Erlös und Gewinn

Aufgabennummer: 2_011	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

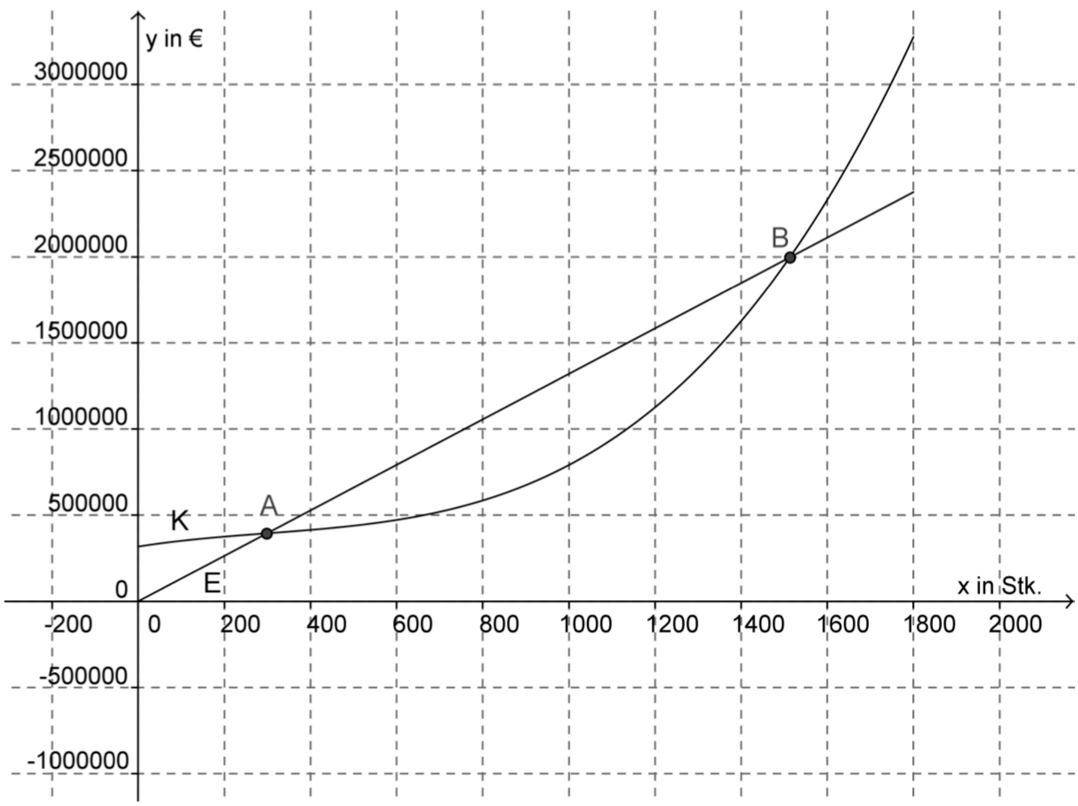
Grundkompetenzen: FA 1.6, FA 1.7, FA 2.1, AN 3.3

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine Digital-Spiegelreflexkamera wird zu einem Stückpreis von € 1.320 angeboten.

Ein Produktionsbetrieb kann monatlich maximal 1 800 Stück dieser Kamera produzieren. Es wird dabei angenommen, dass der Verkaufspreis unabhängig von der verkauften Stückzahl x konstant gehalten wird und alle produzierten Kameras auch verkauft werden. Die Funktion K mit $K(x) = 0{,}00077x^3 - 0{,}693x^2 + 396x + 317\,900$ beschreibt die Gesamtkosten K für die Produktion in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl x.

Die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E sind in der nachstehenden Grafik dargestellt.



