz zum Einpacken.

-----

f) 'De A~~ =6,324 cm^2; ('De A)/(A\_(Rupp)) ~~9,96 %

-----

5.064.)

u =2 \*r \*p =11 \*p =34,56 m; v =s/t =(6 \*u)/t =(207,35)/1 m/s

Geschwindigkeit der Rotorspitzen ~~207 m/s ~~746,5 km/h

-----

5.065.)

h^2 =a^2 -(a^2)/4 =(3a^2)/4; h ='w(3) \*a/2

A =6 \*'w(3) \*(a^2)/4 =3 \*(a^2)/2

A(30) =3 \*'w(3) \*(900)/2; A(30) ~~2338,27 m^2

A(45) =3 \*'w(3) \*(45^2)/2; A(45) ~~5261,10 m^2

-----

5.066.)

a)

f ist die Hypotenuse.

d ist die Gegenkathete von 'de und die Ankathete von 'ep. Euro ist die Ankathete von 'de und die Gegenkathete von 'ep.

-----

b)

sin('de) =d/f cos('ep) =d/f

cos('de) =e/f sin('ep) =e/f

tan('de) =d/e tan('ep) =e/d

-----

5.067.)

a)

t ist die Hypotenuse.

s ist die Gegenkathete von 'si.

r ist die Ankathete von 'si.

-----

b)

r/t =sin('rh) =cos('si) s/t =sin('si) =cos('rh)

r/s =tan('rh) r/t =sin('rh) =cos('si)

s/r =tan('si) s^2 +r^2 =t^2

-----

5.068.)

sin(50°) ~~0,77

cos(50°) ~~0,64

tan(50°) ~~1,19

-----

5.069.)

sin(30°) =0,5

cos(30°) ~~0,87

tan(30°) ~~0,58

-----

5.070.)

... | a | b | c | 'al | 'be | A

a) | 5 | 12 | 13 | 22,62° | 67,38° | 30

b) | 8 | 15 | 17 | 28,07° | 61,93° | 60

c) | 5 | 12 | 13 | 22,62° | 67,38° | 30

d) | 8 | 15 | 17 | 28,07° | 61,93° | 60

e) | 14 | 48 | 50 | 16,26° | 73,74° | 336

f) | 14 | 22,5 | 26,5 | 31,89° | 58,11° | 157,5

g) | 14 | 48 | 50 | 16,26° | 73,74° | 336

h) | 14 | 22,5 | 26,5 | 31,89° | 58,11° | 157,5

-----

5.071.)

53,13°; ca. 53°

-----

5.072.)

3612,9 m; ca. 3610 m

-----

5.073.)

32,987°; ca. 33°; Wir vernachlässigen den Durchhang.

-----

5.074.)

57,05°; ca. 57°

-----

5.075.)

ca. 150 m

-----

5.076.)

Rechtwinkeliges Dreieck ABC:

sin('al) =a/c; cos('be) =a/c; sin('al) =cos('be)

sin('be) =b/c; cos('al) =b/c; sin('be) =cos('al)

-----

5.077.)

a)

b ist die Gegenkathete von 'be, die Ankathete von 'al und die Hypotenuse im Dreieck ADC.

a ist die Gegenkathete von 'al, die Ankathete von 'be und die Hypotenuse im Dreieck BCD. h\_c ist im Dreieck ADC die Gegenkathete von 'al und im Dreieck BCD die Gegenkathete von 'be.

-----

b)

sin('al) =a/c =(h\_c)/b cos('be) =a/c =p/a

cos('al) =b/c =q/b sin('be) =b/c =(h\_c)/a

tan('al) =a/b =(h\_c)/q tan('be) =b/a =(h\_c)/p

j-173

5.078.)

a) Wenn sich die Seiten a und b wie 2 / 1 verhalten, dann ist der Tangens von 'al =2.

tan('al) =2, da tan('al) =a/b =(2b)/b =2.

-----

b) Wenn sich die Seiten c und b wie 2 / 1 verhalten, dann ist der Sinus von 'be =1/2.

sin('be) =1/2, da sin('be) =b/(2b) =1/2.

-----

c) Wenn sich die Seiten c und b wie 3 / 1 verhalten, dann ist der Kosinus von 'al =1/3.

cos('al) =1/3, da cos('al) =b/c =b/(3b) =1/3.

-----

5.079.)

a) sin('al) =-3/5; cos('al) =4/5; tan('al) =(sin('al))/(cos('al)) =-3/4 =-0,75

-----

b) sin('al) =-3/5; 'al =sin^(-1)(-3/5) =-36,87°; tan('al) =tan(-36,87°) =-0,75

-----

5.080.)

ca. 265 m

-----

5.081.)

a) 2 %

b) 1,146°

-----

5.082.)

a) 505,6 m; ca. 500 m

b) 9,09°; ca. 9°

-----

5.083.)

a) sin('al) =0,436; 'al =sin^(-1)(0,436) ~~25,85°

-----

b) k =tan('al) ~~0,48

-----

c) t =s/v =(100)/(3/4) =(400)/3 ~~133,3; Förderzeit t ~~133,3 s ~~2 min 13 s

-----

5.084.)

a) 'al =tan^(-1) \*0,06 ~~3,4°

b) l =(1,3)/(sin('al)) ~~21,7;

Die Mindestlänge der Rampe beträgt etwa 21,7 m.

-----

5.085.)

a) 'al =tan^(-1)(0,1) ~~5,7°

-----

b) h =10 \*sin('al) ~~0,995;

Mit diesem Zugang wird eine Höhe von etwa 99,5 cm überwunden.

-----

c) Euro =h/(tan(3,4)) ~~16,6;

Eine horizontale Gesamtlänge von etwa 16,6 m wäre notwendig.

-----

5.086.

a) Damenabfahrt: sin('al) =(790)/(2713); 'al ~~16,9°

Herrenabfahrt: sin('al) =(1075)/(3495); 'al ~~17,9°

-----

b) v =s/t =(3495)/(126,23) ~~27,7

Die mittlere Geschwindigkeit von Matthias Mayer war etwa 27,7 m/s, das sind etwa 99,7 km/h.

-----

5.087.)

a) 'be =tan^(-1)((Rg)/(v^2)) =tan^(-1)((8,5 \*9,81)/(100)) ~~39,8°

-----

b) tan('be) =1 =(Rg)/(v^2); v ='w(Rg) ='w(8,5 \*9,81) ~~9,1;

Die Geschwindigkeit des Läufers ist etwa 9,1 m/s.

-----

c) Wenn der Radius kleiner wird, muss der Winkel kleiner werden.

