Aufnahmetest

Aufgabennummer: 2_002	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: WS 2.3, WS 3.2, WS 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine Universität führt für die angemeldeten Bewerber/innen einen Aufnahmetest durch. Dabei werden zehn Multiple-Choice-Fragen gestellt, wobei jede Frage vier Antwortmöglichkeiten hat. Nur eine davon ist richtig. Wer mindestens acht Fragen richtig beantwortet, wird sicher aufgenommen. Wer alle zehn Fragen richtig beantwortet, erhält zusätzlich ein Leistungsstipendium. Die Ersteller/innen dieses Tests geben die Wahrscheinlichkeit, bei zufälligem Ankreuzen aller Fragen aufgenommen zu werden, mit 0,04158 % an. Nehmen Sie an, dass Kandidat K alle Antworten völlig zufällig ankreuzt.

Aufgabenstellung:

a) Nennen Sie zwei Gründe, warum die Anzahl der richtig beantworteten Fragen unter den vorliegenden Angaben binomialverteilt ist!
Geben Sie einen möglichen Grund an, warum in der Realität das Modell der Binomialverteilung hier eigentlich nicht anwendbar ist!

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass Kandidat K nicht aufgenommen wird!
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat K ein Leistungsstipendium erhält!

Möglicher Lösungsweg

a) Dieser Aufgabenteil ist durch sinngemäßes Angeben von mindestens zwei der vier angeführten Gründe richtig gelöst:

Die Anzahl der richtig beantworteten Fragen ist unter den vorliegenden Angaben binomialverteilt, weil

- es nur die beiden Ausgänge „richtig beantwortet" und „falsch beantwortet" gibt
- das Experiment unabhängig mit $n = 10$ Mal wiederholt wird
- die Erfolgswahrscheinlichkeit dabei konstant bleibt
- es sich dabei um ein „Bernoulli-Experiment" handelt

Der zweite Aufgabenteil ist korrekt gelöst, wenn ein Grund (sinngemäß) angeführt wird, z. B.:

- Eine Bewerberin/ein Bewerber, die/der sich für ein Studium interessiert, wird sicher nicht beim Aufnahmetest zufällig ankreuzen.
- Sobald Kandidat K auch nur eine Antwortmöglichkeit einer Frage ausschließen kann, wäre die Voraussetzung für die Binomialverteilung verletzt. Genau aus diesem Grund wird die Universität mit zehn Multiple-Choice-Fragen nicht das Auslangen finden, da die Erfolgswahrscheinlichkeit für kompetenzbasiertes Antworten sicher wesentlich höher ist als 0,25.
- Die Unabhängigkeit der Wiederholung des Zufallsexperiments ist sicher dadurch verletzt, dass die einzelnen Kandidatinnen und Kandidaten aufgrund ihrer Vorbildung unterschiedliche Erfolgswahrscheinlichkeiten für die Beantwortung der einzelnen Fragen aufweisen. Somit kann unter diesen Voraussetzungen niemals von einer unabhängigen Wiederholung mit Zählen der Anzahl der Erfolge im Sinne eines Bernoulli-Experiments gesprochen werden.

Es sind auch weitere eigenständige Lösungen denkbar.

b) Für die Lösung ist keine Binomialverteilung nötig, da das gesuchte Ereignis das Gegenereignis zur „Aufnahme" darstellt. Somit beträgt die (von den Testautorinnen und Testautoren) angegebene Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Ablehnung}) = 1 - P(\text{Aufnahme}) = 1 - 0{,}0004158 = 0{,}9995842$$

Die Ablehnung des Kandidaten K ist somit praktisch sicher.

Auch hier ist keine Binomialverteilung nötig, da ein Zufallsexperiment mit einer Erfolgswahrscheinlichkeit von 0,25 zehnmal unabhängig wiederholt wird, wobei bei jeder Wiederholung ein „Erfolg" eintritt.

Die Wahrscheinlichkeit beträgt somit $P(\text{Leistungsstipendium}) = 0{,}25^{10} \approx 0$.

Section Control

Aufgabennummer: 2_003	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: WS 1.1, WS 1.3, WS 3.1, WS 3.2, WS 3.3	

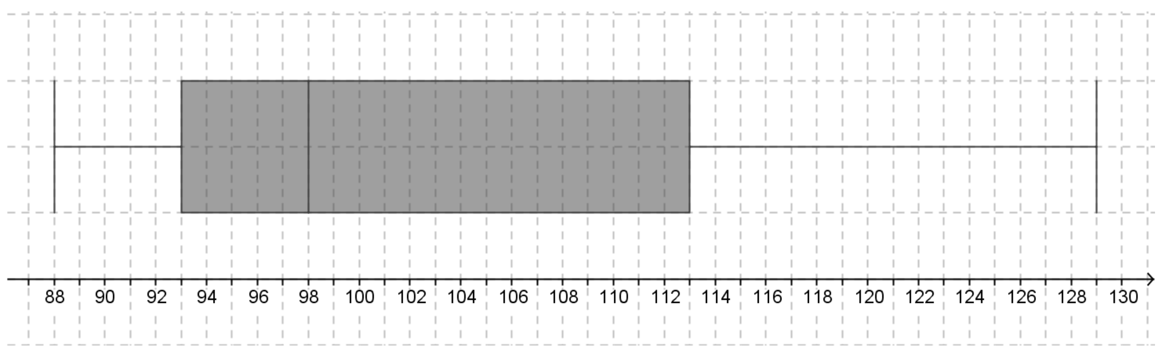
☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Der Begriff *Section Control* (Abschnittskontrolle) bezeichnet ein System zur Überwachung von Tempolimits im Straßenverkehr, bei dem nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen wird, sondern die Durchschnittsgeschwindigkeit über eine längere Strecke. Dies geschieht mithilfe von zwei Überkopfkontrollpunkten, die mit Kameras ausgestattet sind. Das Fahrzeug wird sowohl beim ersten als auch beim zweiten Kontrollpunkt fotografiert.

Die zulässige Höchstgeschwindigkeit bei einer bestimmten Abschnittskontrolle beträgt 100 km/h. Da die Polizei eine Toleranz kleiner 3 km/h gewährt, löst die *Section Control* bei 103 km/h aus. Lenker/innen von Fahrzeugen, die dieses Limit erreichen oder überschreiten, machen sich strafbar und werden im Folgenden als „Temposünder" bezeichnet.

Eine Stichprobe der Durchschnittsgeschwindigkeiten von zehn Fahrzeugen ist in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet und im abgebildeten Boxplot dargestellt.

v in km/h	88	113	93	98	121	98	90	98	105	129



Aufgabenstellung:

a) Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert $\bar{x}$ und die empirische Standardabweichung s der Durchschnittsgeschwindigkeiten in der Stichprobe!

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) zur Standardabweichung an!

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung um den arithmetischen Mittelwert.	☐
Die Standardabweichung ist immer ca. ein Zehntel des arithmetischen Mittelwerts.	☐
Die Varianz ist die quadrierte Standardabweichung.	☐
Im Intervall $[\bar{x} - s; \bar{x} + s]$ der obigen Stichprobe liegen ca. 60 % bis 80 % der Werte.	☐
Die Standardabweichung ist der arithmetische Mittelwert der Abweichungen von $\bar{x}$.	☐

b) Bestimmen Sie aus dem Boxplot (Kastenschaubild) der Stichprobe den Median sowie das obere und untere Quartil! Geben Sie an, welche zwei Streumaße aus dem Boxplot ablesbar sind! Bestimmen Sie auch deren Werte!

c) Die Erfahrung zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von mindestens 103 km/h zu erfassen, 14 % beträgt. Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ der Temposünder unter fünfzig zufällig ausgewählten Fahrzeuglenkern! Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Anzahl der Temposünder unter fünfzig Fahrzeuglenkern innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert, d. h. im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt!

Möglicher Lösungsweg

a) $\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i = 103{,}3$ km/h

$s = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = 13{,}6$ km/h

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung um den arithmetischen Mittelwert.	☒
Die Standardabweichung ist immer ca. ein Zehntel des arithmetischen Mittelwerts.	
Die Varianz ist die quadrierte Standardabweichung.	☒
Im Intervall $[\bar{x} - s; \bar{x} + s]$ der obigen Stichprobe liegen ca. 60 % bis 80 % der Werte.	☒
Die Standardabweichung ist der arithmetische Mittelwert der Abweichungen von $\bar{x}$.	

b) Daten aus dem Boxplot: Median … 98 km/h; unteres Quartil … 93 km/h;
oberes Quartil … 113 km/h; Spannweite … 41 km/h;
Quartilsabstand … 20 km/h

c) Lösung mittels Binomialverteilung

$\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}14 = 7$

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = 2{,}45$

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(5 \leq X \leq 9) =$
$= P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) =$
$= 0{,}1286 + 0{,}1570 + 0{,}1606 + 0{,}1406 + 0{,}1068 = 0{,}6936 = 69{,}36$ %

Wachstum einer Pflanze

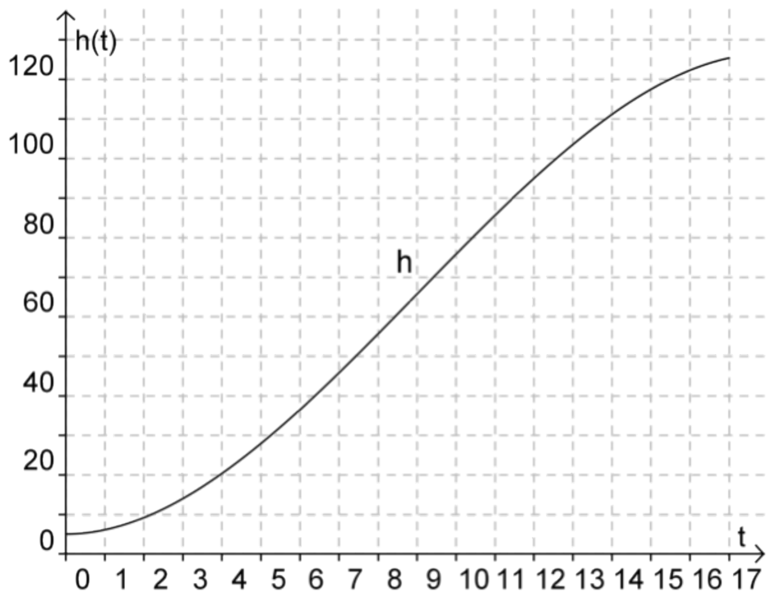
Aufgabennummer: 2_004	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.3, AN 1.3, AN 2.1, AN 3.3

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Manche einjährige Nutz- und Zierpflanzen wachsen in den ersten Wochen nach der Pflanzung sehr rasch. Im Folgenden wird nun eine spezielle Sorte betrachtet. Die endgültige Größe einer Pflanze der betrachteten Sorte hängt auch von ihrem Standort ab und kann im Allgemeinen zwischen 1,0 m und 3,5 m liegen. Pflanzen dieser Sorte, die im Innenbereich gezüchtet werden, erreichen Größen von 1,0 m bis 1,8 m.

In einem Experiment wurde der Wachstumsverlauf dieser Pflanze im Innenbereich über einen Zeitraum von 17 Wochen beobachtet und ihre Höhe dokumentiert. Im Anschluss wurde die Höhe h dieser Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit t durch eine Funktion h mit $h(t) = \frac{1}{24} \cdot (-t^3 + 27t^2 + 120)$ modelliert. Dabei bezeichnet t die Anzahl der Wochen seit der Pflanzung und $h(t)$ die Höhe zum Zeitpunkt t in Zentimetern. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion h im Beobachtungszeitraum [0; 17].



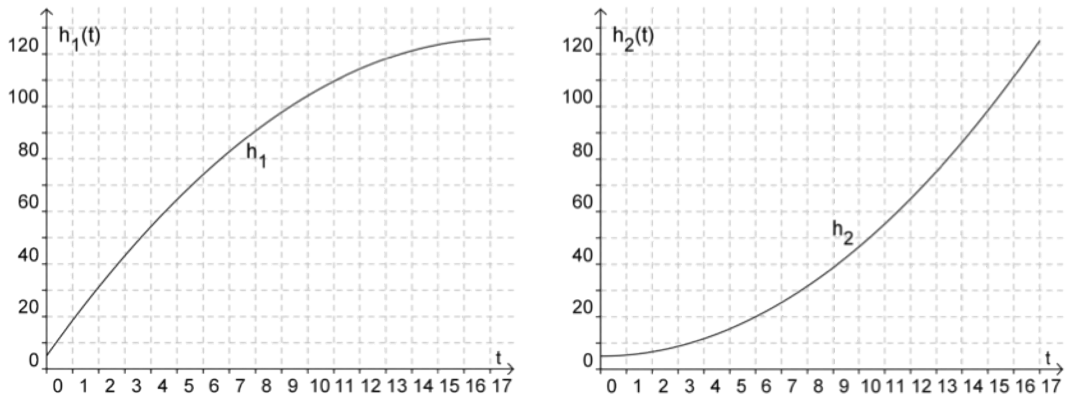
Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie den Wert des Quotienten $\frac{h(13) - h(9)}{4}$ und den Wert von $h'(9)$! Geben Sie an, welche Bedeutung die beiden berechneten Ergebnisse im gegebenen Kontext haben!

b) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Funktion h im gegebenen Intervall keinen lokalen Hochpunkt hat! Begründen Sie Ihre Rechenschritte!

c) Für das Wachstum der beobachteten Pflanze ist auch die entsprechende Düngung von Bedeutung. Im gegebenen Fall wurde die Pflanze zwei Wochen vor dem Zeitpunkt des stärksten Wachstums gedüngt. Ermitteln Sie diesen Zeitpunkt durch Rechnung! Begründen Sie Ihre Überlegungen!

d) Im selben Zeitraum wurde das Höhenwachstum von zwei weiteren Pflanzen der gleichen Sorte beobachtet und modelliert. Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Graphen der entsprechenden Funktionen h_1 und h_2.



Vergleichen Sie das Krümmungsverhalten der Funktionen h, h_1 und h_2 im Intervall [0; 17] und interpretieren Sie es im Hinblick auf das Wachstum der drei Pflanzen!

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{h(13) - h(9)}{4} \approx 9{,}47$

$h'(t) = \frac{1}{24} \cdot (-3t^2 + 54t) = \frac{1}{8} \cdot (-t^2 + 18t)$

$h'(9) \approx 10{,}13$

Die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit im Zeitintervall [9; 13] beträgt rund 9,5 cm pro Woche. Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 9$, d. h. nach 9 Wochen, beträgt rund 10,1 cm pro Woche.

b) In einem lokalen Hochpunkt muss die Tangente an den Graphen horizontal sein, d. h., die 1. Ableitung muss den Wert 0 haben.

$h'(t) = \frac{1}{24} \cdot (-3t^2 + 54t) = \frac{1}{8} \cdot (-t^2 + 18t)$

$t \cdot (-t + 18) = 0$
$t_1 = 0,\ t_2 = 18$

Die Funktion hat an der Stelle $t = 0$ ein lokales Minimum und an der Stelle $t = 18$ ein lokales Maximum. Der Wert $t = 18$ liegt nicht im Beobachtungsintervall, d. h., die Funktion hat im gegebenen Intervall keinen lokalen Hochpunkt.

c) $h''(t) = \frac{1}{4} \cdot (-t + 9)$

Die Kurve ist für $t < 9$ linksgekrümmt, d. h., die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt zu.
Die Kurve ist für $t > 9$ rechtsgekrümmt, d. h., die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt ab.
Daher ist die Wachstumsgeschwindigkeit nach 9 Wochen am größten. Die Pflanze wurde also am Beginn der 8. Woche gedüngt.

Ein weiterer Lösungsansatz wäre, das Maximum der Wachstumsfunktion (also von h') zu bestimmen.

d) Die Funktion h_1 ist rechtsgekrümmt, die Funktion h_2 ist linksgekrümmt, das Krümmungsverhalten der Funktion h ändert sich. Das bedeutet, die Wachstumsgeschwindigkeit derjenigen Pflanze, die durch h_1 beschrieben wird, wird immer kleiner (sie wächst immer langsamer) und die Wachstumsgeschwindigkeit derjenigen Pflanze, die durch h_2 beschrieben wird, wird immer größer (sie wächst immer schneller).

Im Vergleich dazu ändert sich das Monotonieverhalten der Wachstumsgeschwindigkeit bei derjenigen Pflanze, die durch h beschrieben wird, an der Stelle $t = 9$ [vgl. c)].

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Mathematikschularbeiten

Aufgabennummer: 2_005	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: WS 2.2, WS 3.1, WS 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Wenn in der Oberstufe in einem Semester höchstens zwei Mathematikschularbeiten vorgesehen sind, muss jede versäumte Schularbeit nachgeholt werden.
Ein Mathematiklehrer hat auf Basis seiner langjährigen Erfahrung die untenstehende Tabelle erstellt. Dabei beschreibt $h(n)$ die relative Häufigkeit, dass bei einer Schularbeit insgesamt n Schüler/innen fehlen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	> 7
$h(n)$	0,15	0,15	0,2	0,3	0,1	0,05	0,03	0,02	0

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie an, mit wie vielen Fehlenden der Mathematiklehrer im Durchschnitt bei jeder Schularbeit rechnen muss!

Lässt sich aus dem errechneten Durchschnittswert mit Sicherheit behaupten, dass bei jeder Mathematikschularbeit mindestens eine Schülerin/ein Schüler fehlt? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Es kann nie passieren, dass acht Schüler/innen bei einer Schularbeit fehlen.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Mathematikschularbeit niemand fehlt, ist gleich groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schülerin/ein Schüler fehlt.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Schüler/innen bei einer Mathematikschularbeit fehlen, ist größer als die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei oder mindestens vier Schüler/innen fehlen.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schularbeit nachgeholt werden muss, weil mindestens eine Schülerin/ein Schüler fehlt, beträgt 85 %.	☐
Im Durchschnitt muss eine von vier Schularbeiten pro Jahr nicht nachgeholt werden.	☐

In einer bestimmten Klasse werden im kommenden Schuljahr vier Schularbeiten (zwei pro Semester) geschrieben.
Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl der Mathematikschularbeiten dieser Klasse, die aufgrund fehlender Schüler/innen nachgeholt werden müssen, berechnet werden kann!

$P(X = k) =$ .... mit $k =$ ....

Möglicher Lösungsweg

a) Im Durchschnitt muss der Mathematiklehrer mit 2,42 Fehlenden rechnen.

Eine auf ganze Zahlen gerundete Antwort ist nicht korrekt, da der Erwartungswert nur statistische Aussagekraft hat und somit die Rundung die Aussage verändert.

Daraus lässt sich aber nicht mit Sicherheit behaupten, dass bei jeder Mathematikschularbeit jemand fehlt, da es sich dabei um eine statistische Kenngröße handelt, die keine konkrete Aussage über die einzelne Schularbeit erlaubt.