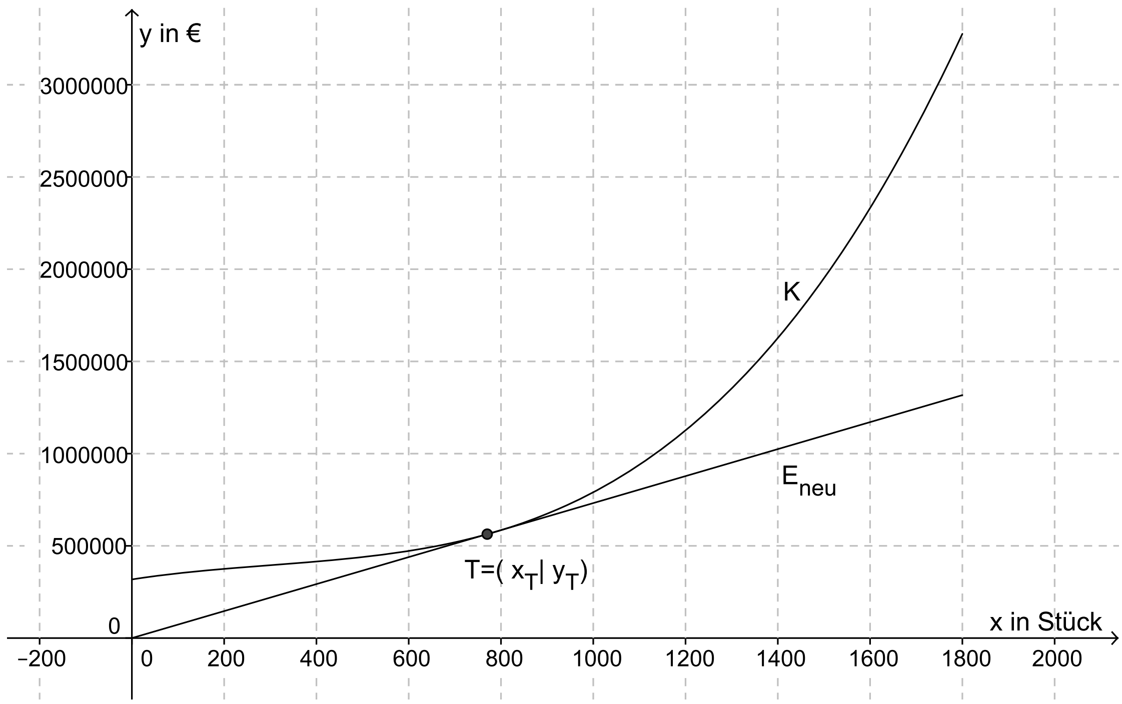
Aufgabenstellung:

a) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Gewinnfunktion *G* ein!

Eine Stückpreisänderung wurde vorgenommen und hat bewirkt, dass der Break-even-Point bei einer geringeren Stückzahl erreicht wird. Geben Sie an, wie der Stückpreis verändert wurde und welchen Einfluss diese Veränderung auf die Lage der Nullstellen der Gewinnfunktion *G* und den Gewinnbereich hat!

b) Erstellen Sie die Gleichung der Gewinnfunktion *G*!
Berechnen Sie diejenige Stückzahl, bei der der Gewinn maximal wird!