Der Läufer muss sich stärker in die Kurve legen.

-----

5.088.)

tan('al) =(Gegenkathete von 'al)/(Ankathete von 'al) =k/1 =k

-----

5.089.)

a)

v\_x =37 \*cos(36°) ~~29,9 m/s

v\_y =37 \*sin(36°) ~~21,7 m/s

-----

b) tan('al) =(22)/(16); 'al =tan\_(-1)((22)/(16)) ~~54°

v =(v\_y)/(sin('al)) ~~27,2 m/s

-----

c) cos('al) =(18)/(37); 'al ~~60,9°

-----

5.090.)

a) 2,11°

b) 3,7 %

-----

5.091.)

45°; 100 % Steigung bedeutet, dass das Steigungsdreieck ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck ist, das einen Steigungswinkel von 45° hat.

-----

5.092.)

26,6°

-----

5.093.)

h/(sin('al)) ist die (Länge der) Strecke l, da sin('al) =h/l.

s/(cos('al)) ist die (Länge der) Strecke l, da cos('al) =s/l.

s \*tan('al) ist die Höhe des Baumes h, da tan('al) =h/s.

h/(tan('al)) ist die Schattenlänge s des Baumes, da tan('al) =h/s.

j-174

5.094.)

l \*sin('ph) ist die (Länge der) horizontale(n) Entfernung x des Pendelkörpers von der Lotrechten, da sin('ph) =x/l.

-----

l \*cos('ph) ist die (Länge der) vertikale(n) Entfernung y des Pendelkörpers vom Aufhängepunkt, da cos('ph) =y/l.

-----

5.095.)

(GK)/(80) =3/4 <=> GK =60; A =(60 \*80)/2 =2400

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist 2400 cm^2.

-----

5.096.)

a) (a/2)^2 +(a/2)^2 =1; a ='w2; A =2

Das Quadrat hat einen Flächeninhalt von 2 cm^2.

-----

b) Das Verhältnis ist 2 / 'pi.

-----

5.097.)

... | a | c | 'al | 'ga | A

a) | 17 | 16 | 61,9° | 56,1° | 120

b) | 53 | 56 | 58,1° | 63,8° | 1260,2

c) | 32,5 | 7,2 | 83,65° | 12,7° | 116,1

d) | 40,3 | 8 | 84,3° | 11,4° | 160,3

e) | 32,5 | 7,2 | 83,65° | 12,72° | 116,3

f) | 17 | 16 | 61,9° | 56,1° | 120

g) | 10,9 | 12 | 56,6° | 66,8° | 54,6

-----

5.098.)

a) 2,37764 LE^2; 2,93893 LE^2; 3,13953 LE^2; 3,14157 LE^2; 3,14159 LE^2;

Die Flächeninhalte nähern sich der Zahl 'pi an.

-----

b) (n/2) \*sin((360°)/n)

Mit der trigonometrischen Flächeninhaltsformel erhalten wir für das gleichschenkelige Dreieck:

A =(1 \*1)/2 \*sin((360°)/n) =1/2 \*sin((360°)/n)

A =n \*A =n/2 \*sin((360°)/n)

-----

5.099.)

a) 5,877853 LE; 6,180340 LE; 6,282152 LE; 6,283175 LE; 6,283185 LE;

Die Umfänge nähern sich der Zahl 2'pi an.

-----

b) 2n \*sin((180°)/n)

Ein regelmäßiges n-Eck mit Umkreisradius r =1 LE besteht aus n gleichschenkeligen Dreiecken mit einem Öffnungswinkel von (360°)/n:

sin((180°)/n) =a/2

a =2 \*sin((180°)/n)

u =n \*a =2 \*n \*sin((180°)/n)

-----

5.100.)

a) Ausgehend von der trigonometrischen Flächeninhaltsformel A =(a \*b \*sin('ga))/2 erhält man für a =b =r und 'ga =(360°)/n die Fläche eines regelmäßigen Vielecks:

A =(r \*r \*sin((360°)/n))/2

Da das regelmäßige Vieleck aus n gleichschenkeligen Dreiecken besteht, ist A =(n \*r^2 \*sin((360°)/n))/2.

-----

b) Wenn der Radius verdoppelt wird, verdoppelt sich auch der Flächeninhalt, da

A' =(n \*(2r)^2 \*sin((360°)/n))/2 =(4 \*n \*r^2 \*sin((360°)/n))/2 =4 \*A

-----

c)

A\_4 =2 \*r^2 LE^2

A\_8 =2 \*'w2 \*r^2 LE^2 ~~2,83 \*r^2 LE^2

A\_(16) ~~3,06 \*r^2 LE^2

Von 4 auf 8 Ecken nimmt der Flächeninhalt um etwa 41 %, von 8 auf 16 Ecken um etwa 8 % zu.

-----

5.101.)

Radius r des gleichschenkeligen Dreiecks:

r =1/(2 \*sin((180°)/7)) ~~1,15

Mit der Formel A =(n \*r^2 \*sin((360°)/n))/2 erhält man:

A =(7 \*1,15^2 \*sin((360°)/7))/2 ~~3,63

Der Flächeninhalt von 3,63 cm^2 stimmt mit dem von GeoCebra gelieferten Wert überein.

-----

5.102.)

317,02; 311,00; 307,82; 305,25; 303,88

j-175

5.103.)

a) 0,2915 rad

b) 0,4714

c) 1,9258

d) 1,5260

-----

5.104.)

a) 0,573°

b) 57,296°

c) 485,467°

d) 572,958°

-----

5.106.)

Der Winkel ist 'al =1 rad, da 'al =b/r =1/1 =1.

Der Winkel ist 'be =2 rad, da 'be =b/r =4/2 =2.

Der Winkel ist 'ga =3 rad, da 'ga =b/r =6/3 =2.

-----

5.107.)

Alle vier Kreissektoren schließen den selben Winkel von einem rad ein, da

'al =b/r =1/1 =2/2 =3/3 =4/4.

Die Radien und die Bogenlänge sind jeweils ident und wachsen immer um 1.

Kreissektot | 1 | 2 | 3 | 4

Winkel in ° | 57,3 | 57,3 | 57,3 | 57,3

Bogenlänge | 1 | 2 | 3 | 4

Bogenlänge/Radius | 1 | 1 | 1 | 1

Winkel in rad | 1 | 1 | 1 | 1

-----

5.111.)

sin(0,6°) =0,0105;

cos(0,6°) =0,9999;

tan(0,6°) =0,0105

sin(0,6) =0,5646;

cos(0,6) =0,8253;

tan(0,6) =0,6841 usw.