Eine Schülerantwort, die darauf abzielt, dass es entsprechend der empirischen Häufigkeitsverteilung mit 15%iger Häufigkeit zu keinem Fehlen kommt, ist als nicht korrekt zu bewerten, da in der Aufgabenstellung verlangt wird, den Erwartungswert zu interpretieren.

b)

Es kann nie passieren, dass acht Schüler/innen bei einer Schularbeit fehlen.	
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Mathematikschularbeit niemand fehlt, ist gleich groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schülerin/ein Schüler fehlt.	☒
Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Schüler/innen bei einer Mathematikschularbeit fehlen, ist größer als die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei oder mindestens vier Schüler/innen fehlen.	
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schularbeit nachgeholt werden muss, weil mindestens eine Schülerin/ein Schüler fehlt, beträgt 85 %.	☒
Im Durchschnitt muss eine von vier Schularbeiten pro Jahr nicht nachgeholt werden.	

$P(X = k) = \binom{4}{k} \cdot 0{,}85^k \cdot 0{,}15^{4-k}$ mit $k = 0, 1, \ldots, 4$

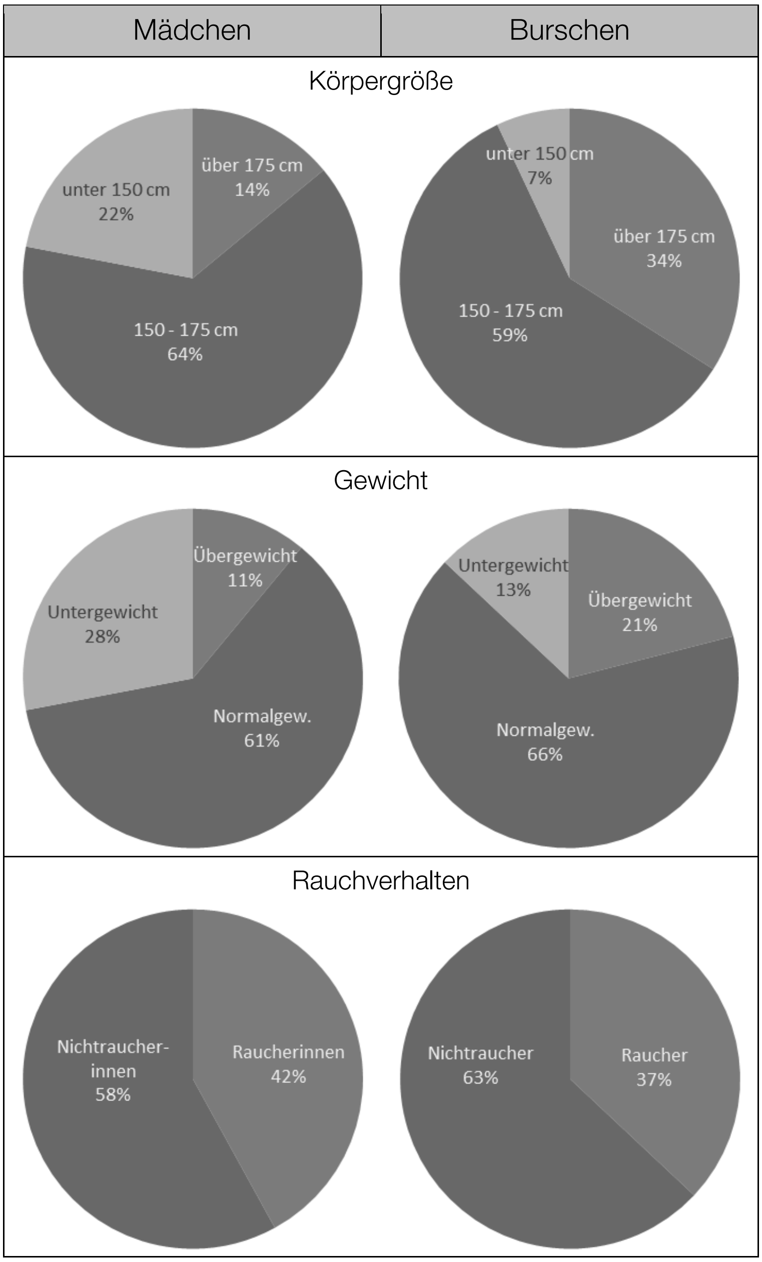
Ärztliche Untersuchung an einer Schule

Aufgabennummer: 2_006	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: WS 2.2, WS 3.1, WS 3.2

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine Schulärztin hat die Untersuchung der Oberstufenschüler/innen einer Schule abgeschlossen. Die Auswertung der Ergebnisse ist in den nachstehenden Abbildungen grafisch dargestellt.



Von den einzelnen Klassen wurde dabei folgende Schüleranzahl erfasst:

Klasse	5A	5B	6A	6B	7A	7B	8A	8B
weiblich	18	22	20	16	16	15	12	18
männlich	14	9	7	9	10	11	13	8
gesamt	32	31	27	25	26	26	25	26

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie auf Basis der erhobenen Daten einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis an, wobei angenommen wird, dass die angegebenen Prozentsätze unabhängig von der Schulstufe sind:

„In den 5. Klassen gibt es höchstens 2 Raucherinnen."

In dieser Schule wurden die Schüler/innen nicht nach Klassen geordnet untersucht, sondern jede/r entschied selbst, wann sie/er zur Schulärztin ging (zufällige Reihenfolge angenommen).
Wie viele Schüler/innen musste die Schulärztin untersuchen, um mit absoluter Sicherheit mindestens eine Raucherin/einen Raucher aus den 5. Klassen zu finden, wenn sie weiß, dass es in den 5. Klassen mindestens eine/n davon gibt?

b) Auf Basis der oben angeführten Daten wurde für die Burschen eines Jahrgangs der folgende statistische Kennwert ermittelt:

$$\mu = n \cdot p = 23 \cdot 0{,}34 = 7{,}82$$

Was drückt dieser Kennwert aus? Interpretieren Sie diesen Kennwert im gegebenen Zusammenhang und nutzen Sie dabei sowohl die grafische Abbildung der Untersuchungsergebnisse als auch die tabellarische Übersicht über die Klassenschülerzahlen.

Ist der so errechnete Kennwert aussagekräftig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Möglicher Lösungsweg

a) X … Anzahl der Raucherinnen aus allen 5. Klassen

X … Binomialverteilung mit $n = 40$, $p = 0,42$

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$

$$= \binom{40}{0} \cdot 0,42^0 \cdot 0,58^{40} + \binom{40}{1} \cdot 0,42^1 \cdot 0,58^{39} + \binom{40}{2} \cdot 0,42^2 \cdot 0,58^{38}$$

Da in der Angabe nur statistische Aussagen gemacht werden, aufgrund derer nicht mit Sicherheit behauptet werden kann, ob es mehr als eine Raucherin/einen Raucher in den 5. Klassen gibt, müssen alle Schüler/innen untersucht werden, um mit Sicherheit eine Raucherin/einen Raucher in der 5. Klasse zu finden.

b) In allen 5. Klassen zusammen gibt es 23 Burschen. Der Prozentsatz der Burschen mit einer Körpergröße von über 175 cm beträgt 34 %.

Somit drückt der berechnete Wert $\mu = n \cdot p = 23 \cdot 0,34 = 7,82$ die Anzahl der zu erwartenden Burschen in den 5. Klassen mit einer Körpergröße von über 175 cm aus.

Wesentlich für die Richtigkeit der Antwort sind:

– sinngemäße Formulierung für „Erwartungswert"
– Burschen aus 5. Klassen mit über 175 cm Körpergröße

Eine Rundung auf 8 ist in diesem Zusammenhang als falsch zu werten, da es sich bei μ nur um einen statistischen Kennwert und nicht um einen realen Ausgang eines Zufallsexperiments handelt.

Da die Daten für die gesamte Oberstufe ausgewertet sind und Schüler/innen während der Oberstufe noch wachsen, werden voraussichtlich weniger so große Schüler in den 5. Klassen zu finden sein. Somit ist der errechnete Erwartungswert nicht aussagekräftig bzw. sinnvoll.

Wesentlich für die Richtigkeit der Antwort ist die sinngemäße Darstellung einer der folgenden Interpretationen:

– Die unabhängige Wiederholung (im Sinne des Bernoulli-Experiments) ist nicht gegeben.
– Die verwendete Wahrscheinlichkeit (über 175 cm Körpergröße) bzw. relative Häufigkeit ist auf die beobachtete Eigenschaft (Bursch aus 5. Klassen) nicht anzuwenden.

Die Burschen/Jugendlichen wachsen im Laufe der Oberstufe, daher ist die relative Häufigkeit auf diese Gruppe nur eingeschränkt übertragbar.

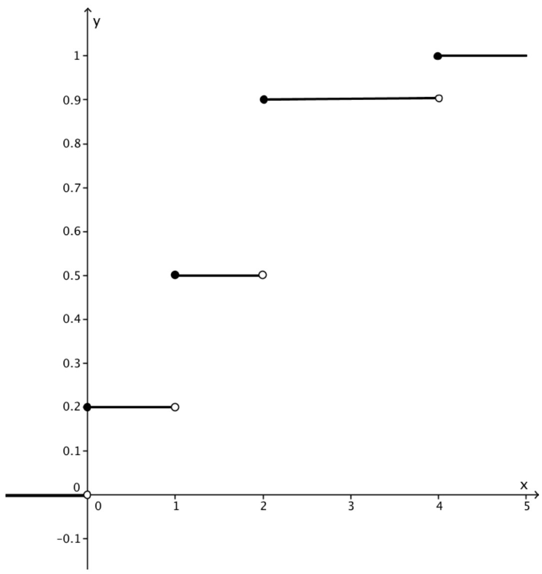
Glücksrad

Aufgabennummer: 2_007	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: FA 1.4, WS 3.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Auf einem Jahrmarkt werden nach dem Drehen eines Glücksrades € 0, € 1, € 2 oder € 4 ausbezahlt. Jedes Mal, bevor das Rad gedreht wird, ist eine Spielgebühr e (in €) zu entrichten.
Der Spielbetreiber hat für mathematisch Interessierte den Graphen einer sogenannten kumulativen Verteilungsfunktion F mit $F(x) = P(X \leq x)$ angegeben. Die Zufallsvariable X gibt dabei die Größe des auszuzahlenden Betrags an. Aus der Abbildung lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Auszahlungsbeträge ermitteln, wobei die Variable x angibt, welche Werte die Zufallsvariable X annimmt, d. h. wie groß die einzelnen auszuzahlenden Beträge sind.
Bei diesem Spiel sind sie, wie oben angegeben, € 0, € 1, € 2 oder € 4.



Aufgabenstellung:

a) Ermitteln Sie mithilfe der Graphik die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X und tragen Sie die entsprechenden Werte in der nachstehenden Tabelle ein!

Auszahlungsbetrag x in €	0	1	2	4
$P(X = x)$				

Begründen Sie, warum die Funktion F monoton steigend ist und warum das Maximum von F immer 1 sein muss!

b) Der Erwartungswert von X beträgt bei diesem Spiel € 1,50, d. h., im Mittel beträgt der auszuzahlende Betrag € 1,50.
Versetzen Sie sich in die Lage des Spielbetreibers. Wie groß wählen Sie den Betrag der Spielgebühr e pro Drehung mindestens, wenn Sie die Größe des Erwartungswerts von X kennen? Geben Sie eine Begründung für Ihre Wahl an!

Die Zufallsvariable Y gibt die Höhe des (tatsächlichen) Gewinns aus der Sicht der Spielerin/des Spielers an.
Welche Werte y wird der Gewinn in Abhängigkeit von e bei den bekannten Auszahlungsbeträgen € 0, € 1, € 2 oder € 4 annehmen?
Vervollständigen Sie die Tabelle und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y an!

Gewinn y in €				
$P(Y = y)$				

Möglicher Lösungsweg

a)

Auszahlungsbetrag x in €	0	1	2	4
$P(X = x)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Eine kumulierte Verteilungsfunktion entsteht durch Summenbildung der Einzelwahrscheinlichkeiten. Da die Einzelwahrscheinlichkeiten definitionsgemäß immer größer oder gleich 0 sein müssen, ist die Funktion F monoton steigend. Das Maximum muss 1 sein, da die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 1 ergeben muss.

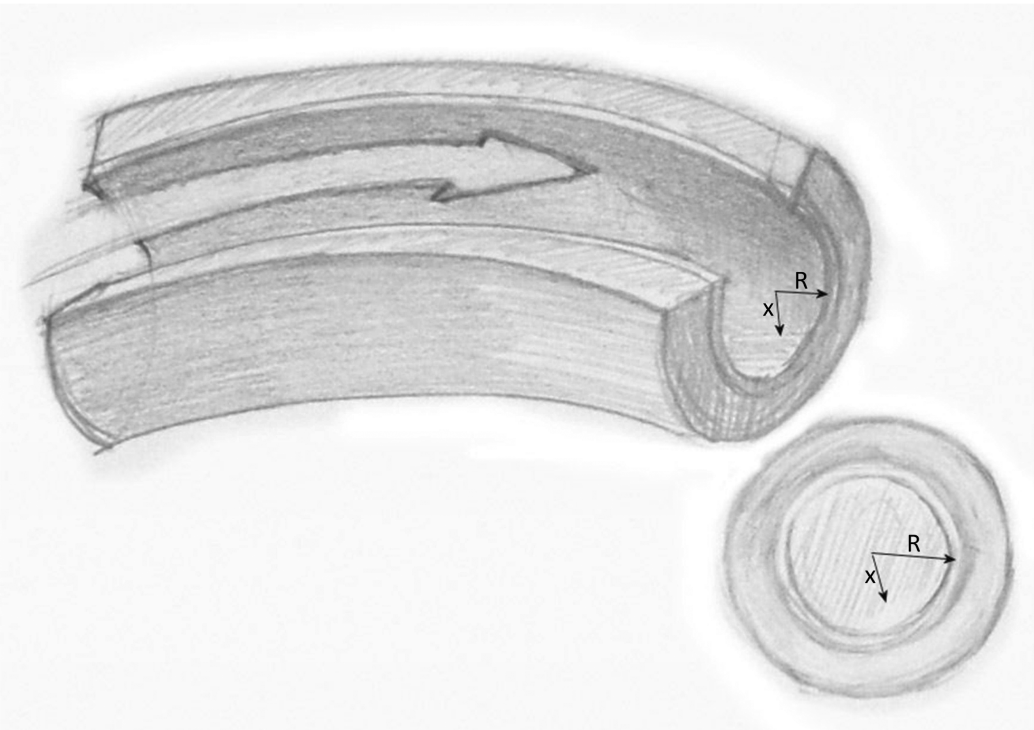
b) e muss größer als € 1,50 sein, da der Spielbetreiber auf lange Sicht einen Gewinn und keinen Verlust erzielen möchte, der sich aus $e - 1{,}5 > 0$ errechnet.

Gewinn y in €	$0 - e$	$1 - e$	$2 - e$	$4 - e$
$P(Y = y)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Blutgefäß

Aufgabennummer: 2_FT002	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒	
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, AN 2.1, FA 1.7		
☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

In einem Blutgefäß hängt die Geschwindigkeit v des Blutes davon ab, wie groß der Abstand x zum Mittelpunkt ist. Ein gültiger Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v und dem Abstand x kann mittels einer Formel $v(x) = v_m \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)$ modelliert werden.



(Bild aus http://www.gefaesschirurgie-klinik.de/patienteninformationen/arterienverkalkung.php, ergänzt durch Pfeile und Beschriftung)

Die in der Formel auftretenden Größen sind im Folgenden beschrieben:

R ... Innenradius des Blutgefäßes in mm
v_m ... maximale Geschwindigkeit des Blutes im Mittelpunkt des Blutgefäßes in cm/s
x ... Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes in mm
$v(x)$ ... Geschwindigkeit des Blutes bei Abstand x vom Mittelpunkt des Blutgefäßes in cm/s

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie einen Definitionsbereich für x an, der für das Blutgefäß sinnvoll ist, und begründen Sie, warum die Formel eine vereinfachte Beschreibung der Blutgeschwindigkeit ist!

b) In einem Lehrbuch der Medizin wird behauptet, dass beim Abstand $x = \frac{R}{2}$ die Geschwindigkeit des Blutes 75 % vom maximalen Wert beträgt. Um die Aussage mathematisch zu beweisen, wird der Ansatz $v(x) = \frac{3}{4} v_{\mathrm{m}}$ gemacht, und damit wird die Stelle x berechnet.

Führen Sie die Berechnung von der Stelle x aus und zeigen Sie, dass man mit der Berechnung des Funktionswerts $v\left(\frac{R}{2}\right)$ zum gleichen Ergebnis kommt!

c) Formen Sie die gegebene Formel für $v(x)$ so um, dass man eine Funktion $x(v)$ erhält!

Erläutern Sie, was der Funktionswert $x\left(\frac{v_{\mathrm{m}}}{2}\right)$ für die Blutströmung bedeutet!

d) Geben Sie die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit v (bei Veränderung von x) beim Abstand x an und geben Sie an, was das Vorzeichen der Änderungsrate über das Verhalten der Blutströmung aussagt!

Möglicher Lösungsweg

a) Der Definitionsbereich ist $[0; R]$ (Minimalanforderung: Angabe des Intervalls).
Negative Abstände ($x < 0$) sind sinnlos, und $x > R$ würde bedeuten, dass das Blutkörperchen außerhalb des Blutgefäßes ist.

Die Formel ist deswegen eine Vereinfachung, weil das Blut am Innenrand des Blutgefäßes bestimmt nicht die Geschwindigkeit 0 hat.
Außerdem setzt die Formel voraus, dass das Blutgefäß an jeder Stelle einen kreisförmigen Querschnitt mit einem konstanten Radius R hat bzw. dass das Blutgefäß exakt zylinderförmig ist (Venen haben auch Venenklappen).
Schließlich strömt das Blut zeitlich nicht mit konstanter Geschwindigkeit, die Blutgeschwindigkeit verändert sich periodisch.

b) Lösungsweg 1:
Umformen: $\frac{3}{4}v_m = v_m \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) \Rightarrow \frac{3}{4} = 1 - \frac{x^2}{R^2} \Rightarrow \frac{x^2}{R^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{R}{2}$

Lösungsweg 2:
$v\left(\frac{R}{2}\right) = v_m \cdot \left(1 - \frac{R^2}{4 \cdot R^2}\right) = v_m \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = v_m \cdot \frac{3}{4}$

An der genannten Stelle ist der Funktionswert wieder 75 % von v_m.

c) $x(v) = R \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{v_m}}$

$x\left(\frac{v_m}{2}\right)$ ist jener Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes, bei dem die Strömungsgeschwindigkeit auf die Hälfte des Maximalwertes abgesunken ist.

d) $v'(x) = -v_m \cdot \frac{2x}{R^2}$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Geschwindigkeitsfunktion im gesamten Definitionsbereich $[0; R]$ streng monoton fallend ist. Für die Blutströmung bedeutet das, dass die Geschwindigkeit des Blutes vom Mittelpunkt der Vene bis zum Rand der Vene abnimmt.
Auch eine kurze Formulierung ist als korrekt zu werten: Negatives Vorzeichen → Geschwindigkeit nimmt ab.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Zehnkampf

Aufgabennummer: 2_FT003	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AN 1.3, FA 1.5, FA 1.8, WS 2.3, WS 3.2

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☒ besondere Technologie (teilweise) erforderlich

Die „Königsdisziplin" der Leichtathletik ist bei den Männern der Zehnkampf. Dabei erhält jeder Athlet in jeder der 10 Disziplinen Punkte, die für jede Disziplin nach einer eigenen Formel errechnet werden. Für den Weitsprung gilt die Formel $P = 0{,}14354 \cdot (x - 220)^{1{,}4}$. Dabei ist x die Sprungweite in cm und P die Punktezahl (auf Ganze gerundet).
Im Bewerb sind 3 Sprünge erlaubt. Gewertet wird der weiteste fehlerfreie Sprung. Als Fehlversuch gilt in erster Linie das Übertreten beim Absprungbalken. Dies passiert in ca. 1 von 20 Versuchen. Der Weltrekord im Weitsprung liegt bei 895 cm.
Der Weltrekord im Zehnkampf wurde von Roman Šebrle 2001 beim Leichtathletikmeeting in Götzis aufgestellt und liegt bei 9026 Punkten. Seine Weitsprungleistung betrug dabei 811 cm.