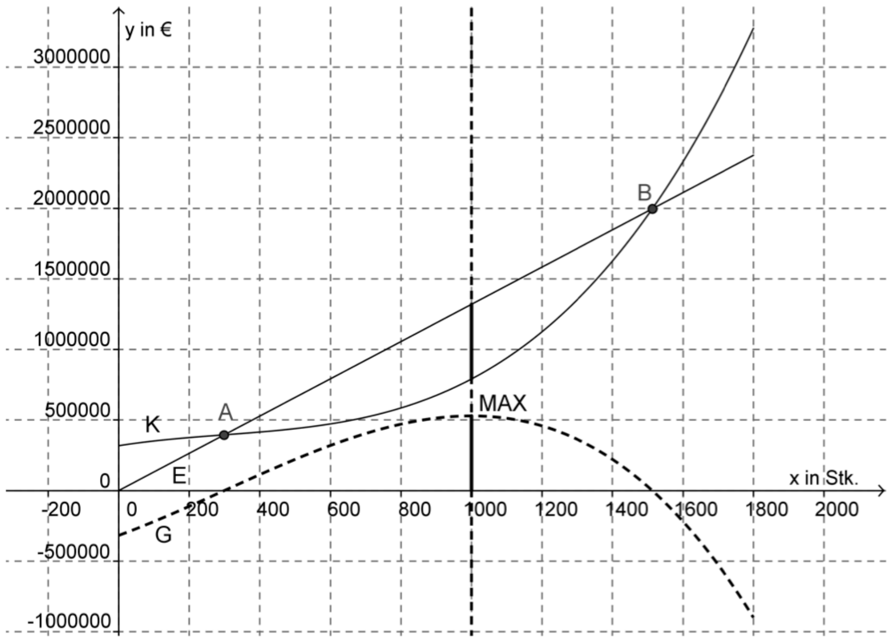
c) In der nachstehenden Grafik wurde die Erlösfunktion so abgeändert, dass die Graphen der Kostenfunktion *K* und der Erlösfunktion E_{neu} einander im Punkt *T* berühren.
Bestimmen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E_{neu}!



Interpretieren Sie die Koordinaten des Punktes *T* im gegebenen Kontext und erklären Sie, welche Auswirkungen die Änderung der Erlösfunktion auf den Gewinnbereich hat!

Möglicher Lösungsweg

a) Graph der Gewinnfunktion:



Der Stückpreis muss erhöht werden. Die Nullstellen liegen weiter auseinander, das heißt, der Gewinnbereich wird größer.

b) Gewinnfunktion:

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 1\,320x - (0{,}00077x^3 - 0{,}693x^2 + 396x + 317\,900)$

$G(x) = -0{,}00077x^3 + 0{,}693x^2 + 924x - 317\,900$

Bedingung für maximalen Gewinn:

$G'(x) = 0$

$G'(x) = -0{,}00231x^2 + 1{,}386x + 924$

$$-0{,}00231x^2 + 1{,}386x + 924 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-1{,}386 \pm \sqrt{1{,}386^2 + 4 \cdot 0{,}00231 \cdot 924}}{-0{,}00462} = \begin{cases} (-400) \\ 1000 \end{cases}$$

Der maximale Gewinn wird bei einer Stückzahl von 1 000 erzielt.

c) Die Gleichung der Erlösfunktion E_{neu} lautet:

$E_{neu}(x) = \frac{y_T}{x_T} \cdot x$

Nur bei der Produktionsmenge von x_T Stück wird genau kostendeckend produziert.
Kosten und Erlös betragen je € y_T.
Bei dieser Produktionsmenge ist es nicht möglich, mit Gewinn zu produzieren.

Baumwachstum

Aufgabennummer: 2_010	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AN 1.2, AN 1.3, FA 1.5, FA 5.1, FA 5.3