-----

5.112.)

a) 'al =36,87° und 'al =180° -36,87° =143,13° usw.

-----

b) 'al =53,13° und 'al =360° -53,13° =306,87° usw.

-----

5.113.)

'al =9,65°; 'al =180° +9,65° =189,65° usw.

-----

5.114.)

a) 'al =8,627°; 'al =171,373°

b) 'al =14,478°; 'al =165,522°

c) 'al =83,685°; 'al =276,315°

d) 'al =77,878°; 'al =282,122°

e) 'al =45°; 'al =225°

f) 'al =63,435°; 'al =243,435°

Am Einheitskreis sieht man, dass der y-Wert 0,15, also sin('al) =0,15, zweimal (im ersten und zweiten Quadranten) angenommen wird. Daher gilt der Zusammenhang 171,373° =180° -8,627°.

Die beiden Winkel ergänzen einander auf 180° und sind daher Supplementärwinkel.

j-176

5.115.)

... | a | b | c | 'al | 'be | 'ga | A

a) | 102 | 61 | 109 | 67° | 33,4° | 79,6° | 3059,9

b) | 232 | 61 | 229 | 85,2° | 15,2° | 79,6° | 6964,8

c) | 450 | 85 | 445 | 87,9° | 10,9° | 81,2° | 18900

d) | 102 | 61 | 109 | 67° | 33,4° | 79,6° | 3059,8

e) | 232 | 61 | 229 | 85,2° | 15,2° | 79,6° | 6964,5

f) | 449 | 85 | 445 | 87,2° | 10,9° | 81,9° | 18890,3

... | 425 | ... | ... | 71° | ... | 98,1° | 17879,8

-----

5.116.)

... | a | b | Euro | f | 'al | 'be | A

a) | 10,12 | 6,17 | 13,21 | 10,32 | 74,17° | 105,83° | 60,07

b) | 7,3 | 5,2 | 9,8 | 8,0 | 78,1° | 101,9° | 37,1

c) | 52,1 | 36,7 | 75,3 | 49,6 | 65,2° | 114,8° | 1737,7

d) | 135 | 121 | 195 | 167 | 81,2° | 98,8° | 16200

-----

5.117.)

... | a | b | c | d | Euro | f | 'al | 'be | 'ga | 'de | h | A

a) | 8 | 6,7 | 2,8 | 6,9 | 8,5 | 8,1 | 66,0° | 70,2° | 109,8 | 114,0° | 6,3 | 34

b) | 43,1 | 33,4 | 21,8 | 33,5 | 45,5 | 45,2 | 71,1° | 71,8° | 108,2° | 108,9° | 31,7 | 1028,3

c) | 6,1 | 3,6 | 3,4 | 3,7 | 6,0 | 5,7 | 65,3° | 71,2° | 108,8° | 114,7° | 3,4 | 16

d) | 81,2 | 67,3 | 27,1 | 69,8 | 85,1 | 81,0 | 64,3° | 69,2° | 110,8° | 115,7° | 62,9 | 3406,4

... | 67,3 | 87,5 | ... | ... | 128,0 | 115,7° | ... | 110,8° | 64,3° | 62,9 | 5307,6

-----

5.118.)

... | a | b | c | d | Euro | f | 'al | 'be | 'ga | 'de | A

a) | 41,2 | 81,8 | 78,6 | 70,6 | 98,8 | 91,2 | 106,3° | 101,7° | 69,2° | 82,8° | 4402,99

b) | 4,62 | 6,91 | 6,72 | 4,17 | 8,94 | 6,50 | 95,2° | 99,8° | 56,9° | 108,1° | 29,04

c) | 4,12 | 5,18 | 8,56 | 6,86 | 7,75 | 9,11 | 109,7° | 112,3° | 78,9° | 59,1° | 35,05

d) | 65,1 | 58,3 | 92,5 | 34,6 | 98,1 | 81,5 | 105,7° | 105,1° | 60,5° | 88,7° | 3431

-----

5.119.)

r' sei der Radius des 48. Breitengrades, dann gilt im eingezeichneten rechtwinkeligen Dreieck:

sin(42°) =(r')/r

r' =r \*sin(42°) =6370 km \*sin(42°) ~~4262,36 km

u =2r' 'pi ~~26781,21 km Kreisumfang am 48. Breitengrad

Die Entfernung über die zwei Längengrade erhalten wir aus einer einfachen Schlussrechnung:

360 Längengrade ... u

2 Längengrade ... u/(180) ~~(26781,21)/(180) ~~148,78 ~~149

Die Entfernung Wien - Linz beträgt in Luftlinie ca. 149 km.

-----

5.120.)

ca. 250,6 m; ca. 3360 m^2

-----

5.121.)

423,4 m

-----

5.122.)

|AD| =228,4 m, |AB| =203,6 m, |BD| =229,6 m

-----

5.123.)

a) 42,866; ca. 43 m

b) 1. Dass das Gelände eben ist und waagrecht verläuft.

-----

2. Der Turm auf demselben Niveau steht wie der Beobachter.

-----

3. Der Turm lotrecht steht.

-----

5.124.)

1490,17; ca. 1490 m

-----

5.125.)

a) 140,89; ca. 141 m

b) 1. Dass das Gebäude eben ist und waagrecht verläuft.

-----

2. Auch das andere Ufer auf dem selben Niveau ist.

(genauer der Punkt des Sehstrahls)

-----

3. Der Turm lotrecht steht.

-----

4. Die Beobachtung am äußersten Rand des Turmes erfolgt.

(Zinnen wären da perfekt.)

-----

5.126.)

32,06; ca. 32 m

-----

5.127.)

17,2°

-----

5.128.)

44 m

j-177

5.129.)

a) 47,98; ca. 48 m

b) 1. Dass die beiden Punkte auf dem selben Niveau liegen und

2. dieses mit der Grundebene der Plattform zusammenfällt.

3. Dass die beiden Punkte, der Beobachtungs- und der Fußpunkt der Plattform in der selben vertikalen Fbenen liegen.

-----

5.130.)

13,9; ca. 14 m; 78,1; ca. 78 m

-----

5.131.)

1,21; ca. 1,2 m

-----

5.132.)

41,86; ca. 42 m

-----

5.133.)

13,084°; 13°

-----

5.134.)

a) 9,86; ca. 10 m

b) 11,8 m

-----

5.135.)

a) 629,2; ca. 630 m

b) 1032,10; ca. 1032 m

-----

5.136.)