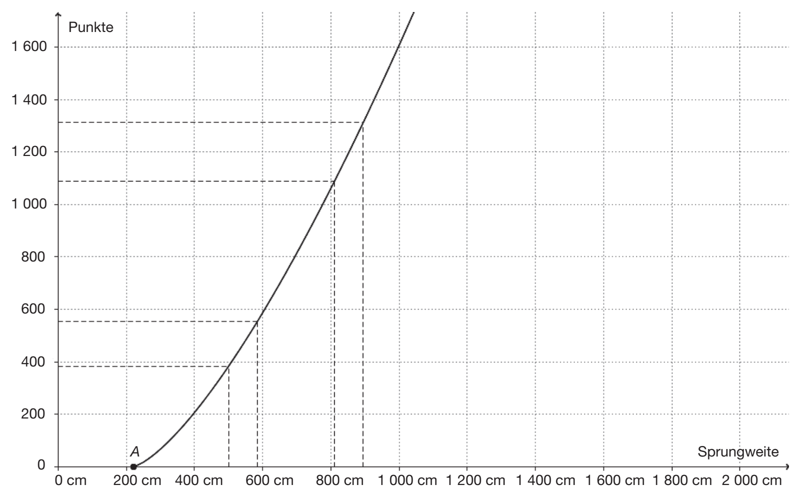
Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie, wie viele Punkte Roman Šebrle mehr erhalten hätte, wenn er die Weltrekordweite gesprungen wäre!

Begründen Sie mit der Formel, warum erst Sprünge ab 220 cm einen Punktwert ergeben!

b) Eine Sprungleistungssteigerung um 84 cm bringt nicht von jedem Ausgangswert den gleichen durchschnittlichen Punktezuwachs (in Punkten/cm). Zeigen Sie das für die Intervalle [500 cm; 584 cm] und [811 cm; 895 cm] durch Rechnung!

Begründen Sie mithilfe der untenstehenden Graphik, warum ein absolut gleicher Weitenzuwachs für größere Ausgangswerte mehr Punkte bringt als für kleinere Ausgangswerte!



c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Athlet die Weitsprungpunkte bei seinem Zehnkampf ohne Fehlversuch erhält!

Durch bessere Trainingsmethoden kann dieser Wahrscheinlichkeitswert erhöht werden, indem die Fehlerquote von 1 : 20 gesenkt wird, etwa auf 1 : n.

Wenn unter n Sprüngen nur ein Fehlversuch dabei ist, ergibt sich eine Erfolgsquote von $\frac{n-1}{n}$.
Begründen Sie damit, warum die oben genannte Wahrscheinlichkeit nie 1 sein kann!

Möglicher Lösungsweg

a) $f(895) \approx 1312$
$f(811) \approx 1089$
Er hätte um 223 Punkte mehr erzielt.

Die Basis (der Radikand) wird erst ab 220 cm ≥ null. *(oder eine sinngemäße Formulierung)*

b) $\frac{f(584) - f(500)}{584 - 500}$ bzw. $\frac{f(895) - f(811)}{895 - 811}$

im ersten Intervall: ca. 2,02 Punkte/cm
im zweiten Intervall: ca. 2,65 Punkte/cm

Begründung: f ist streng monoton wachsend und steigt im zweiten Intervall schneller.
(Jede sinngemäß formulierte Antwort ist richtig.)

c) X ... Anzahl der Fehlversuche
$p = \frac{1}{20}$
$q = p - 1 = \frac{19}{20}$

$P(X = 0) = ... = \left(\frac{19}{20}\right)^3 \approx 0{,}857$
d. h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 85,7 %

Begründung: Da der Zähler immer kleiner als der Nenner ist, ist $\frac{n-1}{n} < 1$. Daher muss auch die 3. Potenz < 1 sein.

Oder:
Sobald die Wahrscheinlichkeit für einen Fehlversuch größer als 0 ist, muss die Wahrscheinlichkeit, dass 3 Sprünge ohne Fehlversuch gelingen, kleiner als 1 sein.
(Sinngemäße Argumentationen möglich!)

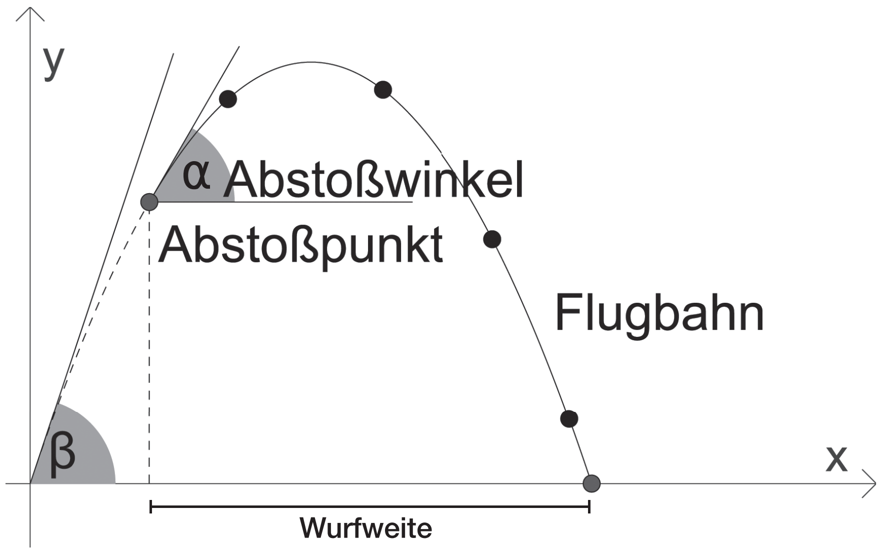
Kugelstoßen

Aufgabennummer: 2_FT004	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AN 1.3, AN 3.3, FA 1.2, FA 1.5

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☒ besondere Technologie erforderlich

Für die Beschreibung der Flugbahn der gestoßenen Kugel beim Kugelstoßen kann mit guter Näherung die Gleichung der Wurfparabel verwendet werden.
Diese Gleichung lautet: $y = \tan\beta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\beta} \cdot x^2$ ($g = 9{,}81$ m/s²).
Dabei ist v_0 die Abwurfgeschwindigkeit der Kugel und β der Winkel, unter dem die Parabel die x-Achse schneidet.
Die größte Wurfweite wird für $\beta = 45°$ erzielt.



Die Computersimulation der Flugbahn der gestoßenen Kugel eines Athleten ergab für eine Gleichung der Bahnkurve $y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$. Der Abstoßpunkt der Kugel befand sich in einer Höhe von 2,1 m.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Größe des Abstoßwinkels α und die maximale Höhe, die von der Kugel des Athleten erreicht wurde! Runden Sie auf cm!

b) Welche Wurfweite hat der Athlet erzielt? Welchen Einfluss hat die Größe der Fallbeschleunigung g bei sonst gleichen Bedingungen auf die Wurfweite? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Berechnen Sie für die Bahnkurve $y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$ die Größe des Winkels β und überprüfen Sie, ob dieser Athlet die größte Wurfweite erreicht hat!
Erläutern Sie, ob anhand der Parameter a und b in der allgemeinen Bahnkurve $y = ax - bx^2$ bereits feststellbar ist, ob eine Athletin/ein Athlet die größte Wurfweite erzielt hat!

Möglicher Lösungsweg

a) f: $y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$
Abstoßpunkt: Höhe 2,1 m
$2{,}1 = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2 \quad x_1 \approx 3{,}26 \quad x_2 \approx 10{,}74$

$f'(x) = 0{,}84 - 0{,}12 \cdot x \quad f'(3{,}26) = 0{,}4488 \quad \tan \alpha = 0{,}4488 \quad \alpha \approx 24{,}18°$ bzw. $\alpha \approx 0{,}42$ rad
$f'(x) = 0{,}84 - 0{,}12 \cdot x \quad 0 = 0{,}84 - 0{,}12 \cdot x \quad x = 7 \quad f(7) = 2{,}94$
Die maximale Höhe der Kugel betrug 2,94 m.

b) f: $y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$
Abstoßpunkt: Höhe 2,1 m
$2{,}1 = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2 \quad (x_1 \approx 3{,}26) \quad x_2 \approx 10{,}74$

Nullstellen: $0 = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2 \quad (x_1 = 0)$ und $x_2 = 14$
$14 - 3{,}26 = 10{,}74$
Die Wurfweite der Kugel war 10,74 m.
Die Wurfweite wird bestimmt durch die rechte Nullstelle der Parabel:

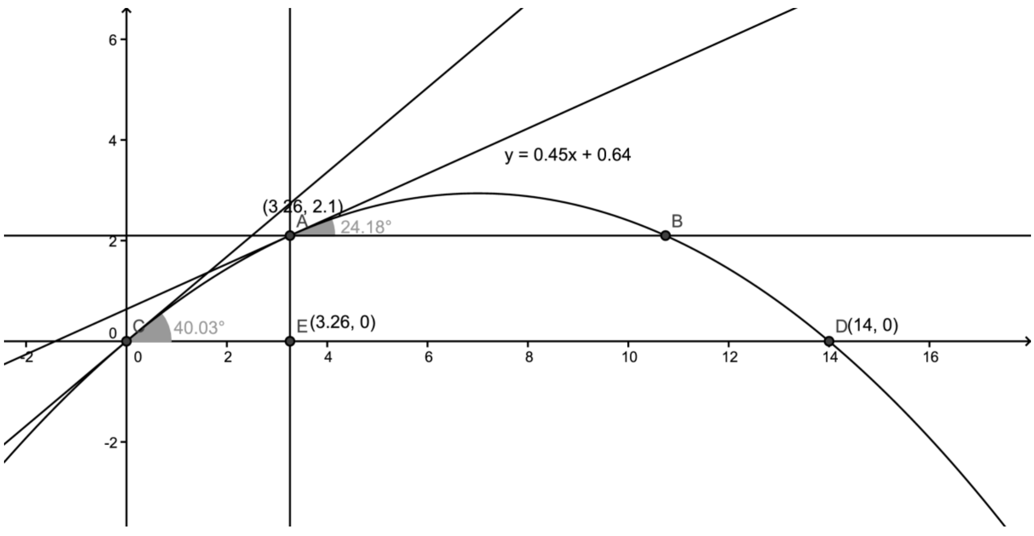
$$0 = \tan \beta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot x^2$$
$$0 = x \cdot \left(\tan \beta - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot x\right)$$
$$x = \frac{\tan \beta \cdot 2v_0^2 \cdot \cos^2 \beta}{g}$$

Bei größerem g wird die Wurfweite kleiner. Es liegt eine indirekte Proportionalität vor.

c) $f'(x) = 0{,}84 - 0{,}12 \cdot x \quad f'(0) = k \quad \tan \beta = k \quad \beta \approx 40{,}03° < 45°$

Da der Winkel β ungleich 45° ist, könnte der Athlet durch Veränderung des Abstoßwinkels eine größere Wurfweite erzielen.

Oder Lösung mithilfe von Technologie:



Bevölkerungsentwicklung

Aufgabennummer: 2_FT005	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AN 1.1, FA 2.2, FA 5.2, FA 5.3, FA 5.6, WS 1.1, WS 1.2

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☒ besondere Technologie (teilweise) erforderlich

Die Weltbevölkerung ist in den vergangenen Jahrhunderten unterschiedlich stark gewachsen. Für die weitere Entwicklung bis zum Ende dieses Jahrhunderts gibt es unterschiedliche Prognosen. Abbildung 1 zeigt die Bevölkerungsentwicklung in den vergangenen 3 000 Jahren.
Abbildung 2 zeigt die Bevölkerungsentwicklung von 1750 bis 2000.
Abbildung 3 zeigt die Bevölkerungsentwicklung von 1950 bis 2010.
Die untenstehende Tabelle zeigt die Bevölkerungsentwicklung nach Kontinenten und Subkontinenten von 1900 bis 2000.

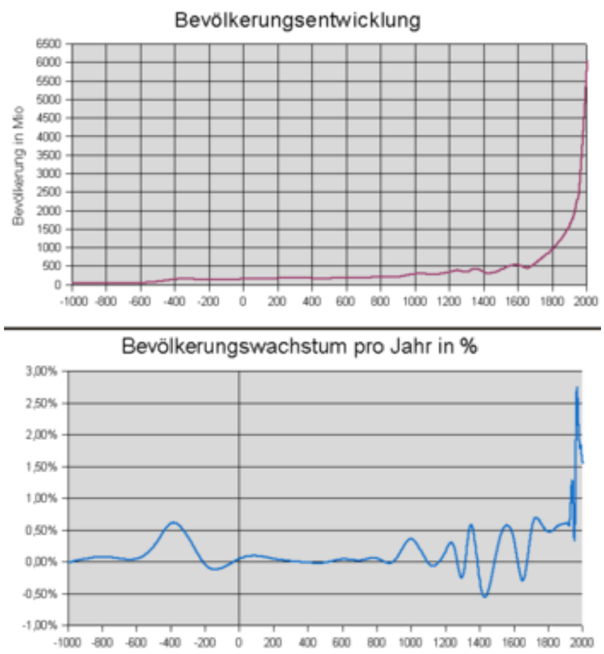


Abbildung 1

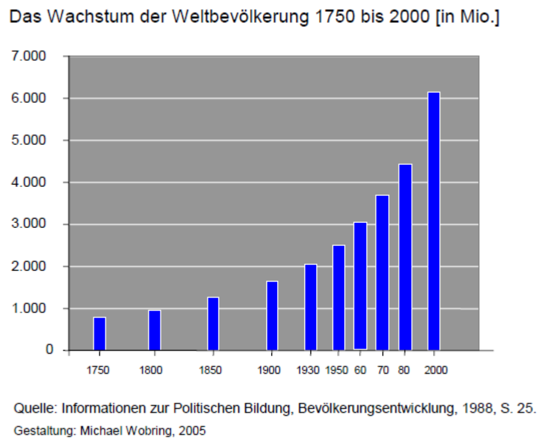


Abbildung 2

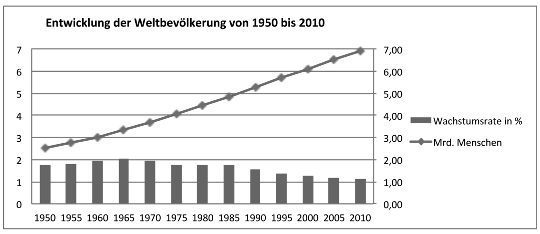


Abbildung 3

Jahr	Afrika	Asien	Europa	Lateinamerika	Nordamerika	Ozeanien
1900	133	925	430	74	82	6
1950	227	1 403	547	167	172	13
1975	419	2 379	676	323	242	21
2000	819	3 698	727	521	319	31

Aufgabenstellung:

a) Ermitteln Sie anhand der Abbildungen, um wie viele Menschen die Weltbevölkerung von 1600 bis 1800 zugenommen hat!

Nennen Sie zwei Zeiträume, in denen die Weltbevölkerung mindestens 100 Jahre lang abgenommen hat, und begründen Sie Ihre Antwort!

b) Die Weltbevölkerung hat von 1930 bis 1980 annähernd exponentiell zugenommen. Berechnen Sie unter dieser Annahme für diesen Zeitraum die jährliche Wachstumsrate auf Zehntelprozent genau!

c) Begründen Sie anhand der jährlichen Wachstumsraten aus Abbildung 3, warum die Entwicklung der Weltbevölkerung von 1950 bis 2010 nicht durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann!

Bei konstanter Zunahme der Bevölkerungszahl ab 2010 wird für das Jahr 2050 eine Bevölkerungszahl von 10,4 Milliarden prognostiziert.
Berechnen Sie, von welcher jährlichen Zunahme bei dieser Prognose ausgegangen wird! Geben Sie die jährliche Zunahme in Millionen Menschen an!

d) Angenommen, die absoluten Zahlen der Bevölkerungsentwicklung der Kontinente und Subkontinente im Zeitraum von 1900 bis 2000 werden in einem Säulendiagramm mit linearer Skalierung dargestellt.
Begründen Sie, warum die starke Bevölkerungszunahme in Ozeanien von 1900 bis 2000 in einem solchen Diagramm nicht erkennbar ist!

Gegeben sind fünf Aussagen zur Bevölkerungsentwicklung nach Kontinenten und Subkontinenten von 1900 bis 2000.
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Bevölkerung Asiens hat sich im 20. Jahrhundert annähernd vervierfacht.	☐
Seit Beginn des 20. Jahrhunderts lebten in Lateinamerika mehr Menschen als in Nordamerika.	☐
Im Zeitraum von 1975 bis 2000 war die relative Bevölkerungszunahme in Afrika am größten.	☐
In Europa war die Bevölkerungszunahme von 1975 bis 2000 geringer als von 1950 bis 1975.	☐
1950 lebten in Europa und Amerika zusammen bereits mehr als eine Milliarde Menschen.	☐

Möglicher Lösungsweg

a) Zunahme von 1600 bis 1800: ca. 500 Millionen Menschen

Die Weltbevölkerung hat mindestens 100 Jahre lang abgenommen in [250 v. Chr.; 50 v. Chr.] (bzw. [–250; –50]) und [1400; 1500], da in diesen Zeitintervallen das jährliche Bevölkerungswachstum in % negativ ist.

b) $N(t) = N_0 \cdot a^t$

$4{,}5 = 2 \cdot a^{50}$

$a \approx 1{,}016$, d. h. Zunahme um 1,6 % pro Jahr

c) Bei einer exponentiellen Zunahme ist die jährliche Wachstumsrate konstant. Abbildung 3 zeigt, dass diese Voraussetzung im Zeitraum von 1950 bis 2010 nicht erfüllt ist.

Konstante jährliche Zunahme von 2010 bis 2050:
$\frac{10{,}4 - 6{,}9}{40} = 0{,}0875$ Milliarden = 87,5 Millionen

d) Da die Bevölkerungszahl Ozeaniens von 1900 bis 2000 jeweils weniger als 1 % der Bevölkerungszahl Asiens betrug, sind die entsprechenden Säulen für Ozeanien sehr niedrig (Höhe fast null).
Daher ist die Verfünffachung der Bevölkerungszahl Ozeaniens nicht erkennbar.