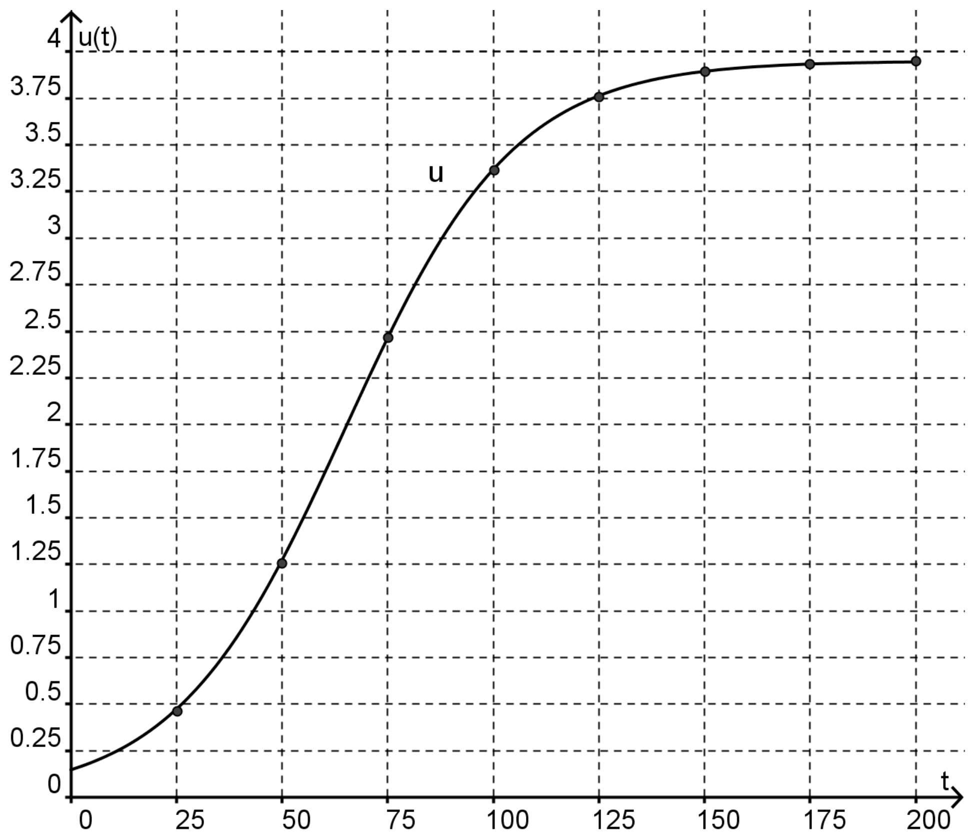
☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

An einem gefällten Baum kann anhand der Jahresringe der jeweilige Umfang des Baumstamms zu einem bestimmten Baumalter ermittelt werden. Die Untersuchung eines Baumes ergab folgende Zusammenhänge zwischen Alter und Umfang:

Alter t (in Jahren)	25	50	75	100	125	150	175	200
Umfang u (in Metern)	0,462	1,256	2,465	3,370	3,761	3,895	3,934	3,950

Der Zusammenhang zwischen Alter und Umfang kann durch eine Wachstumsfunktion u beschrieben werden, wobei der Wert $u(t)$ den Umfang zum Zeitpunkt t angibt.

In der nachstehenden Graphik sind die gemessenen Werte und der Graph der Wachstumsfunktion u veranschaulicht.



Aufgabenstellung:

a) Innerhalb der ersten 50 Jahre wird eine exponentielle Zunahme des Umfangs angenommen. Ermitteln Sie aus den Werten der Tabelle für 25 und 50 Jahre eine Wachstumsfunktion für diesen Zeitraum!

Begründen Sie mittels einer Rechnung, warum dieses Modell für die darauffolgenden 25 Jahre nicht mehr gilt!

b) Berechnen Sie den Differenzenquotienten im Zeitintervall von 75 bis 100 Jahren! Geben Sie an, was dieser Wert über das Wachstum des Baumes aussagt!

Erläutern Sie, was die 1. Ableitungsfunktion u' im gegebenen Zusammenhang beschreibt!

c) Schätzen Sie mithilfe der Grafik denjenigen Zeitpunkt ab, zu dem der Umfang des Baumes am schnellsten zugenommen hat! Geben Sie den Namen des charakteristischen Punktes des Graphen der Funktion an, der diesen Zeitpunkt bestimmt!

Beschreiben Sie, wie dieser Zeitpunkt rechnerisch ermittelt werden kann, wenn die Wachstumsfunktion u bekannt ist!

d) Die beiden Wachstumsfunktionen f und g mit $f(t) = a \cdot q^t$ und $g(t) = b \cdot e^{k \cdot t}$ beschreiben denselben Wachstumsprozess, sodass $f(t) = g(t)$ für alle t gelten muss. Geben Sie die Zusammenhänge zwischen den Parametern a und b beziehungsweise q und k jeweils in Form einer Gleichung an!