27,94; ca. 28 m

-----

5.137.)

a) ca. 11,16°

b) tan('al\_u) =(1,6)/x

tan('al\_o) =(1,6 +h)/x

s(x) ='al\_o -'al\_u =tan^(-1)((1,6 +h)/x) -tan^(-1)((1,6)/x)

-----

5.138.)

16,4 m

-----

5.139.)

212 m

-----

5.140.)

59,91 m; ca. 60 m bzw. 125,51 m; ca. 126 m (Warum sind zwei Ergebnisse möglich?)

-----

5.141.)

a) Da der Skistock senkrecht pendelt, schließt er mit der gedachten Horizontalen einen Winkel von 90° ein. Die beiden Skistöcke bilden mit der Länge (dem Abdruck) im Schnee ein gleichseitiges Dreieck mit jeweils 60°. Daher ist der Hang in diesem Fall 30° steil.

-----

b) l ... Länge des Skistocks

Das entstehende Dreieck ist nun gleichschenkelig mit den Seitenlängen l, l und l +10.

Der Kosinussatz liefert cos('be) =(l +10)/(2l).

Für l =125 cm: cos('be) =(135)/(250); 'be ~~57,3°.

Das sind etwa die angegebenen 3° Abweichung von den 60° pro 10 cm Abweichung.

-----

5.142.)

Das Dreieck ABC auf der Kugeloberfläche hat eine Innenwinkelsumme von 3 \*90° =270°.

j-178

5.143.)

a) d ist die Diagonale der Grundfläche; d ='w(2) \*a; d\_R ist die Raumdiagonale;

Damit ist der Winkel, den die beiden einschließen durch tan('al) =a/d =a/('w(2)) \*a =1/('w(2)) gegeben und 'al =tan^(-1)(1/('w(2))) ~~35,3°.

-----

b) sin(('al)/2) =(a/2)//((d\_R)/2) =1/('w(3)); 'al =70,529° oder 'al =180° -70,529° =109,471°

Die beiden Winkel wurden in GeoGebra mit folgendem Befehl erzeugt und bestimmt:

'al =Winkel[A, M, B]

-----

c) Alle diese Dreiecke sind für verschiedene Würfel zu einander ähnlich, weil sich in

a) die beiden Katheten immer wie 1 / 'w(2) verhalten und in

b) die Seitenlänge zur Raumdiagonale immer wie 1 / 'w(3) verhält.

Daher sind auch die beiden Winkel unabhängig von der konkreten Seitenlänge des Würfels.

-----

5.144.)

a) 2,59 Mio. m^3

b) ca. 85800 m^2

c) 96°

-----

5.145.)

Die gegenseitige Entfernung x der Schiffe beträgt ca. 465,5 Meter.

-----

5.146.)

Die gegenseitige Entfernung der Kirchtürme beträgt ca. 1917 Meter.

-----

5.147.)

Die Höhe des Berges ist ca. 703 Meter.

-----

5.150.)

Der Graph von h schneidet die y-Achse im Punkt (0|3), da h(0) =3 \*cos(0) =3.

Daher ist der rote Graph derjenige der Funktion h. Analog für g und f.

j-179

5.151.)

a) f\_(50)(x) ='Si[k =1; 50](1/k \*sin(k \*x)) "Sägezahnkurve"

-----

b) f\_(50)(x) ='Si[n =1; 50](1/(2k -1) \*sin((2k -1) \*x)) "Rechteckkurve"

-----

c) f5\_(50)(x) ='Si[n =1; 50](1/((2k -1)^2) \*cos((2k -1) \*x)) "Dreieckskurve"

-----

5.152.)

a) Die maximale Tageslänge ist etwa 16 Stunden.

-----

b) Die minimale Tageslänge ist etwa 8 Stunden.

-----

c) Mittelwert =(16 +8)/2 =12. Der Wert 12 entspricht der vertikalen Verschiebung des Graphen der Funktion gegenüber der Grundfunktion in y-Richtung.

-----

d) Vom Maximalwert bis zum Minimalwert liegt die halbe Periodenlänge mit etwa 6 Monaten vor.

Die abgelesene Periodenlänge ist somit etwa 12 Monate.

-----

Z 5.1.)

a) t =r/(sin('rh)) und sin('rh) =r/t sind richtig.

cos('si) =r/t ist richtig.

-----

b) s =r/(tan('rh)), da tan('rh) =r/s

-----

Z 5.2.)

sin('my) =b/f => f =b/(sin('my)) und cos('my) =a/f => f =1/(cos('my))

-----

Z 5.3.)

Aussage: genau zwei Seiten sind parallel

Raute: **[]**

Parallelogramm: **[]**

Deltoid: **[]**

Trapez: **[x]**

-----

Aussage: jeweils zwei Seiten sind parallel

Raute: **[x]**

Parallelogramm: **[x]**

Deltoid: **[]**

Trapez: **[]**

-----

Aussage: Diagonalen stehen aufeinander normal

Raute: **[x]**

Parallelogramm: **[]**

Deltoid: **[x]**

Trapez: **[]**

-----

Aussage: Diagonalen halbieren einander

Raute: **[x]**

Parallelogramm: **[x]**

Deltoid: **[]**

Trapez: **[]**

-----

Z 5.4.)

a) Der Querschnitt besteht aus zwei Trapezen und zwei Rechtecken.

b) 'al =tan^(-1)((2 \*h)/(U/('pi) -d))

-----

Z 5.5.)

a) Es wird die Höhe h\_B der Bergstation berechnet.

tan('al) =(h\_M)/a und h\_M =a \*tan('al)

tan('be) =(h\_B -h\_M)/b und h\_B -h\_M =b \*tan('be)

-----

b) Die abgeiesenen Längen sind die horizontale Entfernung der Mittelstation von der Talstation (in der Skizze a) und jene von der Mittelstation zur Bergstation (in der Skizze b).

-----

c) x +y =(h\_M)/(sin('al)) +(h\_B -h\_M)/(sin('be))

Zur Berechnung ohne Winkelfunktionen müssten die Höhen h\_M und h\_B, sowie die Horizontalabstände a und b bekannt sein.

Es gilt dann der Satz des Pythagoras:

'w(a^2 +h^2\_M) +'w(b^2 +(h\_B -h\_M)^2)

-----

d) Die von Peter verwendeten Dreiecke sind nicht ähnlich. Die Berechnung ist daher falsch.

j-180

Z 5.6.)

a) Skizze:

'al =tan^(-1)(h/t)

b) ca. 2,24 Meter

c) ca. 4,2 Meter

-----

Z 5.7.)

a) Eine Person steht auf einem waagrechten Platz s Meter von einem Turm entfernt. Die Augen der Person befinden sich h Meter über dem Boden. Sie sieht ein F Meter hohes Fenster, das sich H Meter über dem Boden befindet, unter dem Sehwinkel 'al.