Die Bevölkerung Asiens hat sich im 20. Jahrhundert annähernd vervierfacht.	☒
Seit Beginn des 20. Jahrhunderts lebten in Lateinamerika mehr Menschen als in Nordamerika.	
Im Zeitraum von 1975 bis 2000 war die relative Bevölkerungszunahme in Afrika am größten.	☒
In Europa war die Bevölkerungszunahme von 1975 bis 2000 geringer als von 1950 bis 1975.	☒
1950 lebten in Europa und Amerika zusammen bereits mehr als eine Milliarde Menschen.	

Höhe der Schneedecke

Aufgabennummer: 2_FT001	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AN 1.1, AN 1.3, FA 1.1, FA 2.2, FA 3.1

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☒ besondere Technologie erforderlich

Die Höhe $H(t)$ einer Schneedecke nimmt aufgrund von Witterungseinflüssen mit der Zeit t ab. Zuerst ist die Abnahme gering, mit der Zeit wird sie aber immer stärker. Daher kann die Höhe der Schneedecke durch folgende quadratische Funktion $H(t)$ beschrieben werden:

$$H(t) = H_0 - a \cdot t^2 \quad \text{mit} \quad a > 0,\ t \geq 0$$

(H wird in cm und t in Tagen gemessen, H_0 beschreibt die Schneehöhe zu Beginn der Messung)

Das beschriebene Modell gilt in guter Näherung bei einer Witterung mit gleichbleibender Temperatur bis zur vollständigen Schneeschmelze. Dabei wird vorausgesetzt, dass bis zur vollständigen Schneeschmelze kein weiterer Schnee hinzukommt.

Aufgabenstellung:

a) Eine 20 cm dicke Schneedecke reduziert sich innerhalb von 12 Stunden auf 18 cm. Nach wie vielen Tagen (von Anfang an) ist der Schnee gänzlich geschmolzen? Geben Sie die Lösung auf zwei Dezimalstellen genau an!

Wie wirkt sich eine Erhöhung des Parameters a auf $H(t)$ aus? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) In einem Alpendorf gilt für die Schneehöhe H (gemessen in cm) und die Zeit t (gemessen in Tagen) der folgende funktionale Zusammenhang:

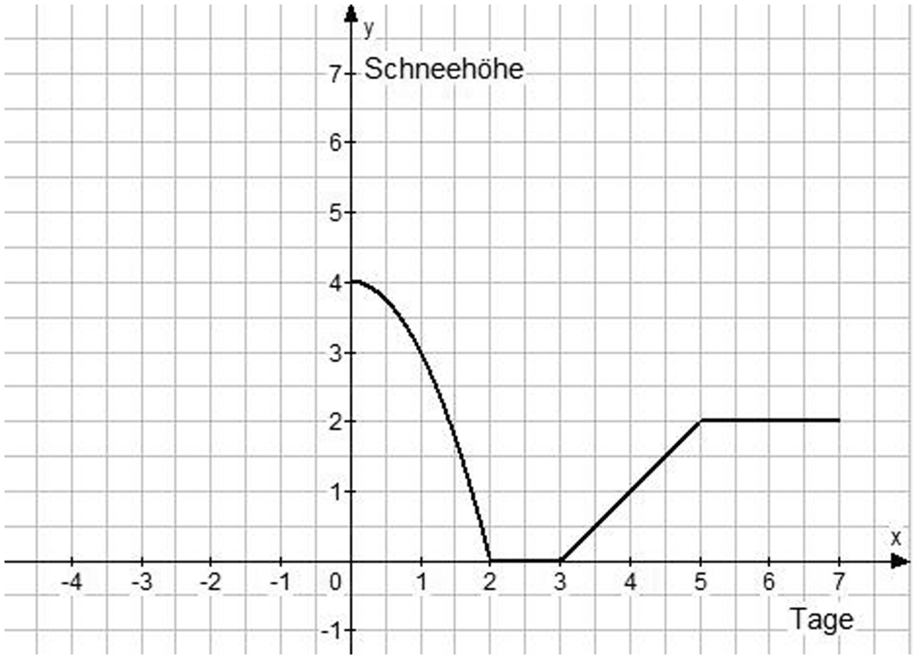
$$H(t) = 40 - 5t^2$$

Wie hoch ist die mittlere Änderungsrate der Schneehöhe innerhalb der ersten beiden Tage nach Beginn der Messung? Berechnen Sie diese!

Begründen Sie, warum die Berechnung der mittleren Änderungsrate im Zeitintervall [0; 3] mithilfe der angegebenen Funktion nicht sinnvoll ist, um Aussagen über den Verlauf der Höhe der Schneedecke zu machen!

c) Berechnen Sie $H'(0{,}5)$ für $H(t) = H_0 - a \cdot t^2$ und $a = 3$!
Deuten Sie das Ergebnis hinsichtlich der Entwicklung der Schneehöhe H!

d) Der folgende Graph beschreibt idealisiert den Verlauf der Schneehöhe in Dezimetern innerhalb einer Woche in einem Alpendorf.



Handelt es sich bei diesem Graphen um eine auf [0; 7] definierte Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bestimmen Sie die Gleichung $y = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ einer Funktion f, welche den Graphen im Intervall [3; 5] beschreibt!

Möglicher Lösungsweg

a) Frage 1:
$18 = 20 - a \cdot 0{,}5^2 \Rightarrow a = 8;\ \ 20 - 8t^2 = 0 \Rightarrow t = 1{,}58$ Tage

Frage 2:
Je größer *a*, desto schneller nimmt die Schneehöhe ab!

b) Frage 1:
$\frac{H(2) - H(0)}{2} = \frac{20 - 40}{2} = -10$ cm/Tag

Frage 2:
Der Anwendungsbereich (Definitionsbereich) der Formel $H(t)$ liegt im Bereich $[0; \sqrt{8}]$, wobei $\sqrt{8} \approx 2{,}8$ die positive Nullstelle von $H(t)$ ist.

Da [0; 2,8] eine Teilmenge des Intervalls [0; 3] ist, ist die Berechnung des Differenzenquotienten im Intervall [0; 3] nicht sinnvoll.

Oder:

An der Stelle $t = 3$ wird der Funktionswert $H(t)$ negativ. Die Schneehöhe H kann allerdings nicht negativ sein, daher ist die Berechnung der mittleren Änderungsrate im Intervall [0; 3] nicht sinnvoll.

c) Frage 1:
$H(t) = H_0 - 3 \cdot t^2$
$H'(t) = -6 \cdot t$
$H'(0{,}5) = -3$ cm/Tag

Frage 2:
Nach $t = 0{,}5$ Tagen nimmt die Schneedecke mit einer Abnahmegeschwindigkeit von −3 cm/Tag ab.

d) Frage 1:
Der Graph beschreibt eine Funktion, da jedem Zeitpunkt x genau eine Schneehöhe y zugeordnet wird.

Frage 2:
$f(3) = 0 \Rightarrow 0 = k \cdot 3 + d$
$f(5) = 2 \Rightarrow 2 = k \cdot 5 + d$
daher: $k = 1;\ d = -3$
$y = x - 3$

Gewinnfunktion

Aufgabennummer: 2_009	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.3, FA 1.4, FA 1.6, FA 1.7, FA 2.3

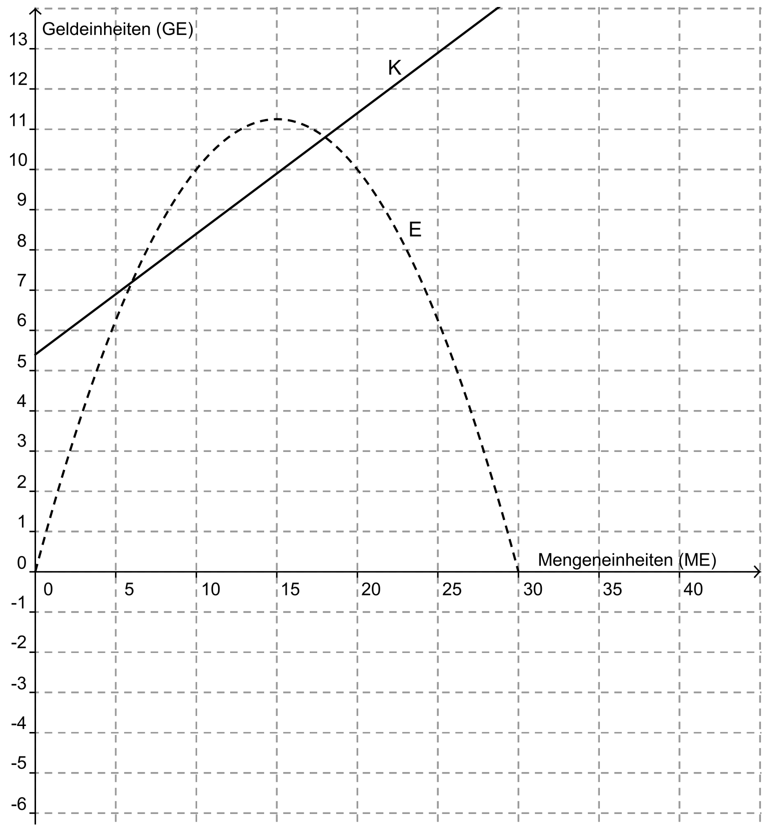
☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

In einem Unternehmen werden die Entwicklungen der Kosten K und des Erlöses E in Geldeinheiten (GE) bei variabler Menge x in Mengeneinheiten (ME) beobachtet. Als Modellfunktionen werden die Erlösfunktion E mit $E(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}5 \cdot x$ und eine Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}3 \cdot x + 5{,}4$ angewendet. Alle produzierten Mengeneinheiten werden vom Unternehmen abgesetzt.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen von E und K! Beschreiben Sie, welche Informationen die Koordinaten dieser Schnittpunkte für den Gewinn des Unternehmens liefern!

b) Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion G in die untenstehende Abbildung ein! Markieren Sie in der Abbildung den Gewinn im Erlösmaximum!



c) Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn, wenn 13 Mengeneinheiten produziert und abgesetzt werden!

Bei der gegebenen Kostenfunktion K gibt der Wert 5,4 die Fixkosten an. Im Folgenden werden Aussagen getroffen, die ausschließlich die Änderung der Fixkosten in Betracht ziehen. Kreuzen Sie die für den gegebenen Sachverhalt zutreffende(n) Aussage(n) an!

Eine Senkung der Fixkosten bewirkt eine breitere Gewinnzone, d.h., der Abstand zwischen den beiden Nullstellen der Gewinnfunktion wird größer.	☐
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf diejenige Stückzahl, bei der der höchste Gewinn erzielt wird.	☐
Eine Erhöhung der Fixkosten steigert die Höhe des maximalen Gewinns.	☐
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf die Höhe des maximalen Gewinns.	☐
Eine Senkung der Fixkosten führt zu einer Erhöhung des Gewinns.	☐

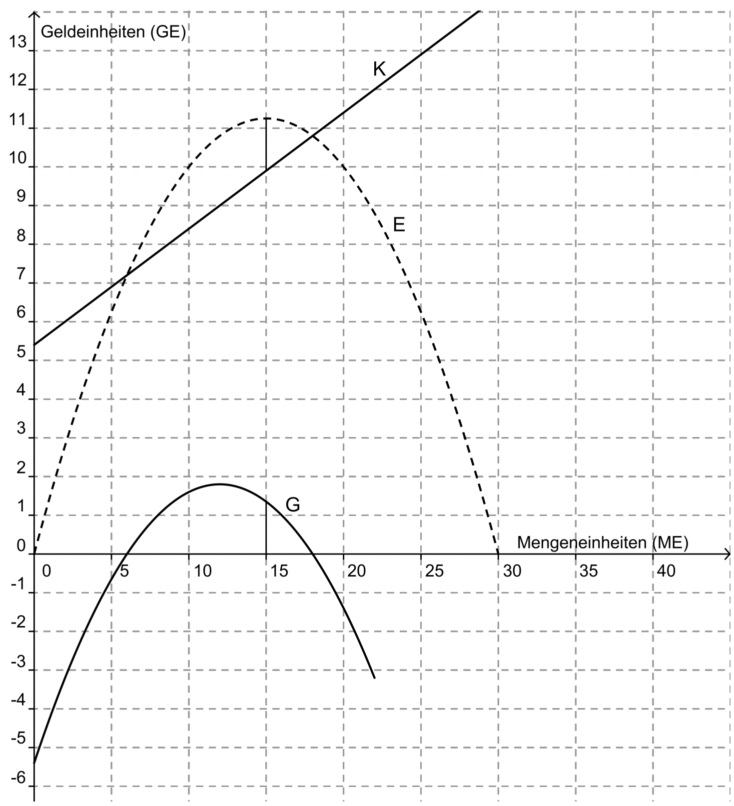
Möglicher Lösungsweg

a) $-0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}5 \cdot x = 0{,}3 \cdot x + 5{,}4$
$-0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}2 \cdot x - 5{,}4 = 0$

Die Lösung der quadratischen Gleichung führt zu den Lösungen $x_1 = 6$ und $x_2 = 18$
$\rightarrow S_1(6|7{,}2)$ und $S_2(18|10{,}8)$.

Reflexion beispielsweise:
Für die Mengen x_1 und x_2 sind Erlös und Kosten jeweils gleich groß, der Gewinn ist daher null.
Für die Stückzahlen x_1 und x_2 wird kein Gewinn erzielt.
Für den Stückzahlenbereich $(x_1; x_2)$ wird ein Gewinn erzielt.

b) *Eine der möglichen Markierungen für den Gewinn reicht in der Lösung aus.*



$G(x)$ einzeichnen

Markierung des Gewinns

c) $G(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}2 \cdot x - 5{,}4$
$G(13) = 1{,}75$ GE (Geldeinheiten)

Eine Senkung der Fixkosten bewirkt eine breitere Gewinnzone, d.h., der Abstand zwischen den beiden Nullstellen der Gewinnfunktion wird größer.	☒
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf diejenige Stückzahl, bei der der höchste Gewinn erzielt wird.	☒
Eine Erhöhung der Fixkosten steigert die Höhe des maximalen Gewinns.	
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf die Höhe des maximalen Gewinns.	
Eine Senkung der Fixkosten führt zu einer Erhöhung des Gewinns.	☒

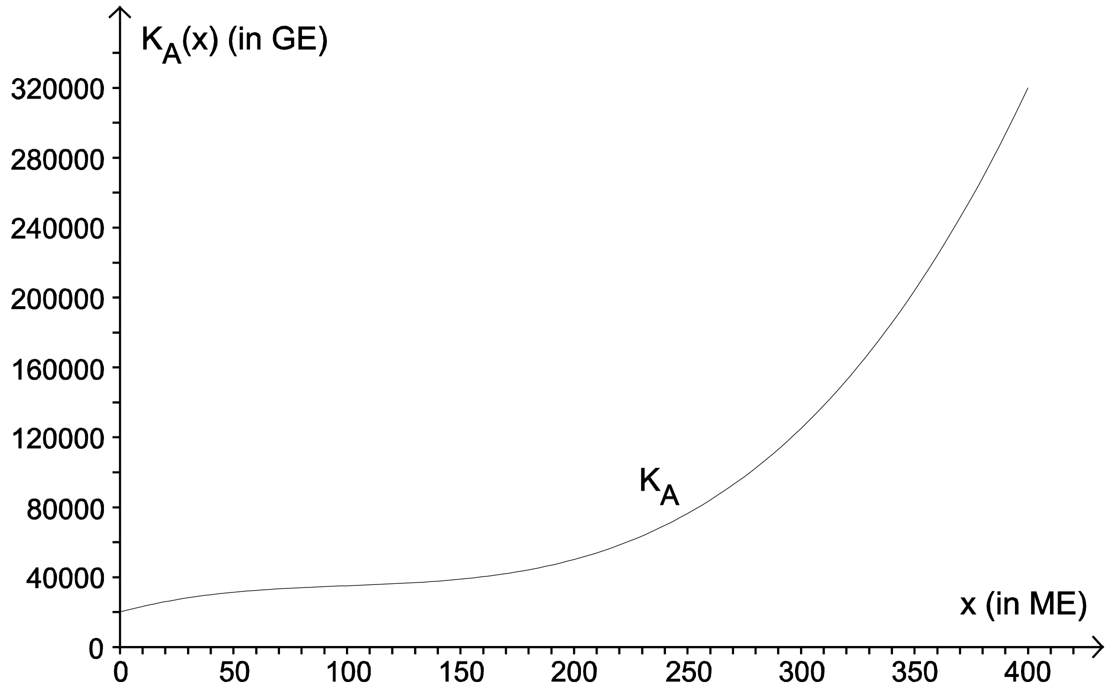
Kostenfunktion

Aufgabennummer: 2_012	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AN 1.3, AN 3.3, AG 2.3	

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Im Zuge einer betriebswirtschaftlichen Analyse und Beratung werden bei zwei Firmen die Kostenverläufe in Abhängigkeit von der Produktionsmenge untersucht.

Bei Firma A wird der Zusammenhang zwischen der monatlichen Produktionsmenge x (in Mengeneinheiten [ME]) und den entstehenden Produktionskosten $K_A(x)$ (in Geldeinheiten [GE]) durch die Kostenfunktion K_A mit $K_A(x) = 0{,}01x^3 - 3x^2 + 350x + 20\,000$ beschrieben. Firma A kann monatlich maximal 400 ME produzieren. In der untenstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion K_A im Intervall [0; 400] dargestellt.



Bei Firma B wird der Zusammenhang zwischen der monatlichen Produktionsmenge x (in ME) und den entstehenden Produktionskosten $K_B(x)$ (in GE) durch die Kostenfunktion K_B mit $K_B(x) = 0{,}5x^2 + 100x + 15\,000$ beschrieben. Firma B kann monatlich maximal 300 ME produzieren.

Aufgabenstellung:

a) Untersuchen Sie, ob der Kostenverlauf bei Firma B progressiv oder degressiv ist! Begründen Sie Ihre Antwort!

Allgemein kann eine solche Kostenfunktion in Abhängigkeit von den produzierten Mengeneinheiten durch eine Polynomfunktion f zweiten Grades mit
$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) beschrieben werden.

Für welche Werte von a liegt im streng monoton wachsenden Bereich der Funktion ein progressiver bzw. ein degressiver Kostenverlauf vor? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Die erste Ableitung einer Kostenfunktion bezeichnet man als *Grenzkostenfunktion*. Diese beschreibt näherungsweise die Kostensteigerung, wenn der Produktionsumfang vergrößert wird. Berechnen Sie, um wie viel GE sich der Wert der Grenzkostenfunktion bei einem Produktionsumfang von $x = 50$ ME vom tatsächlichen Zuwachs der Kosten bei Firma A unterscheidet, wenn der Produktionsumfang von 50 ME auf 51 ME erhöht wird!

Für die vorliegende Kostenfunktion gilt die Aussage: „Die Funktionswerte der Grenzkostenfunktion sind immer positiv.“ Interpretieren Sie diese Aussage im Hinblick auf den Verlauf!

c) Für die Festlegung des Produktionsplans ist es erforderlich, die durchschnittlichen Kosten pro erzeugter ME in Abhängigkeit von der Produktionsmenge zu kennen. Die Stückkostenfunktion gibt den durchschnittlichen Preis pro erzeugter ME an.