Berechnen Sie die Höhe des Fensters F.

-----

b) Man berechnet mithilfe des Tangens den Winkel des unteren Sehstrahls zur Horizontalen.

Dann gilt: tan('al +'be) =(H -h +F)/s

Und damit: F =s \*tan('al +'be) -H +h

-----

Z 5.8.)

a) m =OR, s =OP, Euro =RP, I =PQ, 'ep ='wi(RPQ)

b) A ~~5 dm^2

-----

Z 5.9.)

Die behauptete Gleichung entspricht dem Lehrsatz des Pythagoras.

j-181

#### \*\*-4 - Literaturverzeichnis

Ayres, Frank: Matrizen: Theorie und Anwendung. Mcgraw-Hill Professional (Schaum's Edition) 1978.

Cuninka, Anton: Textaufgaben zur Mathematik. Mit Ansatz und Lösung. Über 500 durchgerechnete Sachaufgaben aus Naturwissenschaft, Technik und Ökonomie. Verlag Harri Deutsch.

Gal, Thomas; Kruse, Hermann-Josef; Vogeler, Bernhard: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I. Lineare Algebra. Springer-Verlag, Berlin 1991.

Junge, Heinz (Hg.): Sammlung mathematischer Aufgaben mit Lösungen. Für Sekundarstufe I und II. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt 1978.

Koch, Steffen: Anleitung zum Lösen mathematischer Aufgaben. Fachbuchverlag Leipzig 1991.

Lehmann, Eberhard: Mathematik-Unterricht mit Computer-Einsatz. Band 1: Grundlagen, didaktisch-methodische Hinweise für die Sekundarstufen I und II. Dümmler Verlag 1988.

Lehmann, Eberhard: Mathematik-Unterricht mit Computer-Einsatz. Band 2: Anwendungen, Unterrichtsbeispiele für die Sekundarstufen I und II. Dümmler Verlag 1988.

Lipschutz, Seymour: Lineare Algebra. Mcgraw-Hill Professional (Schaum's Edition) 1999.

Tietze, Jürgen: Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik. Das praxisnahe Lehrbuch. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden 2002.

Basieux, Pierre: Abenteuer Mathematik. Brücken zwischen Wirklichkeit und Fiktion. Rowohlt, Reinbek 1999.

Corne, Christian; Robineau, Francois: Neue Mathematik im Alltag. Aulis Verlag Deubner, Köln 1982.

Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. GLB Parkland, Köln 2002.

Kitaigorodski, Alexander: Unwahrscheinliches - möglich oder unmöglich? Aulis Verlag Deubner, Köln 1972.

Smullyan, Raymond M.: Dame oder Tiger? Logische Denkspiele und eine mathematische Novelle über Gödels große Entdeckung. Fischer Verlag, Frankfurt 1986.

Tietze, Heinrich: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit. Verlag C. H. Beck, München 1964.

Athen, Hermann; Bruhn, Jörn: Lexikon der Schulmathematik. Und angrenzende Gebiete. 4 Bände. Aulis Verlag Deubner, Köln 1985.

Bewert, Fritz; Pauli, Wolfgang (Hg.); Leupold, Wilhelm u. a.: Lehr- und Übungsbuch Mathematik. 4 Bände. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt 1990.

bifie (diverse Aufgabenentwickler/innen): Aufgabenpool Angewandte Mathematik, www.bifie.at.

Bossek, Hubert; Eichler, Klaus P.; Fanghänel, Günter; Rolles, Günther; Unger, Michael: Basiswissen Schule Mathematik mit CD-ROM. Duden Paetec, Berlin 2001.

Grell, H. (Hg.): Enzyklopädie der Elementarmathematik. 5 Bände (enthält: Band 1: Arithmetik, Band 2: Algebra, Band 3: Analysis, Band 4 und 5: Geometrie). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

Wolff, Georg u. a.: Handbuch der Schulmathematik. 7 Bände. Hermann Schroedel Verlag, Coburg 1960 - 1968.

Baumert, Jürgen; Bos, Wilfried; Lehmann, Rainer: TIMSS/Ill. 2 Bände. Verlag Leske & Budrich, Leverkusen 2000.

Girlinger, Helmut; Tinhof, Friedrich: Mathematik mit dem TI-82 STATS. Trauner Verlag, Linz 2007.

Tinhof, Friedrich: Mathematik mit dem TI-83 und TI-83 Plus. Basicprogrammierung. Trauner Verlag, Linz 1999.

WinFunktion Mathematik plus 17. bhv Software, Kaarst 2007.

j-182

#### \*\*-4 - Quellennachweis

Seite 3: Fotolia: Young high school students (#5131585). (C) Yuri Arcurs.

Seite 6: The Story of Maths (YouTube, planet schule).

Seite 7: Fotolia: Computertomograph (#23097878). (C) Lucianus.

Seite 7: Fotolia: Erdfunkstelle (#3775754). (C) Martina Berg.

Seite 7: Fotolia: Hamburger und Cola (#7309477). (C) yamix.

Seite 9: Carl Friedrich Gauß (Wikimedia Commons, gemeinfrei).

Seite 14: Fotolia: Sparbuch & Sparschwein (#41852563). (C) Denis Junker.

Seite 16: Fotolia: Cross-country skiing: young man (#37551883). (C) lightpoet.

Seite 16: Fotolia: hotel bell (#3263700). (C) Nikola Hristovski.

Seite 17: Fotolia: Wärmedämmung zum Wärmeschutz auf Rohbau Haus (#26718036). (C) Gina Sanders.

Seite 17: Fotolia: Kaffeebohnen (#35839159).

Seite 17: Fotolia: Taxi (#30049542). (C) Luftbildfotograf.

Seite 19: Fotolia: Wasserflaschen (#40278975). (C) Schlierner.

Seite 20: William Rowan Hamilton (Wikimedia Commons, gemeinfrei).

Seite 20: Arthur Cayley (Wikimedia Commons, gemeinfrei).

Seite 22: Fotolia: Flugzeug mit Reisepass und Koffer (#59171642). (C) stockWERK.

Seite 23: Fotolia: Rohrleitungen einer Raffinerie 013 (#36908134). (C) Wolfgang Jargstorff.

Seite 26: Fotolia: Truck (#4509083). (C) Eisenhans.