Ermitteln Sie die Stückkostenfunktion $\overline{K}_B(x)$ bei Firma B!
Geben Sie an, bei welcher Produktionsmenge die durchschnittlichen Stückkosten bei Firma B am kleinsten sind!

Möglicher Lösungsweg

a) $K_B(x) = 0{,}5x^2 + 100x + 15\,000$

$K_B'(x) = x + 100$

$K_B''(x) = 1 > 0$

Da die zweite Ableitung positiv ist, ist die Funktion linksgekrümmt. Es liegt progressives Wachstum vor.

Andere richtige Begründungen (z. B. anhand des Graphen) sind auch zulässig.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Wenn $a > 0$ ist, ist der Graph der Kostenfunktion linksgekrümmt. Es liegt progressives Wachstum vor.

Wenn $a < 0$ ist, ist der Graph der Kostenfunktion rechtsgekrümmt. Es liegt degressives Wachstum vor.

b) Grenzkostenfunktion $K_A'(x) = 0{,}03x^2 - 6x + 350$

$K_A'(50) = 125$

$K_A(51) - K_A(50) = 31\,373{,}51 - 31\,250 = 123{,}51$

Der Wert der Grenzkostenfunktion bei einem Produktionsumfang von $x = 50$ ME unterscheidet sich vom tatsächlichen Zuwachs der Kosten bei Firma A um 1,49 GE.

Da die Kostenfunktion $K(x)$ im angegebenen Bereich monoton steigend ist, gilt $K'(x) > 0 \rightarrow$ die Funktionswerte der Grenzkostenfunktion (= Ableitungsfunktion der Kostenfunktion) sind also immer positiv.

c) $K_B(x) = 0{,}5x^2 + 100x + 15\,000$

$\overline{K}_B(x) = \dfrac{K_B(x)}{x}$

$\overline{K}_B(x) = 0{,}5x + 100 + \dfrac{15\,000}{x}$

$\overline{K}_B'(x) = 0{,}5 - \dfrac{15\,000}{x^2}$

$\overline{K}_B'(x) = 0 \quad\rightarrow\quad 0{,}5x^2 = 15\,000 \quad\rightarrow\quad x = \sqrt{30\,000}$

$x \approx 173{,}2$

Bei einer Produktion von ca. 173 Mengeneinheiten sind die durchschnittlichen Stückkosten bei Firma B am kleinsten.

Schwarzfahren als Volkssport

Aufgabennummer: 2_014	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.2, FA 1.7, FA 5.2, WS 2.3, WS 3.1, WS 3.3

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Im Jahr 2010 wurden in den Graz-Linien exakt 36 449 Schwarzfahrer und Schwarzfahrerinnen auf frischer Tat ertappt.
„Ihren Fahrschein, bitte!" – diese freundliche, aber bestimmte Aufforderung treibt Schwarzfahrern regelmäßig den Angstschweiß ins Gesicht. Zu Recht, heißt es dann doch 65 Euro Strafe zahlen. Mehr als 800 000 Fahrscheinkontrollen wurden im Vorjahr in den Grazer Bus- und Straßenbahnlinien durchgeführt. 36 449 Personen waren Schwarzfahrer. Gegenüber 2009 ist das ein leichtes Minus von 300 Beanstandungen. Für die Graz-Linien ist das ein Beweis für den Erfolg der strengen Kontrollen. Für den Vorstand der Graz-Linien steht darum eines fest: „Wir werden im Interesse unserer zahlenden Fahrgäste auch 2011 die Kontrollen im gleichen Ausmaß fortsetzen." Denn den Graz-Linien entgehen durch den Volkssport Schwarzfahren jedes Jahr Millionen. Rechnet man die Quote der bei den Kontrollen ertappten Schwarzfahrer (ca. 5 %) auf die Gesamtzahl der beförderten Personen hoch (ca. 100 Mio. pro Jahr), dann werden aus 36 449 schnell fünf Millionen, die aufs Ticket pfeifen ... (Quelle: Meine Woche Graz, April 2011, adaptiert)

In diesem Zeitungsartikel wird der Begriff *Schwarzfahrer* für Personen, die ohne gültigen Fahrschein angetroffen werden, verwendet. Fahrgäste, die ihre Zeitkarte (z. B. Wochenkarte, Schülerfreifahrtsausweis) nicht bei sich haben, gelten nicht als Schwarzfahrer/innen.

Nach Angaben der Graz-Linien beträgt der Anteil der Schwarzfahrer/innen etwa 5 %.

Zwei Kontrolleure steigen an der Haltestelle *Jakominiplatz* in einen Wagen der Straßenbahnlinie 5 und kontrollieren alle 25 Fahrgäste. An der Haltestelle *Hauptplatz* steigen sie in einen Wagen der Linie 3 um, in dem sie alle 18 Fahrgäste kontrollieren.

Aufgabenstellung:

a) Es soll die Wahrscheinlichkeit p_1 berechnet werden, dass die Kontrolleure mindestens eine Schwarzfahrerin/einen Schwarzfahrer ermitteln, aber erst in der Linie 3 auf diese Person treffen. Geben Sie einen geeigneten Term an, mit dem diese Wahrscheinlichkeit p_1 ermittelt werden kann, und berechnen Sie diese!

Es sei p_2 die Wahrscheinlichkeit, bereits im Wagen der Linie 5 auf mindestens eine Schwarzfahrerin/einen Schwarzfahrer zu treffen. Begründen Sie, warum p_2 größer als p_1 sein muss, ohne p_2 zu berechnen!

b) Es wird angenommen, dass bei den durchgeführten Kontrollen nur 1 % aller fünf Millionen Personen, die keinen Fahrschein mithaben, entdeckt werden. Man weiß, dass 10 % dieser fünf Millionen Personen eine Zeitkarte besitzen, die sie aber nicht bei sich haben, und daher nicht als Schwarzfahrer/innen gelten. Wird eine Schwarzfahrerin/ein Schwarzfahrer erwischt, muss sie/er zusätzlich zum Fahrpreis von € 2 noch € 65 Strafe zahlen. Gehen Sie davon aus, dass im Durchschnitt die nicht erwischten Schwarzfahrer/innen jeweils entgangene Einnahmen eines Einzelfahrscheins von € 2 verursachen.

Berechnen Sie den in einem Jahr durch die Schwarzfahrer/innen entstandenen finanziellen Verlust für die Grazer Linien!

Das Bußgeld müsste wesentlich erhöht werden, um eine Kostendeckung zu erreichen. Ermitteln Sie den neuen Betrag für ein kostendeckendes Bußgeld!

c) Die Anzahl der entdeckten Schwarzfahrer/innen nahm gegenüber 2009 um 300 ab und betrug 2010 nur mehr 36 449. Man geht davon aus, dass durch verstärkte Kontrollen eine weitere Abnahme der Anzahl an Schwarzfahrerinnen/Schwarzfahrern erreicht werden kann.

Beschreiben Sie diese Abnahme beginnend mit dem Jahr 2009 sowohl als lineares als auch als exponentielles Modell!

Geben Sie jeweils einen Funktionsterm an, der die Anzahl S der Schwarzfahrer/innen nach t Jahren, ausgehend von dem Jahr 2009, beschreibt!

Berechnen Sie die Anzahl der Schwarzfahrer/innen nach 10 Jahren, also im Jahr 2019, mit beiden Modellen! Welche Schlussfolgerungen über die beiden Modelle ziehen Sie aus dem Ergebnis?

Möglicher Lösungsweg

a) $p_1 = 0{,}95^{25} \cdot (1 - 0{,}95^{18}) \approx 0{,}1672$

Mögliche Argumentationen:

- Die Wahrscheinlichkeit p_1 ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, unter 18 Personen mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu finden. Die Wahrscheinlichkeit p_2, bereits im Wagen der Linie 5 auf mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu treffen, ist größer als die Wahrscheinlichkeit p_1, da die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Kontrollierten eher 1 Schwarzfahrer/in anzutreffen, größer ist als unter 18 Kontrollierten.
- Die Wahrscheinlichkeit p_1 ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Personen keine Schwarzfahrerin/keinen Schwarzfahrer zu finden. Diese ist kleiner als 0,5. Die Wahrscheinlichkeit p_2 ist die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Personen mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu treffen. p_2 ist größer als 0,5, also $p_2 > p_1$.

b) Der zu erwartende Verlust wird wie folgt berechnet:

10 % der Fahrgäste ohne Fahrschein besitzen eine Zeitkarte, daraus folgt, dass 90 % von den 99 % Schwarzfahrer/innen sind.

$V = (-0{,}99 \cdot 0{,}9 \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 0{,}9 \cdot 65) \cdot 5\,000\,000 = (-0{,}891 \cdot 2 + 0{,}009 \cdot 65) \cdot 5\,000\,000 \approx -1{,}197 \cdot 5\,000\,000 \approx$ € $-5.985.000$

Soll der Verlust $V = 0$ sein, dann gilt: $0 = -0{,}891 \cdot 2 + 0{,}009 \cdot B \rightarrow B =$ € 198.
Das Bußgeld B müsste auf € 198 erhöht werden.

c) lineare Abnahme: $S(t) = 36\,749 - 300 \cdot t$
exponentielle Abnahme: $S(t) = 36\,749 \cdot (36\,449/36\,749)^t$

Bei linearer Abnahme sind es nach 10 Jahren noch 33 749, bei exponentieller Abnahme 33 857 Personen. Der Unterschied ist gering und beide Modelle sind für diesen Zeitraum gleich gut.

Produktionskosten*

Aufgabennummer: 2_016	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: FA 1.6, FA 2.3, FA 1.5, FA 2.2, AN 3.3, AN 1.3	

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

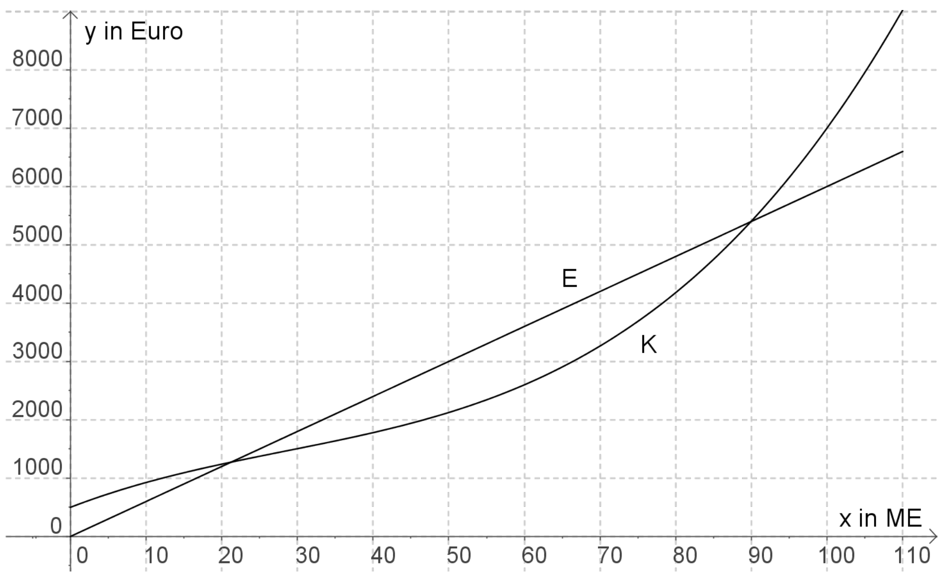
Die Produktionskosten eines Betriebes setzen sich aus Fixkosten und variablen Kosten zusammen und können durch eine Kostenfunktion beschrieben werden. Fixkosten fallen auf jeden Fall an und sind unabhängig von der produzierten Menge. Variable Kosten hingegen nehmen mit steigender Produktionsmenge zu.

Die Kostenkehre ist jene Produktionsmenge, ab der die variablen Kosten immer stärker steigen, in diesem Fall spricht man von einem progressiven Kostenverlauf. Vor der Kostenkehre ist der Kostenverlauf degressiv, das heißt, die Kosten steigen bei zunehmender Produktionsmenge immer schwächer.

Der Verkaufserlös ist das Produkt aus der verkauften Stückzahl und dem Verkaufspreis pro Stück.

Die untenstehende Abbildung zeigt die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E des Betriebes, wobei x die Anzahl der produzierten und verkauften Mengeneinheiten (ME) pro Tag ist. 1 ME entspricht einer Verpackungseinheit von 100 Stück. Pro Tag können höchstens 110 ME produziert werden.

Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Produktionskosten.



* Diese Aufgabe wurde dem unter https://www.bifie.at/node/1976 abrufbaren Dokument *Exemplarische Typ-2-Aufgaben* entnommen.

Aufgabenstellung:

a) Ermitteln Sie anhand der obigen Abbildung den Gewinnbereich, das sind jene Stückzahlen (1 ME = 100 Stück), für die der Betrieb Gewinn erzielt!
Beschreiben Sie, wie sich eine Senkung des Verkaufspreises auf den Verlauf des Graphen der Erlösfunktion *E* auswirkt und wie sich dadurch der Gewinnbereich verändert!

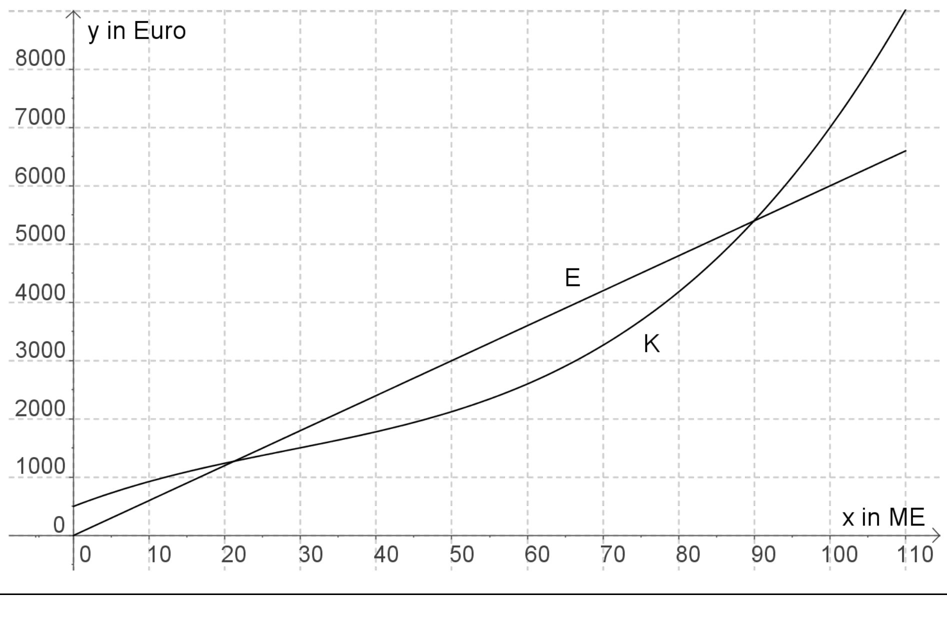
b) Bestimmen Sie anhand der Abbildung die Fixkosten und den Verkaufspreis pro ME möglichst genau!

c) Welche der nachstehenden Aussagen treffen für die in der Grafik abgebildeten Produktionskosten zu? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Bei degressivem Kostenverlauf gilt: $K'(x) < 0$.	☐
Bei progressivem Kostenverlauf gilt: $K''(x) > 0$.	☐
Bei der Kostenkehre gilt: $K'(x) = 0$.	☐
Für alle x aus dem Definitionsbereich [0 ME; 110 ME] gilt: $K'(x) > 0$.	☐
Es gilt: $K'(50) > K'(90)$.	☐

Erklären Sie ausführlich, was die 1. und die 2. Ableitung der Kostenfunktion an einer bestimmten Stelle über den Verlauf des Graphen von *K* an dieser Stelle aussagen!

d) Deuten Sie die Beziehung $K'(x) = E'(x)$ geometrisch und ermitteln Sie anhand der nachstehenden Abbildung jene Produktionsmenge x_1, für die dies zutrifft!
Begründen Sie, warum der erzielte Gewinn bei dieser Produktionsmenge x_1 am größten ist!



Möglicher Lösungsweg

a) Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn **beide** Grenzen des Grenzbereichs richtig angegeben sind, z. B.: *Bei einer Produktion von 2 100 bis 9 000 Stück wird Gewinn erzielt* (Toleranz bei Gewinngrenzen: ± 100 Stück).

Weiters muss eine richtige Interpretation angeführt sein, wie sich eine Senkung des Verkaufspreises auf den Gewinnbereich auswirkt, z. B.: *Bei einer Senkung des Verkaufspreises verläuft der Graph von E flacher, wodurch der Gewinnbereich kleiner („schmäler“) wird.*

Als richtig zu werten ist auch die Antwort, dass bei einer starken Senkung des Verkaufspreises bei allen Produktionsmengen Verlust erzielt wird.

b) **Fixkosten**: 500 Euro (Toleranz: ± 100 Euro)

Verkaufspreis pro ME: $\frac{3000}{50}$ = 60 Euro (Toleranz: ± 5 Euro)

Falls der Verkaufspreis durch ein „zu kleines“ Steigungsdreieck sehr ungenau abgelesen wird (z. B. 50 Euro), so ist das Ergebnis als falsch zu werten.

c) Es müssen die beiden zutreffenden Aussagen angekreuzt sein.

Bei progressivem Kostenverlauf gilt: $K''(x) > 0$.	☒
Für alle x aus dem Definitionsbereich [0 ME; 110 ME] gilt: $K'(x) > 0$.	☒

Zudem muss eine Erklärung angegeben sein, z. B.:
K′(x) beschreibt die Steigung der Kostenfunktion (oder: Steigung der Tangente) an der Stelle x (bei Produktion von x ME).
K″(x) beschreibt die Änderung der Steigung, also das Krümmungsverhalten der Kostenfunktion an der Stelle x.
Im degressiven Bereich ist der Graph von K rechtsgekrümmt und im progressiven Bereich ist der Graph von K linksgekrümmt.