Seite 28: Fotolia: window with blue sky (#677090). (C) svetlana larina.

Seite 28: Fotolia: window and clouds (#4258289). (C) Gala\_K.

Seite 36: Fotolia: Matrix-Code II (#36364917). (C) lassedesignen.

Seite 37: Fotolia: Fünf Sterne Bewertung (#61921142). (C) fotogestoeber.

Seite 38: Fotolia: Button 100 % Bio (#61325901). (C) guukaa.

Seite 42: Wassily Leontief (Wikimedia Commons, gemeinfrei).

Seite 44: Fotolia: fondo abstracto de tecnologia 3d (#45548137). (C) carloscastilla.

Seite 44: Fotolia: Teamwork of businesspeople (#54491875). (C) alphaspirit.

Seite 45: Fotolia: Roboter schweißen Auto Karosserie Fabrik (#55657024). (C) Marco Herrndorff.

Seite 45: Fotolia: White architecture of Oia village on Santorin (#50819585). (C) Patryk Kosmider.

Seite 46: Fotolia: Österreich, Linz, Industriegebiet (#51415601). (C) Gina Sanders.

Seite 46: Fotolia: Sailing ship yachts with white sails (#37585537). (C) Andrew Bayda.

Seite 47: Fotolia: Kosmetik (#39004328). (C) PhotoSG.

Seite 47: Fotolia: Tractor and combine (#56196416). (C) makaule.

Seite 48: Fotolia: Pastose Acrylfarben in Nahaufnahme (#33339720). (C) bittedankeschön.

Seite 48: Fotolia: Mädchen im Herbst (#47390676). (C) K.-P. Adler.

Seite 49: Fotolia: Vitamintabletten (#41705373). (C) cirquedesprit.

Seite 56: Fotolia: newtons cradle vers. 2 (#52579314). (C) fotomek.

Seite 66: Kugel mit Käfig. (C) Helmut Girlinger.

Seite 67: Geronimo Cardano (Wikimedia Commons, gemeinfrei).

Seite 68: Fotolia: Moderne Kommunikation im Detail (#203412). (C) Ubil7.

Seite 71: Mittelscheitel (Quelle unbekannt).

Seite 76: Fotolia: chocolate bar sweet dessert sugar food (#17988229). (C) picsfive.

Seite 77: Svinesund-Brücke (Quelle unbekannt).

Seite 77: Wasserstrahl eines Brunnens (Quelle unbekannt).

Seite 86: Wasserstrahl eines Brunnens (Quelle unbekannt).

Seite 87: Fotolia: spoonfull of sugar (#160899). (C) Laurin Rinder.

Seite 89: Fotolia: E-Bike (#42561460). (C) lassedesignen.

Seite 89: Fotolia: winter extreme sport photo (#6495927). (C) victor zastol'skiy.

Seite 90: François Viete (Wikipedia: www-history.mcs.st-and.ac.uk, gemeinfrei).

Seite 94: Niels Henrik Abel (Wikimedia Commons, gemeinfrei).

Seite 96: Fotolia: golf swing (#1289262). (C) Paul Yates.

Seite 97: Trisannabrücke (Quelle unbekannt).

Seite 98: Spieldecke mit zwei Bögen. (C) Kathrin Gerstendorf.

j-183

Seite 99: Euklid von Alexandria (Wikimedia Commons, gemeinfrei).

Seite 99: Leonhard Euler (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 100: Glacier-Nationalpark, Montana, USA. Two Medicine Lake. (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 106: Heron von Alexandria (Wikimedia Commons, public domain).

Seite 112: Anzeige Kopiergerät. (C) Friedrich Tinhof.

Seite 112: Norbert Wiener (people.cedarville.edu).

Seite 112: Fotolia: Drachenfliegen (#4427717). (C) Alexander Maier.

Seite 113: ocular trauma, find x (oculartrauma.net).

Seite 114: Fotolia: Tischtennis (#8197569). (C) felippe.

Seite 114: Monitormaße (Quelle unbekannt).

Seite 116: Fotolia: basketball ball (#260820). (C) Albo.

Seite 116: Rupp Käsle. (C) Markus Paul.

Seite 117: Drei Käseecken. (C) Wolfgang Fischer.

Seite 117: Fort Jefferson (Wikimedia Commons).

Seite 120: Artikel: Angewandte Theorie (www.zeit.de).

Seite 120: Skizze Basketball (aus M. Ludwig: Mathematik und Sport. 2008).

Seite 120: Kartenausschnitt mit Lineal. (C) Markus Paul.

Seite 121: Legende: Maßstab (Karte des Alpenvereins). (C) Markus Paul.

Seite 121: Fotolia: Schilfernte (#15164301). (C) Bob 8.

Seite 131: Buchcover: Die Vermessung der Welt (www.amazon.de).

Seite 132: Fotolia: Two women (#74152043). (C) dan8.

Seite 138: Fotolia: Solar Energie (#25214209). (C) flughoernchen.

Seite 140: Fotolia: glider (#746626). (C) Kenneth Browning.

Seite 141: Brennerpass (alpentouren.teamone.de).

Seite 141: Seiteneingang der Pfarrkirche Aigen im Mühlkreis. (C) Wolfgang Fischer.

Seite 142: Eisschnellläufer (C) REUTERS/Laszlo Balogh.

Seite 146: Fotolia: Albert Einstein Postage Stamp (#7307192). (C) rnl.

Seite 147: Mona Lisa (Wikimedia Commons, gemeinfrei).

Seite 148: Hangneigungsmessung (www.alpinsport-basis-blog.de).

Screenshots von Tabellen, Grafen und Auswertungen wurden mithilfe von am Markt bekannten Tabellenkalkulationsprogrammen, CAS und GTR erstellt. Alle übrigen Grafiken und Fotos sind Eigentum des TRAUNER Verlags.

j-184

#### \*\*-4 - Stichwortverzeichnis

A

Addition, Matrizen 28

- Vektoren 24

-, Wurzeln 53

Additionsverfahren 9

ähnliche Dreiecke 102

ähnliche Figuren 102, 103

Ähnlichkeit 102

Algebra, Fundamentalsatz 94

allgemeine quadratische Gleichung 68, 79

allgemeines Dreieck, Flächeninhalt 105

Sätze 126

-, Umfang 105

Amplitude 136

Ankathete 117

Anwendungen, physikalische 56

äquivalente Gleichungssysteme 8

Asymptote 63, 135

Aufgaben aus der Wirtschaft 13, 16

B

Bedarfsvektor 26

Bewegungsaufgaben 13, 16

binomische Formeln 54

-, Wurzeln 54

Bogenmaß 133

-, Winkel 132

Brückenbögen 74

C

Cobb-Douglas-Funktionen 57

D

degressiv 68

Deltoid 108

Diagonalen, Viereck 108

Diskriminante 82

Distanztabelle 21

Doppellösung 83

Dreieck 101

-, gleichschenkeliges 107

-, gleichseitiges 107

-, rechtwinkeliges 106

-, Winkelsumme 101

Dreiecke, ähnliche 102

Dreiecksungleichung 101

E

eindeutige Lösung 11

Einheit 104

Einheitskreis 122

-, Kosinus 122

-, Kosinusfunktion 134

-, Sinus 122

-, Sinusfunktion 133

-, Tangens 122

-, Tangensfunktion 135

Einheitsmatrix 22, 43

Einsetzungsverfahren 8

Eliminationsverfahren 9

Energie, kinetische 56

erhabener Winkel 101

Erlös 76

erweiterte Matrix 40

Excel, lineare Gleichungssysteme 40

F

Faktorisieren 80

Falk, Schema 31

Figuren, ähnliche 102, 103

-, kongruente 102

Flächenformel, Heronsche 106

Flächeninhalt 104

-, allgemeines Dreieck 105

-, Kreis 109

-, Rechteck 104

-, rechtwinkeliges Dreieck 104

Flächeninhaltsformel, trigonometrische 126

freier Fall 75

Fundamentalsatz der Algebra 94

Fünfeck 122

Funktionen, periodische 134

-, quadratische 68, 69

G

Gauß'sches Eliminationsverfahren 9

Gegenkathete 117

Geometrie 99

gestreckter Winkel 101

Gewinn 76

gleichschenkeliges Dreieck 107

gleichseitiges Dreieck 107

Gleichsetzungsverfahren 9

Gleichungen höheren Grades 67

- n-ten Grades 94

-, quadratische 78

Gleichungssysteme, äquivalente 8

-, grafisches Lösen 10

-, lineare 7

-, Lösungsmenge 8

-, Lösungsverfahren 8

Glied, konstantes 69

-, lineares 69

-, quadratisches 69

Gozintograph 20, 30

grafisches Lösungsverfahren 10

große Lösungsformel 82

Grundparabel 61, 69

GTR, Matrizen 29

-, quadratische Gleichungen 84

H

Heronsche Flächenformel 106

Höhenlinien 121

Höhensatz 107

Höhenwinkel 130

Hyperbeln 62

Hypotenuse 106, 117

Hypotenusenabschnitte 106

I

interaktive Übungen 6

inverse Matrix 34

K

Kathete 106

Kathetensatz 107

keine Lösung 12

Keplersches Gesetz 57

kinetische Energie 56

kleine Lösungsformel 81

Koeffizienten 69

Kompetenzmodell, Standardmatrix 5

Komplementärwinkel 101

kongruente Figuren 102

Kongruenz 102

konstantes Glied 69

Kosinus, Einheitskreis 122

-, rechtwinkeliges Dreieck 118

Kosinusfunktion, Einheitskreis 134

Kosinussatz 129

Kosinuswert eines Winkels 123

Kosten 76

Kreis 109

-, Flächeninhalt 109

-, Radius 109

-, Umfang 109

Kreisbogen 109

Kreissegment 109

Kreissektor 109

Kreiszahl 109

kubische Parabel 61

L

Lagerbestandsvektor 26

leere Lösungsmenge 10

Leistungsverflechtungen 20

Leontief-Modell 42, 43, 47

linear abhängig 11

lineare Gleichungssysteme 7

-, Excel 40

-, Matrizen 39

lineares Glied 69

Linearfaktoren, Zerlegung 90

Linearkombination 25

Lösung, eindeutige 11

-, keine 12

Lösungen, unendlich viele 12

Lösungsformel, große 82

-, kleine 81

-, quadratische Gleichungen 80

Lösungsmenge 8

-, Gleichungssystem 8

Lösungsverfahren, Gleichungssysteme 8

-, grafisches 10

M

Maßstab 110

Matrix 21

-, erweiterte 40

-, inverse 34

-, m 'x n 21

-, quadratische 22

-, reduzierte zeilengestaffelte 41

-, transponierte 22

Matrizen, Addition 28

-, GTR 29

-, lineare Gleichungssysteme 39

-, Multiplikation 30, 32

-, Subtraktion 28

Matrizenrechnung 20

Messen 104

Multiplikation, Matrizen 30, 32

-, Vektoren 24

-, Wurzeln 53

N

Nenner, Rationalmachen 55

Normalform, quadratische Gleichung 79

normierte quadratische Gleichung 68

Nullstellen, Polynomfunktion 93

-, quadratische Funktion 78, 83

Nullwinkel 101

P

Parabel, kubische 61

-, quadratische 61

Parabeln 61, 69

-, verschobene 70

Parallelogramm 108

Pendel 60

periodische Funktion 134

physikalische Anwendungen 56

Pi 109

Polynomfunktionen 67, 92

-, Nullstellen 93

Potenzen mit rationalen Exponenten 50, 51, 52, 56

Potenzfunktionen 50, 61, 62

Potenzieren, Wurzeln 55

Potenzschreibweise 52

progressiv 68

Proportionalitätsfaktor 102, 103

Pythagoras, Satz des 107

Q

Quadrat 108

quadratische Funktionen 68, 69

-, Nullstellen 78, 83

quadratische Gleichung, allgemeine 68, 79

-, Normalform 79

-, normierte 68

quadratische Gleichungen 78

-, GTR 84

-, Lösungsformel 80

-, Spezialfälle 79

quadratische Matrix 22

quadratische Parabel 61

quadratisches Ergänzen 71

quadratisches Glied 69

j-185

R

rad 132

Radiant 132

Radikand 51

Radius, Kreis 109

Radizieren 51

rationale Hochzahlen, Potenzen 56

Rationalmachen des Nenners 55

Raute 108

Rechnen mit Wurzeln 53

Rechteck 108

-, Flächeninhalt 104

rechter Winkel 101

rechtwinkeliges Dreieck 106

-, Flächeninhalt 104