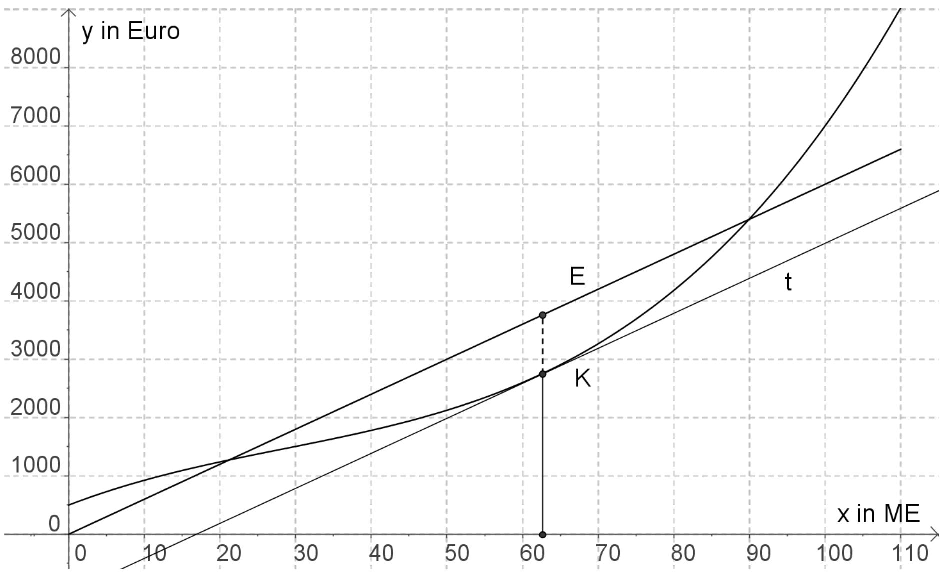
Auch folgende bzw. alle anderen inhaltlich richtigen Formulierungen sind als richtig zu werten:
K′ beschreibt das Monotonieverhalten von K, d. h. falls K′(x) > 0 ist, steigt K an der Stelle x.
K″ beschreibt das Monotonieverhalten von K′, d. h. falls K″(x) > 0 ist, steigt K′ an der Stelle x (d. h., die Kostensteigerung nimmt zu).

Anmerkung: Aus der Antwort muss jedenfalls ersichtlich sein, welche geometrische Bedeutung K' und K'' besitzen, der Begriff *Monotonieverhalten* alleine ist nicht ausreichend.

d) Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn die richtige geometrische Deutung angegeben ist und x_1 bestimmt ist (falls x_1 nur eingezeichnet ist, der Wert aber nicht angegeben ist, so ist dies auch als richtig zu werten), z. B.: *Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph von K und der Graph von E an dieser Stelle die gleiche Steigung besitzen.*
Oder: *Die Tangente t an den Graphen von K verläuft parallel zum Graphen von E.*
Dies ist bei ca. 63 ME der Fall (Toleranz: ± 3 ME).

Zudem muss die Interpretation angegeben sein, dass an der gesuchten Stelle $G'(x) = 0$ gilt und somit $G(x_1)$ der maximale Gewinn ist, z. B.: *Wegen der Beziehung $G(x) = E(x) - K(x)$ gilt: $G'(x) = E'(x) - K'(x)$.*
Somit gilt: $G'(x_1) = E'(x_1) - K'(x_1) = 0$ und $G(x_1)$ ist daher der maximale Gewinn.
(Anmerkung: Der Nachweis des Maximums (Monotoniewechsel von G an der Stelle x_1) ist nicht erforderlich.)

Auch die geometrische Begründung, dass der vertikale Abstand zwischen Erlös- und Kostenkurve an der Stelle x_1 am größten ist, ist als richtig zu werten, falls dieser Abstand (strichlierte Linie) richtig eingezeichnet ist.



Emissionen

Aufgabennummer: 2_017	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AN 1.1, WS 1.1, AN 1.3, FA 1.9

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Laut Immissionsschutzgesetz – Luft (IG-L) gilt auf manchen Autobahnabschnitten in Österreich für PKW eine Tempo-100-Beschränkung, wenn die Grenzwerte für bestimmte Luftschadstoffe überschritten werden. Für LKW gilt ein generelles Tempolimit von 80 km/h.

Abbildung 1 zeigt vier Messwerte für die freigesetzte Menge von Stickoxiden (NO_x) bei unterschiedlichen Fahrgeschwindigkeiten (in km/h) für einen durchschnittlichen PKW. Die freigesetzte NO_x-Menge wird in Gramm pro gefahrenem Kilometer angegeben. Die Abhängigkeit von Fahrgeschwindigkeit und NO_x-Ausstoß wurde durch eine Funktion A modelliert, deren Graph ebenfalls in Abbildung 1 dargestellt ist.

Abbildung 2 zeigt den Anteil der Verkehrsmittel (PKW, LKW, sonstige) am Verkehrsaufkommen und am Ausstoß (= Emission) von Stickoxiden und Feinstaub (PM 10) im Unterinntal in Tirol.

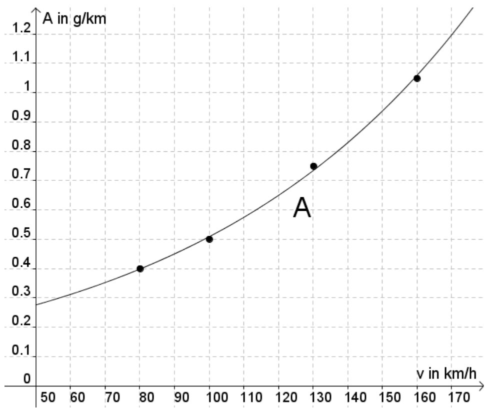


Abbildung 1

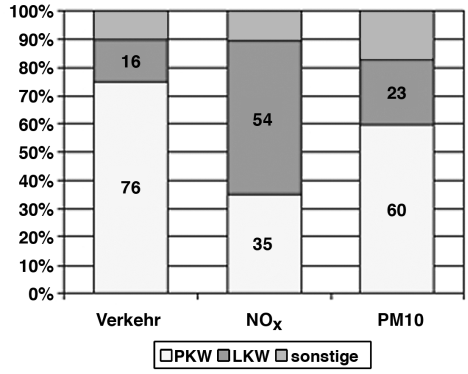


Abbildung 2

Quelle: http://www.tirol.gv.at/themen/verkehr/verkehrsplanung/verkehrsprojekte/tempo100

Aufgabenstellung:

a) Ermitteln Sie anhand der Messwerte in Abbildung 1, um wie viele Prozent der Stickoxid-Ausstoß eines PKW abnimmt, wenn statt der sonst erlaubten 130 km/h nur mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h gefahren werden darf!
Ist der Stickoxid-Ausstoß eines PKW direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit? Begründen Sie Ihre Antwort anhand des Graphen der Modellfunktion A in Abbildung 1.

* Diese Aufgabe wurde dem unter https://www.bifie.at/node/1976 abrufbaren Dokument *Exemplarische Typ-2-Aufgaben* entnommen.

b) Verursachen im Tiroler Unterinntal die Verkehrsmittel mit dem größten Anteil am Verkehrsaufkommen auch die meisten Stickoxid- bzw. Feinstaub-Emissionen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Geschwindigkeitsmessungen auf der Autobahn A12 im Tiroler Unterinntal haben gezeigt, dass die Geschwindigkeitslimits von mehr als 90 % der Verkehrsteilnehmer/innen eingehalten werden und weniger als 1 % der Verkehrsteilnehmer/innen die Geschwindigkeitslimits um mehr als 10 % überschreiten. Die Geschwindigkeitsüberschreitungen können daher für die folgende Fragestellung vernachlässigt werden.
Begründen Sie, welche der beiden Maßnahmen (A oder B) wirkungsvoller ist, wenn entlang der A12 die Stickoxid-Emissionen weiter reduziert werden sollten! Durch Maßnahme A eventuell anfallende zusätzliche Emissionen durch die Bahn werden vernachlässigt.

A eine Verlagerung der Hälfte des Gütertransports durch LKW auf die Schiene (d. h. Transport der LKW mit der Bahn)
B ein Tempolimit von 80 km/h für PKW und LKW

Entnehmen Sie die für die Begründung benötigten Werte den Abbildungen 1 und 2 und führen Sie diese an!

c) Ermitteln Sie rechnerisch anhand von Abbildung 1 das Ergebnis des Ausdrucks $\frac{A(160) - A(100)}{60}$ auf vier Dezimalstellen genau!
Interpretieren Sie das Ergebnis dieses Ausdrucks im Hinblick auf die NO_x-Emissionen!

d) Zur Modellierung der in Abbildung 1 dargestellten Abhängigkeit des NO_x-Ausstoßes A von der Fahrgeschwindigkeit v kommen unterschiedliche Funktionstypen in Frage.

Welche Funktionstypen können zur Modellierung der Funktion A verwendet worden sein? Kreuzen Sie die beiden geeigneten Funktionsgleichungen an!

$A(v) = a \cdot v + b$ mit $a > 0, b > 0$	☐
$A(v) = a \cdot v^2 + b$ mit $a < 0, b > 0$	☐
$A(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ mit $a > 0, c > 0, b \in \mathbb{R}$	☐
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b > 1$	☐
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b < 1$	☐

Begründen Sie, warum die drei restlichen Funktionsgleichungen für die Modellierung von A in Abbildung 1 nicht geeignet sind!

Möglicher Lösungsweg

a) Richtige Berechnung der Abnahme der NO_x-Emissionen: $\frac{0,5}{0,75} \approx 0,67$.
Der Stickoxid-Ausstoß nimmt um ungefähr 33 % ab.
Alle Ergebnisse im Intervall [30 %; 35 %] sind als richtig zu werten.

Auch die Antwort, dass die Emissionen bei einer Reduktion der Geschwindigkeit auf 100 km/h nur mehr 67 % des Wertes bei 130 km/h betragen, ist als richtig zu werten (Lösungsintervall, falls die noch vorhandenen Emissionen angegeben werden: [65 %; 70 %]).

Zudem muss eine Begründung angegeben sein, dass A nicht direkt proportional zu v ist, z. B.: *Der Stickoxid-Ausstoß ist nicht direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit, weil der Graph von A nicht linear verläuft.*

Auch andere, aus der Abbildung ableitbare Formulierungen wie z. B. *Nicht direkt proportional, weil sich die Emissionen mehr als verdoppeln, wenn die Geschwindigkeit verdoppelt wird*, aufgrund derer eine direkte Proportionalität ausgeschlossen werden kann, sind als richtig zu werten.

b) Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn sinngemäß begründet ist, dass PKW zwar den größten Anteil an den Feinstaub-Emissionen besitzen, bei den Stickoxid-Emissionen aber die LKW die Hauptverursacher sind, z. B.: *Im Tiroler Unterinntal haben PKW mit 76 % den größten Anteil am Verkehrsaufkommen. Sie verursachen mit 60 % zwar den größten Anteil der Feinstaub-Emissionen, aber nur 35 % der Stickoxid-Emissionen.*
Anmerkung: Die Zahlenwerte müssen nicht angeführt sein.

Zudem muss eine schlüssige Begründung angegeben werden, dass Maßnahme A wirkungsvoller für eine Stickoxid-Reduktion ist, z. B.: *LKW verursachen 54 % der NO_x-Emissionen im Straßenverkehr, obwohl ihr Anteil am Verkehrsaufkommen nur 16 % beträgt. Eine Reduktion des LKW-Verkehrs auf die Hälfte würde die NO_x-Emissionen um ca. 27 % reduzieren.*
PKW haben zwar einen Anteil von 76 % am Verkehrsaufkommen, sind aber nur für 35 % der NO_x-Emissionen verantwortlich. Durch eine Reduktion des Tempolimits von 130 km/h auf 80 km/h könnten laut Abbildung 1 maximal die Hälfte dieser Emissionen, also etwa 17 %, vermieden werden. Eine Verlagerung der Hälfte des LKW-Verkehrs auf die Schiene wäre daher die wirkungsvollere Maßnahme zur Reduktion der NO_x-Emissionen.
Anmerkung: Auch eine Begründung mit gerundeten relativen Anteilen (*drei Viertel* etc.) ist als richtig zu werten.

c) Richtige Berechnung des Differenzenquotienten: $\frac{A(160) - A(100)}{60} = \frac{1,05 - 0,5}{60} \approx 0,0092$, wobei Ergebnisse aus dem Intervall [0,0088; 0,0095] als richtig zu werten sind. Die Angabe der Einheit ist nicht erforderlich.

Zudem muss der Differenzenquotient richtig interpretiert werden, z. B.: *Wenn die Geschwindigkeit von 100 km/h auf 160 km/h erhöht wird, beträgt die mittlere Zunahme der NO_x-Emissionen 0,0092 g/km pro km/h.*

Auch analoge Formulierungen wie z. B. *mittlere Änderungsrate des Stickoxid-Ausstoßes* sind als richtig zu werten. Das Geschwindigkeitsintervall [100 km/h; 160 km/h] muss in der Interpretation in irgendeiner Form vorkommen.

d) Es müssen die beiden zutreffenden Aussagen angekreuzt sein.

$A(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ mit $a > 0$, $c > 0$, $b \in \mathbb{R}$	☒
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0$, $b > 1$	☒

Zudem müssen drei sinngemäß richtige Begründungen angegeben sein, warum die restlichen Funktionsgleichungen für die Modellierung nicht geeignet sind, z. B.:

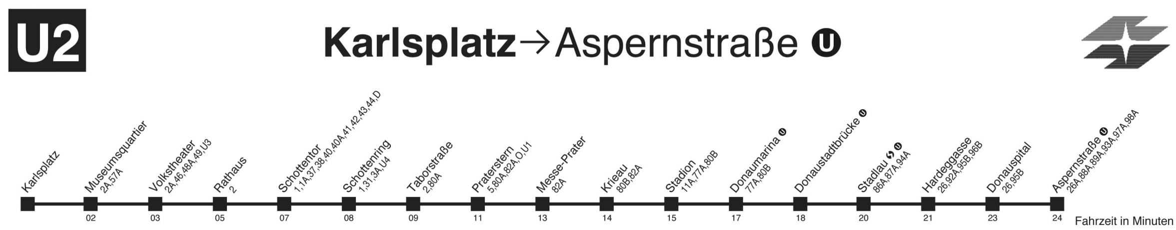
Der Graph von $A(v) = a \cdot v + b$ ist linear und daher nicht geeignet.
Der Graph von $A(v) = a \cdot v^2 + b$ mit $a < 0$, $b > 0$ ist eine nach unten geöffnete Parabel und daher nicht geeignet.
Der Graph von $A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0$, $b < 1$ ist fallend und daher nicht geeignet.

Wiener U-Bahn

Aufgabennummer: 2_018	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AN 1.3, FA 1.7, FA 5.3	

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

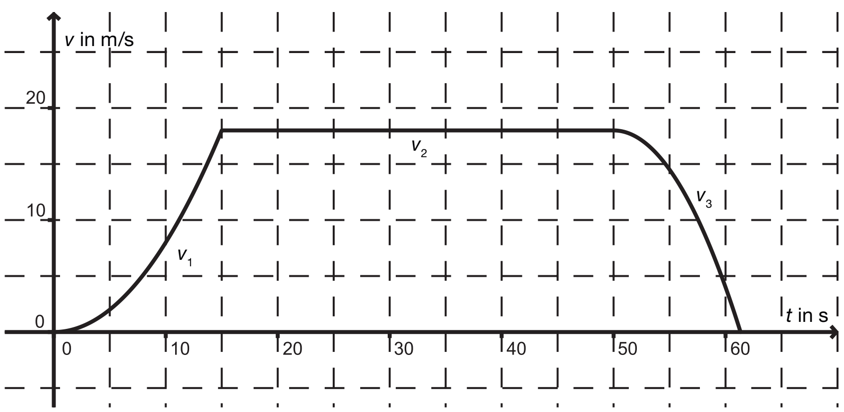
Die Wiener U-Bahn-Linie U2 verkehrt zwischen den Stationen *Karlsplatz* und *Aspernstraße*. Die Gesamtstrecke der U2 beträgt 12,531 km (Stand 2012).



Quelle: http://www.wienerlinien.at/media/download/2012/Linie_U2_68801.pdf

Zwischen den beiden Stationen *Donaumarina* und *Donaustadtbrücke* fährt die U-Bahn nahezu geradlinig und benötigt für diese 855 m lange Strecke ca. eine Minute.
Betrachtet man die Geschwindigkeit eines Zuges zwischen diesen beiden Stationen, so lässt sie sich näherungsweise durch drei Funktionen beschreiben. Diese Funktionen sind im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm dargestellt. Die Zeit t ist in Sekunden, die Geschwindigkeit v in m/s angegeben.

$v_1(t) = 0{,}08t^2$	$[0; 15)$
$v_2(t) = 18$	$[15; 50)$
$v_3(t) = -0{,}14(t-50)^2 + 18$	$[50; 61{,}34]$



* Diese Aufgabe wurde der im Mai 2013 publizierten Probeklausur (vgl. https://www.bifie.at/node/2231) entnommen.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Länge desjenigen Weges, den die U-Bahn im Zeitintervall [15; 50] zurücklegt!

Um den Bremsvorgang zu modellieren, wurde die Funktion $v_3(t) = -0{,}14(t - 50)^2 + 18$ verwendet.
Erläutern Sie, in welcher Weise eine Veränderung des Parameters von $-0{,}14$ auf $-0{,}2$ den Bremsvorgang beeinflusst!

b) Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung des Zuges vom Anfahren bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit!

Erklären Sie, wieso der Verlauf des Graphen des v-t-Diagramms im Intervall [14; 16] nicht exakt der Realität entsprechen kann!

Möglicher Lösungsweg

a) $18 \cdot (50 - 15) = 630$
Der Weg ist 630 m lang.

Eine Veränderung des Parameters von $-0{,}14$ auf $-0{,}2$ würde bedeuten, dass der Zug „stärker" (d. h. mit einer größeren negativen Beschleunigung) bremst und daher rascher zum Stillstand kommt. Auch der Bremsweg verkürzt sich.

b) Mittlere Beschleunigung: $\overline{a_1}(0;\,15) = \frac{v_1(15) - v_1(0)}{15 - 0} = \frac{18}{15} = 1{,}2\ \text{m/s}^2$

Bei diesem Geschwindigkeitsverlauf würden die Fahrgäste einen zu starken Ruck bei 15 s verspüren. Um diesen Ruck zu vermeiden, müsste in Wirklichkeit die Geschwindigkeitsfunktion ihre Steigung allmählich ändern, sodass kein Knick (wie jetzt) entsteht. Der Knick des Funktionsgraphen würde einen plötzlichen Sprung der Beschleunigung und somit einen für die Fahrgäste unangenehmen Ruck bedeuten. (Adäquate Erklärungen sind als richtig zu werten.)

Lösungsschlüssel

a)
- 1 Grundkompetenzpunkt für die Berechnung der Weglänge
- 1 Reflexionspunkt für die Erläuterung. Äquivalente Antworten sind ebenfalls zu werten, sofern sie klar formuliert sind und sinngemäß eines der folgenden Schlüsselwörter enthalten: *kürzerer Bremsweg, schnellerer Stillstand, stärkere negative Beschleunigung, stärkere Bremsung.*

b)
- 1 Grundkompetenzpunkt für die Berechnung der mittleren Beschleunigung
- 1 Reflexionspunkt für die Erklärung. Äquivalente Antworten sind ebenfalls zu werten, sofern sie klar formuliert sind und sinngemäß eines der folgenden Schlüsselwörter enthalten: *plötzlicher Ruck, unstetige Änderung der Steigung, ruckartige Beschleunigungsveränderung.*

Grippeepidemie

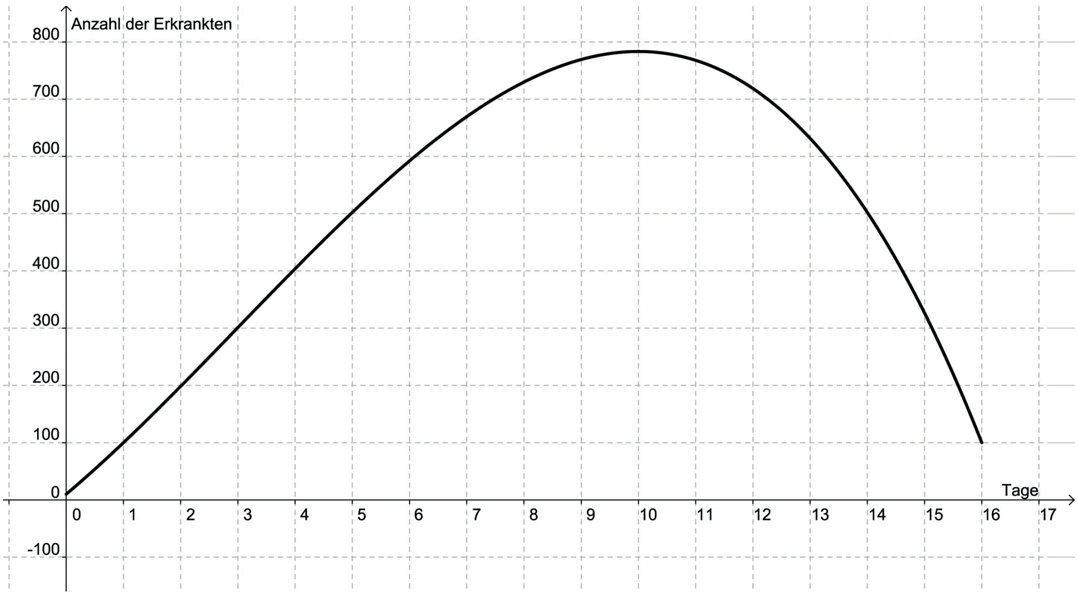
Aufgabennummer: 2_019	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AN 3.3, FA 1.5, AN 1.3

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Betrachtet man den Verlauf einer Grippewelle in einer Stadt mit 5 000 Einwohnern, so lässt sich die Anzahl an Erkrankten E in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) annähernd durch eine Polynomfunktion 3. Grades mit der Gleichung $E(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ beschreiben.

Folgende Informationen liegen vor:
1) Zu Beginn der Beobachtungen sind 10 Personen mit dem Grippevirus infiziert.
2) Nach einem Tag sind bereits 100 Personen an Grippe erkrankt.
3) Am 3. Tag nimmt die Anzahl an Erkrankten am stärksten zu.
4) Am 8. Tag sind bereits 730 Personen erkrankt.
5) Am 10. Tag erreicht die Grippewelle (d. h. die Anzahl an Erkrankten) ihr Maximum.



Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie den Wert des Ausdrucks $\frac{E(8) - E(0)}{8}$!

* Diese Aufgabe wurde der im Mai 2013 publizierten Probeklausur (vgl. https://www.bifie.at/node/2231) entnommen.

Kreuzen Sie diejenige(n) Aussage(n) an, die eine korrekte Interpretation des Ausdrucks $\frac{E(8) - E(0)}{8}$ ist/sind!

Der Ausdruck gibt die prozentuelle Änderung der Anzahl an Erkrankten innerhalb der ersten 8 Tage an.	☐
Der Ausdruck gibt die Zunahme der Anzahl an Erkrankten in den ersten 8 Tagen an.	☐
Der Ausdruck gibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Grippewelle am 8. Tag an.	☐
Der Ausdruck beschreibt, wie viele Neuerkrankte es am 8. Tag gibt.	☐
Der Ausdruck beschreibt die mittlere Änderungsrate der Anzahl an Erkrankten innerhalb der ersten 8 Tage.	☐

b) Zur Bestimmung der Koeffizienten a, b, c und d werden folgende Gleichungen aufgestellt:

1) $d = 10$
2) $a + b + c + d = 100$
3) $18a + 2b = 0$
4) $300a + 20b + c = 0$

Geben Sie an, welche der angegebenen Informationen durch die vierte Gleichung modelliert werden kann, und erklären Sie den Zusammenhang zwischen Information und Gleichung!

c) Geben Sie an, an welchem Tag die progressive Zunahme der Anzahl an Erkrankten (das heißt: der Zuwachs an Erkrankten wird von Tag zu Tag größer) in eine degressive Zunahme (das heißt: der Zuwachs an Erkrankten nimmt pro Tag wieder ab) übergeht!

Kreuzen Sie diejenige(n) Aussage(n) an, mit der/denen man eine progressive Zunahme bestimmen kann!

$E'(t) > 0$	☐
$E(t) \geq 0$	☐
$E(t_1) < E(t_2)$ für alle $t_1 > t_2$	☐
$E''(t) > 0$	☐
$E'(t) = E''(t) = 0$	☐

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{E(8) - E(0)}{8} = \frac{730 - 10}{8} = 90$

(Innerhalb der ersten 8 Tage nimmt die Anzahl der Erkrankten um durchschnittlich 90 Personen pro Tag zu.)

Der Ausdruck beschreibt die mittlere Änderungsrate der Anzahl an Erkrankten innerhalb der ersten 8 Tage.	☒

b) „Am 10. Tag erreicht die Grippewelle (d. h. die Anzahl an Erkrankten) ihr Maximum“ bzw. die 5. Information

Diese Textstelle beschreibt das lokale Maximum (den Hochpunkt), d. h., an dieser Stelle gilt: $E'(10) = 0$.

Durch das Aufstellen der ersten Ableitungsfunktion und das Einsetzen des Wertes $t = 10$ erhält man die nachstehende Gleichung:

$$E'(t) = 3at^2 + 2bt + c \Rightarrow E'(10) = 300a + 20b + c = 0$$

c) Am 3. Tag.

$E''(t) > 0$	☒

Lösungsschlüssel

a) – 1 Grundkompetenzpunkt (für die Berechnung des Ausdrucks)
– 1 Reflexionspunkt (für das richtige Ankreuzen der zutreffenden Aussage)

b) 2 Reflexionspunkte, davon:
– 1 Punkt für das Erkennen der zugehörigen Information
– 1 Punkt für die Erklärung (dieser Punkt ist auch zu geben, wenn die Erklärung nur in verbaler Form vorliegt oder nur die Rechenschritte durchgeführt wurden)

c) – 1 Reflexionspunkt für die kontextbezogene Frage
– 1 Grundkompetenzpunkt für das alleinige Ankreuzen der richtigen Aussage

Kartoffeln in Österreich

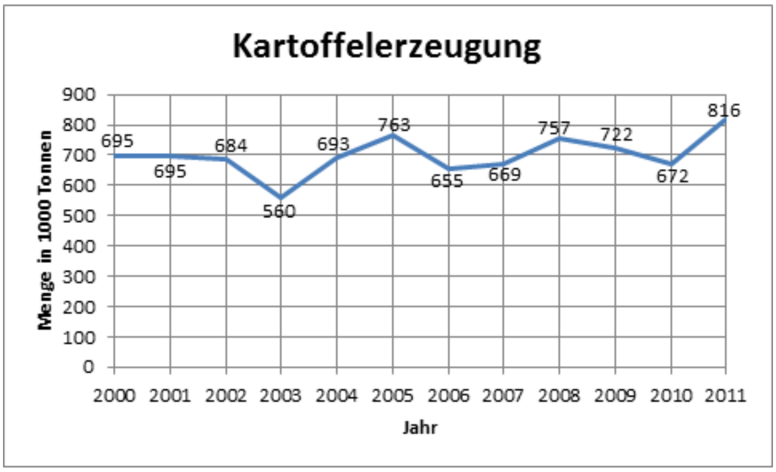
Aufgabennummer: 2_024	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: a) AN 1.1 b) AN 1.3, FA 2.2 c) WS 1.2, WS 1.3 d) WS 1.1

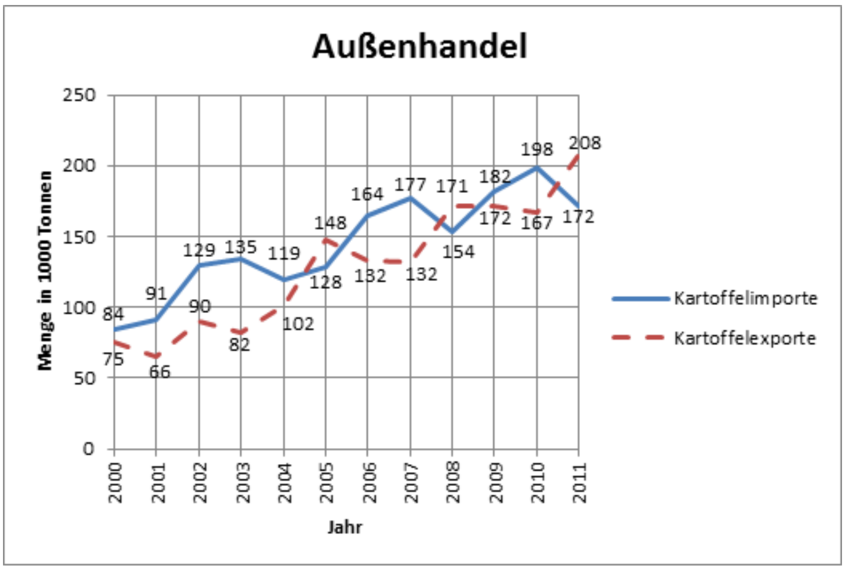
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Kartoffel ist weltweit eines der wichtigsten Nahrungsmittel.

Die nachstehende Grafik zeigt die Entwicklung der Kartoffelerzeugung in Österreich vom Jahr 2000 bis zum Jahr 2011.



In der nachstehenden Abbildung werden Kartoffelexporte und -importe für den gleichen Zeitraum einander gegenübergestellt.



Aufgabenstellung:

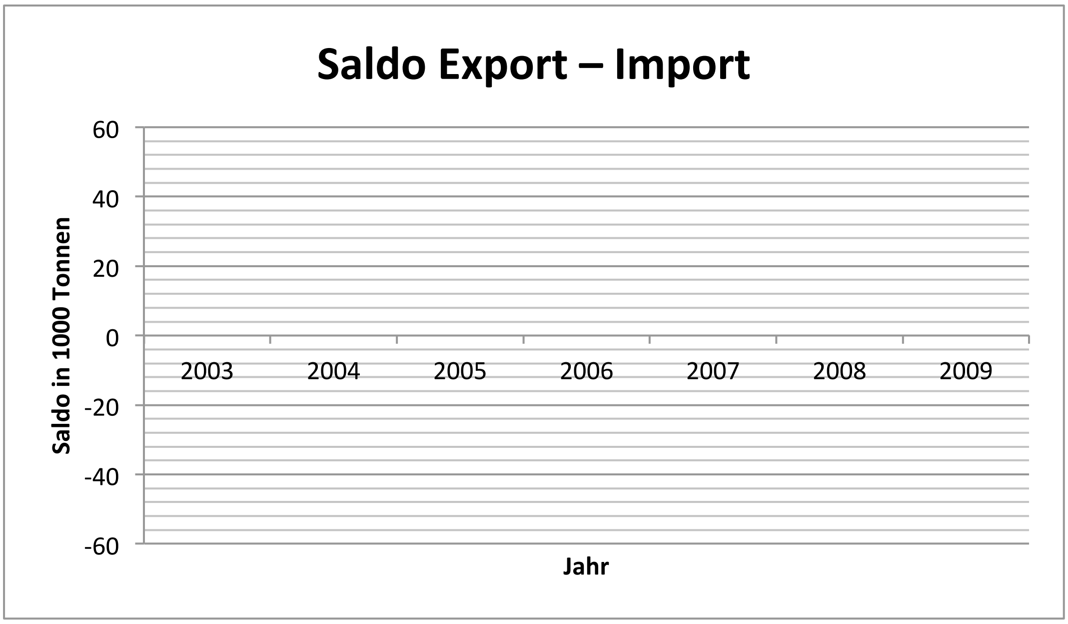
a) Entnehmen Sie der entsprechenden Graphik, zwischen welchen (aufeinanderfolgenden) Jahren die absolute Zunahme (in Tonnen) und die relative Zunahme (in Prozent) der Erzeugung im Vergleich zum Vorjahr jeweils am größten war! Geben Sie die entsprechenden Werte an!

Im vorliegenden Fall fand die größte relative Zunahme der Erzeugung in einem anderen Zeitintervall statt als die größte absolute Zunahme.
Geben Sie eine mathematische Begründung an, warum die größte relative Zunahme und die größte absolute Zunahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden müssen!

b) Berechnen und interpretieren Sie den Ausdruck $\frac{E_{2011} - E_{2000}}{11}$, wobei E_{Jahr} die Exportmenge in einem Kalenderjahr angibt! Geben Sie bei der Interpretation auch die entsprechende Einheit an.

Die Exportentwicklung von 2000 bis 2011 soll durch eine lineare Funktion *f* approximiert werden, wobei die Variable *t* die Anzahl der seit 2000 vergangenen Jahre sein soll. Die Funktionswerte für die Jahre 2000 und 2011 sollen dabei mit den in der Graphik angeführten Werten übereinstimmen. Geben Sie eine Gleichung dieser Funktion *f* an!

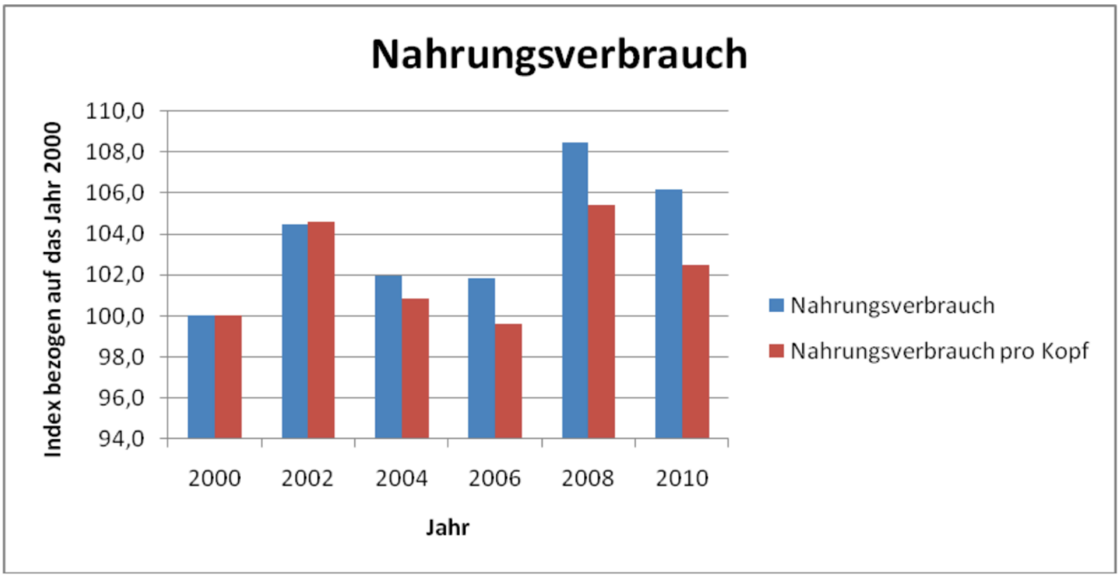
c) Stellen Sie in der nachstehenden Abbildung die Differenz „Export minus Import“ der Mengen an Kartoffeln für die Jahre 2003 bis 2009 in einem Säulendiagramm dar!



Berechnen Sie das arithmetische Mittel dieser Differenzen für die genannten Jahre!

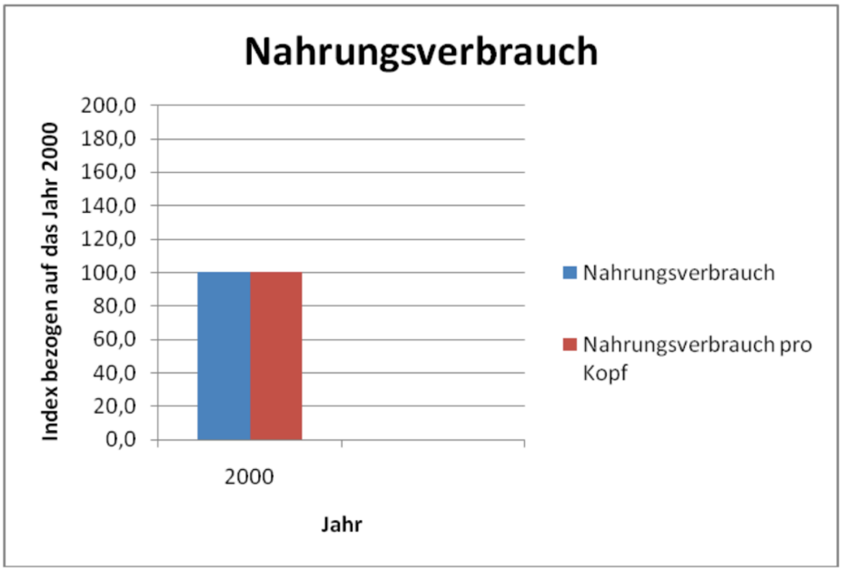
d) Ein Index ist eine statistische Kennziffer, um die Entwicklung von Größen im Zeitverlauf darzustellen. Oft wird der Ausgangswert mit dem Basiswert 100 versehen. Ein Index von 120 bedeutet beispielsweise, dass eine Größe seit dem Basiszeitpunkt um 20 % gestiegen ist.

Die nachstehende Graphik zeigt die Entwicklung der in Österreich verzehrten Kartoffelmenge (Nahrungsverbrauch) bezogen auf das Jahr 2000.



Geben Sie jeweils ein Jahr an, in dem die Einwohnerzahl in Österreich höher bzw. niedriger war als im Jahr 2000! Begründen Sie Ihre Antwort!

Zeichnen Sie in die nachstehende Graphik zwei mögliche Säulen für ein Jahr, in dem der absolute Nahrungsverbrauch niedriger und die Bevölkerungszahl höher war als im Jahr 2000!



Möglicher Lösungsweg

a) absolute Zunahme zwischen 2003 und 2004: 133 000 Tonnen

absolute Zunahme zwischen 2010 und 2011: 144 000 Tonnen

Die größte absolute Zunahme war im Zeitintervall von 2010 bis 2011.

relative Zunahme zwischen 2003 und 2004: 23,75 %

Lösungsintervall in Prozent: [23; 24]

relative Zunahme zwischen 2010 und 2011: ca. 21,43 %

Lösungsintervall in Prozent: [21; 22]

Die größte relative Zunahme war zwischen 2003 und 2004.

Da für die Berechnung der relativen Zunahme einer Größe auch der Bezugswert entscheidend ist, müssen größte absolute Zunahme und größte relative Zunahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden. Äquivalente Formulierungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) $\frac{E_{2011} - E_{2000}}{11} \approx 12\,000$ Tonnen pro Jahr

Die durchschnittliche Zunahme des österreichischen Kartoffelexports beträgt ca. 12 000 Tonnen pro Jahr.