-, Kosinus 118

-, Seitenverhältnisse 118

-, Sinus 118

-, Tangens 118

Reduktionsformeln 125

reduzierte zeilengestaffelte Matrix 41

regelmäßige Vielecke 107

Rhombus 108

Rohstoffbedarf 30

rref-Befehl 41

S

Satz des Pythagoras 107

Satz von Thales 101

Satz von Vieta 90

Scheitel 71

Scheitelpunkt 71

Scheitelpunktform 71

Schema von Falk 31

Schularbeiten 6

Schwebung 137

Sechseck 108

Sehwinkel 130

Seitenverhältnisse, rechtwinkeliges Dreieck 118

Sinus, Einheitskreis 122

-, rechtwinkeliges Dreieck 118

Sinusfunktion, Einheitskreis 133

Sinussatz 126

Sinuswert eines Winkels 123

Skalarprodukt 24, 32

Spaltenvektor 22

spitzer Winkel 101

SSS-Satz 129

SSW-Satz 129

Standardmatrix, Kompetenzmodell 5

Standlinie 131

Stauchung 102, 103

Steigung 119, 120

Steigungsdreieck 103

Steigungswinkel 119, 120

stetig 92

Strahlensatz 103

Streckung 102, 103

stumpfer Winkel 101

Substitutionsverfahren 8

Subtraktion, Matrizen 28

-, Vektoren 24

-, Wurzeln 53

Supplementärwinkel 101

Symmetriebeziehungen 125

T

Tangens, Einheitskreis 122

-, rechtwinkeliges Dreieck 118

Tangensfunktion, Einheitskreis 135

Tangenswert eines Winkels 123

teilweises Wurzelziehen 54

Textaufgaben 13

Thales, Satz von 101

Theodolit 130

Tiefenwinkel 130

transponierte Matrix 22

transponierter Vektor 22

Trapez 108

Trigonometrie 117

trigonometrische Flächeninhaltsformel 126

U

Übungen, interaktive 6

Übungs-CD-ROM 6

Umfang, allgemeines Dreieck 105

-, Kreis 109

Umkehrfunktionen, Winkelfunktionen 135

unendlich viele Lösungen 12

V

Vektor, transponierter 22

Vektoraddition 24

Vektoren 22

-, Addition 24

-, Multiplikation 24

-, Subtraktion 24

Vektorsumme 24

Vermessungen, Winkel 130

Vermessungsaufgaben 130

verschachtelte Wurzeln 55

verschobene Parabeln 70

Videos 6

Vielecke, regelmäßige 107

Viereck 108

-, Diagonalen 108

Vieta, Satz von 90

voller Winkel 101

W

Winkel, Arten 101

-, Bezeichnung 101

-, Bogenmaß 132

-, erhabener 101

-, gestreckter 101

-, Kosinuswert 123

-, rechter 101

-, Sinuswert 123

-, spitzer 101

-, stumpfer 101

-, Tangenswert 123

-, Vermessungen 130

-, voller 101

Winkelfunktionen mit Technologie 136

-, reelle Funktionen 132

-, Umkehrfunktionen 135

Winkelfunktionswerte 124, 125

Winkelsumme, Dreieck 101

Wirtschaft, Aufgaben 13, 16

Wurfparabel 75

Wurzel 51

Wurzelexponent 51

Wurzelfreimachen 55

Wurzelfunktionen 65

Wurzeln, Addition 53

-, binomische Formeln 54

Multiplikation 53

-, Potenzieren 55

-, Subtraktion 53

-, verschachtelte 55

Wurzelschreibweise 52

Z

Zeilenvektor 22

j-186

Zeichen: ||

Sprechweise: (Absolut-) Betrag von, absolut

Erläuterung, Beispiele: |a| absolut a

-----

Zeichen: 'Si

Sprechweise: Summe

Erläuterung, Beispiele: 'Si[i =1;n](a\_i =a\_1 +a\_2 +... +a\_n)

-----

Zeichen: G, D, L

Sprechweise: Grund-, Definitions- und Lösungsmenge

Erläuterung, Beispiele: L ={-2, 3}

-----

Zeichen: [a; b]

Sprechweise: abgeschlossenes Intervall

Erläuterung, Beispiele: [a; b] ={x 'el 'R | a <=x <=b}

-----

Zeichen: ]a; b]

Sprechweise: halboffenes Intervall

Erläuterung, Beispiele: ]a; b] ={x 'el 'R | a <x <=b}

-----

Zeichen: ]a; b[

Sprechweise: offenes Intervall

Erläuterung, Beispiele: ]a; b[ ={x 'el 'R | a <x <b}

-----

Zeichen: 'w

Sprechweise: (Quadrat-)Wurzel aus

Erläuterung, Beispiele: 'w(a) (Quadrat-) Wurzel aus a

-----

Funktionen

f: D -> W D Definitionsmenge, W Wertemenge

x -< y =f(x) x zugeordnet y, y ist Funktion von x

f ={(x|y) | y =f(x)} Funktion in Mengenschreibweise

f^(-1): x -> y =f^(-1):(x)

Umkehrfunktion zu f: x -> y =f(x) mit y =f(x) <=> x =f^(-1):(y)

-----

Folgende Piktogramme haben wir für die verschiedenen Bereiche gewählt:

- Zum Nachdenken, Übungsaufgaben

Tipp - Für Wissenswertes, Tipps

Hinweis - Für besonders wichtige Hinweise

"DA" - Für Diskussionsaufgaben

Verknüpfung - Für Verknüpfungen zu einem anderen Gegenstand odereinem anderen Kapitel

Zum Buch gehört eine CD-ROM, auf der eine Vielzahl an vielseitigen Übungen und zusätzlichen Informationen zu den einzelnen Kapiteln zu finden sind. Anhand dieser Übungen soll der Stoff aus dem Buch vertieft und gefestigt werden.

-----

TRAUNER VERLAG

BILDUNG

Mathematik

Erklärungen Aufgaben Lösungen Formeln

inkl. Übungs-CD-ROM

Die Bände dieser Mathematikreihe sind für den Unterricht an kaufmännischen höheren Schulen erstellt. Besonderes Augenmerk wird auf die Kompetenzorientierung gelegt. Die Bücher bieten eine optimale Vorbereitung auf die standardisierte Reife- und Diplomprüfung.

Bei sämtlichen vollständig durchgerechneten Beispielen und Übungsaufgaben werden die vier Handlungskompetenzen berücksichtigt:

A - Modellieren und Transferieren

B - Operieren und Technologieeinsatz

C - Interpretieren und Dokumentieren

D - Argumentieren und Kommunizieren

Aus dem Inhalt

* Lineare Gleichungssysteme
* Matrizenrechnung
* Potenzen mit rationalen Exponenten und Potenzfunktionen
* Gleichungen höheren Grades und Polynomfunktionen
* Geometrie und Trigonometrie
* Lösungen

ISBN 978-3-99033-330-3

SBNr. 170.777

www.trauner.at

-----