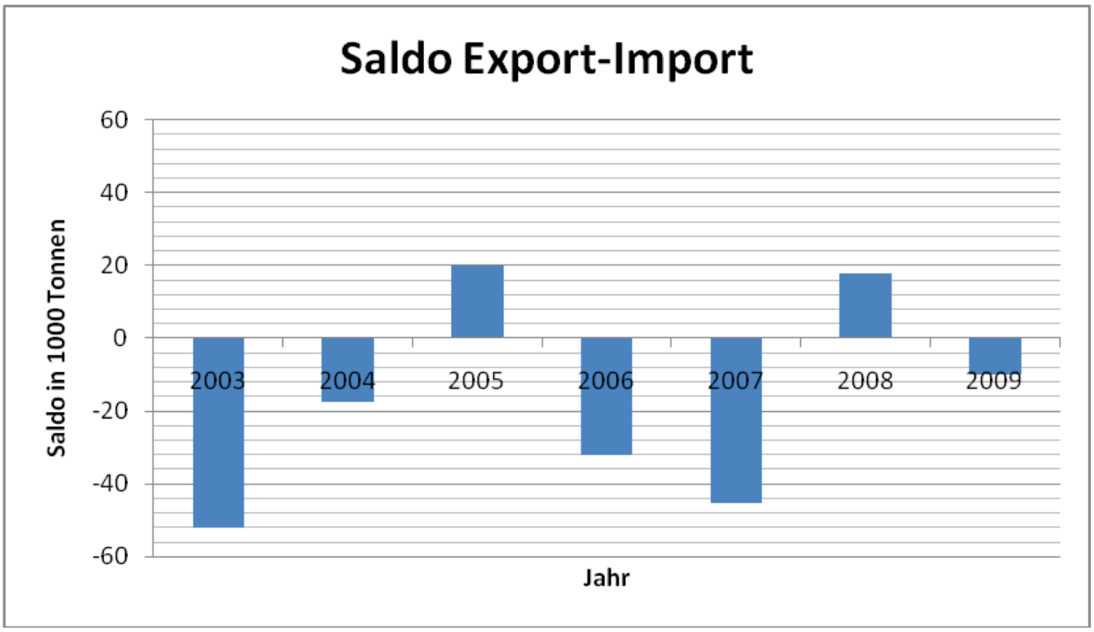
Lösungsintervall: [12 000; 12 100]

Die richtige Einheit muss in der Interpretation vorhanden sein.

f mit $f(t) = 75\,000 + 12\,000 \cdot t$ oder $f(t) = 75 + 12 \cdot t$ oder $f(t) = \frac{133}{11} \cdot t + 75$

Jede jährliche Zunahme aus dem oben angeführten Lösungsintervall muss akzeptiert werden.

c)



Genauigkeit der Säulenlängen: Toleranzbereich ± 5 000 Tonnen

arithmetisches Mittel: $\frac{-53 - 17 + 20 - 32 - 45 + 17 - 10}{7} \approx -17$

Lösungsintervall: bei Berechnung in 1 000 Tonnen: [–18; –16]; bei Berechnung in Tonnen: [–18 000; –16 000]

d) – niedrigere Einwohnerzahl (als im Jahr 2000) in den Jahren: 2002 (prozentuelle Veränderung des Nahrungsverbrauchs kleiner als jene des Nahrungsverbrauchs pro Kopf)
– höhere Einwohnerzahl (als im Jahr 2000) in den Jahren: 2004, 2006, 2008 und 2010 (prozentuelle Veränderung des Nahrungsverbrauchs größer als jene des Nahrungsverbrauchs pro Kopf)
Die Angabe eines Jahres ist hier ausreichend.

Die Säule für den gesamten Nahrungsverbrauch muss niedriger sein als die Säule für 100 % im Jahr 2000. Die Säule für den Nahrungsverbrauch pro Kopf muss bei einer steigenden Bevölkerungszahl niedriger als die Säule für den gesamten Nahrungsverbrauch sein.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

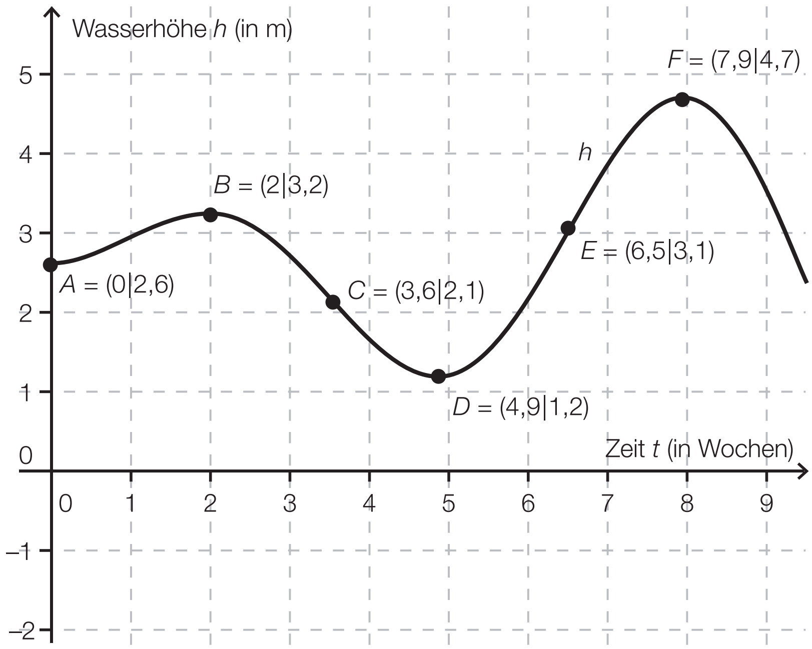
Wasserstand eines Bergsees

Aufgabennummer: 2_001	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Funktion h beschreibt die Wasserhöhe eines Bergsees in Abhängigkeit von der Zeit t. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion h.



Aufgabenstellung:

a) Bestimmen Sie den Wert des Differenzenquotienten des Wasserstands im Intervall [0; 2] und beschreiben Sie in Worten, was dieser Wert angibt! Um wie viel Prozent ist die Wasserhöhe während der ersten zwei Wochen gestiegen?

b) Was beschreibt die erste Ableitungsfunktion h' der Funktion h? Bestimmen Sie näherungsweise den Wert des Differenzialquotienten der Wasserhöhe zum Zeitpunkt $t = 6$ und beschreiben Sie in Worten, was dieser Wert angibt!

c) Was beschreibt die zweite Ableitungsfunktion h'' der Funktion h? Wann etwa nimmt die Wasserhöhe am stärksten zu?

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{3{,}2-2{,}6}{2-0} = 0{,}3 \Rightarrow$ Bis zum Ende der zweiten Woche nimmt die Wasserhöhe im Mittel pro Woche um 0,3 m zu.
$3{,}2 : 2{,}6 \approx 1{,}23 \Rightarrow$ Der Wasserstand nahm um ca. 23 % zu.

b) Durch die erste Ableitungsfunktion h' ist die Änderungsgeschwindigkeit der Wasserhöhe bestimmt.
$h'(6) \approx 1{,}6 \Rightarrow$ Das bedeutet, dass nach sechs Wochen die momentane Änderungsrate 1,6 m pro Woche beträgt.

c) Die zweite Ableitungsfunktion h'' beschreibt das Monotonieverhalten der Änderungsrate der Wasserhöhe bzw. die momentane Änderungsrate der Änderungsgeschwindigkeit der Wasserhöhe. Die Wasserhöhe nimmt nach ca. 6,5 Wochen am stärksten zu.

Kettenlinie

Aufgabennummer: 2_030	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.5, AN 1.1, AN 1.3, FA 1.4, FA 1.5, FA 1.7, FA 3.2	

Hängt man ein Seil (oder beispielsweise eine Kette) an zwei Punkten auf, so kann der Verlauf des Seils unter bestimmten Bedingungen durch eine Funktion der Form $x \mapsto \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden.
Der Wert der Konstanten a hängt dabei von der Seillänge und vom Abstand der beiden Aufhängepunkte ab.
Der vertikale Abstand zwischen dem tiefsten Punkt des Seils und seinen Aufhängepunkten wird als Durchhang bezeichnet.
Ein bestimmtes Seil kann modellhaft durch eine Funktion f der obigen Form mit $a = 4$ beschrieben werden (x und $f(x)$ in Metern). Die beiden Aufhängepunkte P_1 und P_2 befinden sich in gleicher Höhe und ihr Abstand beträgt $d = 6$ m.

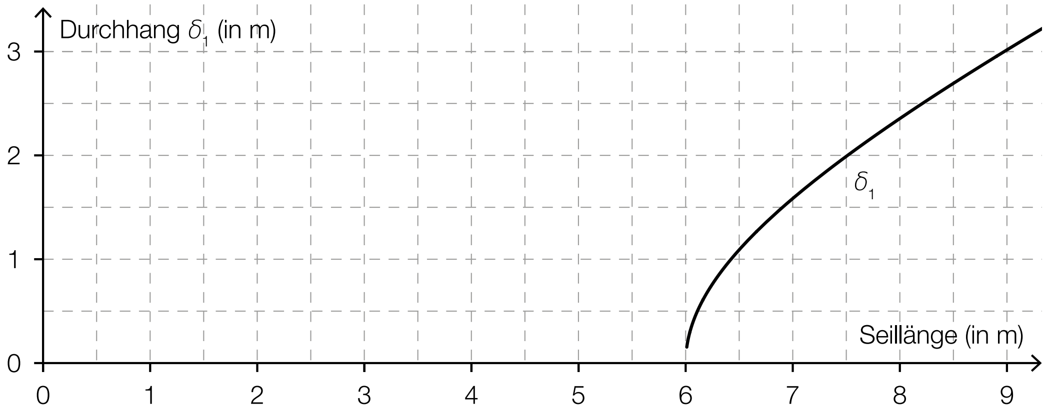
Aufgabenstellung:

a) Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Stelle mit dem maximalen Durchhang des durch f beschriebenen Seils berechnet werden kann, und ermitteln Sie diese Stelle!

Geben Sie eine Funktionsgleichung f_1 an, mit der ein Seil modelliert werden kann, welches an jeweils 1 m tieferen Aufhängepunkten montiert ist und denselben Durchhang wie das durch f beschriebene Seil aufweist!

b) Geben Sie eine Gleichung an, mit der der Durchhang δ des durch f modellierten Seils berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Durchhang!

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion δ_1, der die Abhängigkeit des Durchhangs von der Länge des Seils zwischen den Aufhängepunkten P_1 und P_2 beschreibt.



Geben Sie mithilfe der oben dargestellten Abbildung die Länge des in der Einleitung beschriebenen Seils an! Ermitteln Sie weiters, um wie viele Meter der Durchhang zunimmt, wenn das Seil durch ein zwei Meter längeres Seil (gleicher Beschaffenheit) ersetzt wird, das an denselben Aufhängepunkten montiert ist!

c) Der Graph der Funktion f kann durch den Graphen einer quadratischen Funktion g mit $g(x) = b \cdot x^2 + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}^+$ angenähert werden. Der Graph von g verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f.

Geben Sie alle Gleichungen an, die für die Berechnung von b und c notwendig sind, und ermitteln Sie die Werte dieser Parameter!

Geben Sie eine Gleichung an, mit der der größte vertikale Abstand von f und g zwischen den beiden Aufhängepunkten berechnet werden kann!

d) Der Graph der Funktion f kann auch durch den Graphen einer Polynomfunktion h vierten Grades angenähert werden. Für den Graphen von h gelten folgende Bedingungen:
Er verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f und hat in den beiden Aufhängepunkten dieselbe Steigung wie der Graph von f.

Drücken Sie <u>alle</u> gegebenen Bedingungen mithilfe von Gleichungen aus!

Ermitteln Sie anhand dieser Gleichungen eine Funktionsgleichung von h!

Möglicher Lösungsweg

a) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}\right) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$

$f_1(x) = f(x) - 1 = \frac{4}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right) - 1$

b) $\delta = f(3) - f(0)$
$\delta \approx 1{,}2$ m

Die Seillänge beträgt ca. 6,6 m.
$\delta_1(8{,}6) \approx 2{,}8 \;\Rightarrow$ Der Durchhang nimmt um ca. 1,6 m zu.

c) $g(0) = 4 = c$

$g(3) = f(3) \approx 5{,}18 = 9 \cdot b + 4 \;\Rightarrow\; b \approx 0{,}13$

größter vertikaler Abstand:
$(g(x) - f(x))' = 0$

d) $h(-3) = f(-3)$
$h(0) = f(0)$
$h(3) = f(3)$
$h'(-3) = f'(-3)$
$h'(3) = f'(3)$

$h(x) \approx 0{,}0007 \cdot x^4 + 0{,}125 \cdot x^2 + 4$

Aufnahme einer Substanz ins Blut

Aufgabennummer: 2_026	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 2.1, AN 3.3, FA 1.2, FA 1.5, FA 1.7	

Wenn bei einer medizinischen Behandlung eine Substanz verabreicht wird, kann die Konzentration der Substanz im Blut (kurz: Blutkonzentration) in Abhängigkeit von der Zeit t in manchen Fällen durch eine sogenannte Bateman-Funktion $c(t) = d \cdot (e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t})$ mit den personenbezogenen Parametern $a, b, d > 0, a < b$ modelliert werden. Die Zeit t wird in Stunden gemessen, $t = 0$ entspricht dem Zeitpunkt der Verabreichung der Substanz.

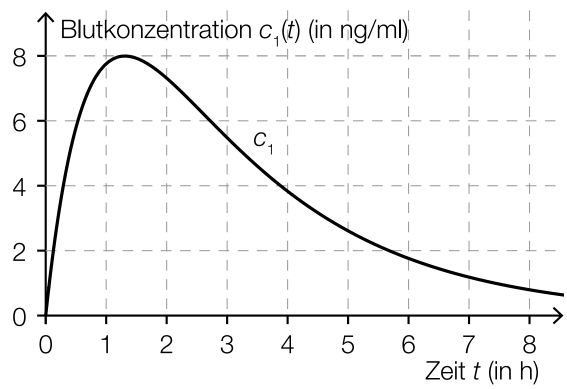
Die Bioverfügbarkeit f gibt den Anteil der verabreichten Substanz an, der unverändert in den Blutkreislauf gelangt. Bei einer intravenösen Verabreichung (d. h. einer direkten Verabreichung in eine Vene) beträgt der Wert der Bioverfügbarkeit 1.

Das Verteilungsvolumen V beschreibt, in welchem Ausmaß sich die Substanz aus dem Blut in das Gewebe verteilt.

Der Parameter d ist direkt proportional zur verabreichten Dosis D und zur Bioverfügbarkeit f, außerdem ist d indirekt proportional zum Verteilungsvolumen V.

Die nachstehende Abbildung zeigt exemplarisch den zeitlichen Verlauf der Blutkonzentration in Nanogramm pro Milliliter (ng/ml) für den Fall der Einnahme einer bestimmten Dosis der Substanz Lysergsäurediethylamid und kann mit der Bateman-Funktion c_1 mit den Parametern $d = 19{,}5$, $a = 0{,}4$ und $b = 1{,}3$ beschrieben werden.

Der Graph der Bateman-Funktion weist für große Zeiten t einen asymptotischen Verlauf gegen die Zeitachse auf.



Aufgabenstellung:

a) Geben Sie eine Gleichung an, mit der der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration für die in der Einleitung beschriebene Bateman-Funktion c_1 berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

Begründen Sie allgemein, warum der Wert des Parameters d in der Bateman-Funktion c nur die Größe der maximalen Blutkonzentration beeinflusst, aber nicht den Zeitpunkt, zu dem diese erreicht wird!

b) Die Werte der Parameter a, b und d der Bateman-Funktion variieren von Patient zu Patient. Es wird im Folgenden angenommen, dass der Wert des Parameters d für drei untersuchte Patienten P_1, P_2, P_3 identisch ist.

Für den Patienten P_1 gelten die Parameter aus der Einleitung. Bei Patient P_2 ist der Wert des Parameters a etwas größer als bei Patient P_1.
Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Bateman-Funktion verändert, wenn der Wert des Parameters a erhöht wird, der Parameter b unverändert bleibt und $a < b$ gilt! Interpretieren Sie diese Veränderung im gegebenen Kontext!

Patient P_3 erreicht (bei gleicher verabreichter Dosis) die maximale Blutkonzentration zeitgleich mit Patient P_1, die maximale Blutkonzentration von Patient P_3 ist aber größer.
Ermitteln Sie, wie sich die Werte von a und b bei der Bateman-Funktion für Patient P_3 von jenen von Patient P_1 unterscheiden!

c) Kreuzen Sie diejenige Formel an, die den Zusammenhang zwischen dem Parameter d der Bateman-Funktion und den in der Einleitung beschriebenen Größen V, D und f korrekt beschreibt! Der Parameter λ ist dabei ein allgemeiner Proportionalitätsfaktor.

$d = \lambda \cdot \frac{D}{V \cdot f}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot V}{f}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{V \cdot f}{D}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot f}{V}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{V}{D \cdot f}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{f}{V \cdot D}$	☐

Bei einem konstanten Wert des Parameters d und der Bioverfügbarkeit f kann man die verabreichte Dosis $D(V)$ als Funktion D in Abhängigkeit vom Verteilungsvolumen V auffassen. Beziehen Sie sich auf die von Ihnen angekreuzte Formel und geben Sie für die Parameterwerte der in der Einleitung dargestellten Bateman-Funktion und für den Fall einer intravenösen Verabreichung die Funktionsgleichung $D(V)$ an! Geben Sie weiters an, um welchen Funktionstyp es sich bei D handelt!

Möglicher Lösungsweg

a) $c_1(t) = 19{,}5 \cdot (e^{-0{,}4 \cdot t} - e^{-1{,}3 \cdot t})$
$c_1'(t) = 19{,}5 \cdot (-0{,}4 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t} + 1{,}3 \cdot e^{-1{,}3 \cdot t}) = 0$

$t \approx 1{,}31$ Stunden

$c_1''(1{,}31) \approx -4{,}15 < 0$

Mögliche Begründungen:

Für die Berechnung des Zeitpunkts der (lokalen) maximalen Blutkonzentration muss die Gleichung $c'(t) = 0$ nach t gelöst werden. Der Parameter d fällt bei dieser Berechnung weg und beeinflusst somit nur die Höhe der maximalen Blutkonzentration zum ermittelten Zeitpunkt.

oder:

$c'(t) = d \cdot (-a \cdot e^{-a \cdot t} + b \cdot e^{-b \cdot t}) = 0 \ \Rightarrow\ t = \frac{\ln(a) - \ln(b)}{a - b}$ $\Rightarrow$ Der Parameter d tritt in dieser Formel nicht auf. Der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration t ist somit von d unabhängig.

b) Bei einer Erhöhung des Wertes von a verschiebt sich das lokale Maximum der Funktion bei einem niedrigeren Funktionswert „nach links". Das bedeutet, dass die maximale Blutkonzentration früher erreicht wird und geringer ist.

Bei Patient P_3 ist (bei der Bateman-Funktion) der Wert von a kleiner und der Wert von b größer als bei (der Bateman-Funktion von) Patient P_1.

c)

$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot f}{V}$	☒

Die Funktionsgleichung lautet $D(V) = \frac{19{,}5}{\lambda} \cdot V$.
Es handelt sich um eine lineare Funktion.