Geben Sie an, welche Werte die Parameter q und k annehmen können, wenn die Funktionen f und g im Zusammenhang mit einer exponentiellen Abnahme verwendet werden!

Möglicher Lösungsweg

a) $f(t) = a \cdot q^t$

$\rightarrow 1{,}256 = a \cdot q^{50}$ bzw. $0{,}462 = a \cdot q^{25}$

$\rightarrow$ (Division) $2{,}71861 = q^{25}$

$\rightarrow q \approx 1{,}0408$

$\rightarrow a = \frac{0{,}462}{q^{25}} \rightarrow a \approx 0{,}17$

$\rightarrow$ (näherungsweise) $f(t) = 0{,}17 \cdot 1{,}0408^t$ bzw. $f(t) = 0{,}17 \cdot e^{0{,}04 \cdot t}$ da $\ln(1{,}0408) \approx 0{,}04$

Begründung dafür, dass das Modell für die nächsten 25 Jahre nicht passend ist:
Nach dem Modell gilt $f(75) = 0{,}17 \cdot 1{,}0408^{75} \approx 3{,}412$. Dieser Wert weicht signifikant vom gemessenen Wert ab und spricht daher gegen eine Verwendung des exponentiellen Modells in den nächsten 25 Jahren.

b) Differenzenquotient: $\frac{3{,}370 - 2{,}465}{100 - 75} \approx 0{,}036$

Die durchschnittliche Zunahme zwischen 75 und 100 Jahren beträgt 3,6 cm pro Jahr.

Die 1. Ableitungsfunktion gibt die momentane Wachstumsrate an.

c) Der charakteristische Punkt ist der Wendepunkt. Die Wendestelle der Funktion bestimmt den Zeitpunkt für das maximale jährliche Wachstum des Baumumfangs. Am schnellsten nimmt der Baum bei etwa 65 Jahren an Umfang zu (Lösungsintervall [55; 75]).

Die Nullstelle der 2. Ableitungsfunktion bestimmt in diesem Fall denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Baumumfang am schnellsten zunimmt.

d) $f(0) = a$ und $g(0) = b$, daraus folgt: a und b sind gleich.

Da $q^t = e^{k \cdot t}$ gilt, folgt $\ln(q) = k$ bzw. $q = e^k$.

Bei einer Zerfallsfunktion muss $0 < q < 1$ bzw. $k < 0$ gelten.

Bewegung eines Fahrzeugs

Aufgabennummer: 2_020	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: a) AN 4.3, AN 1.3 b) AN 3.3, FA 2.3 c) AG 2.3 d) AN 4.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Im Folgenden wird die Bewegung eines Fahrzeugs beschrieben:

In den ersten fünf Sekunden seiner Bewegung fährt es mit einer Momentangeschwindigkeit (in m/s), die durch die Funktion v mit $v(t) = -0{,}8t^2 + 8t$ (mit t in Sekunden) modelliert werden kann. In den folgenden drei Sekunden sinkt seine Geschwindigkeit.
Ab der achten Sekunde bewegt es sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 15 m/s. Nach zehn Sekunden Fahrzeit erkennt der Lenker ein Hindernis in 90 m Entfernung und reagiert eine Sekunde später. Zu diesem Zeitpunkt beginnt er gleichmäßig zu bremsen und schafft es, rechtzeitig beim Hindernis anzuhalten.

Aufgabenstellung:

a) Interpretieren Sie den Ausdruck $\int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t$ im Hinblick auf die Bewegung des Fahrzeugs!

Geben Sie die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{\int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t}{3}$ im vorliegenden Kontext an!

b) Interpretieren Sie den Wert $v'(3)$ im Zusammenhang mit der Bewegung des Fahrzeugs!
Die Ableitungsfunktion v' ist eine lineare Funktion.

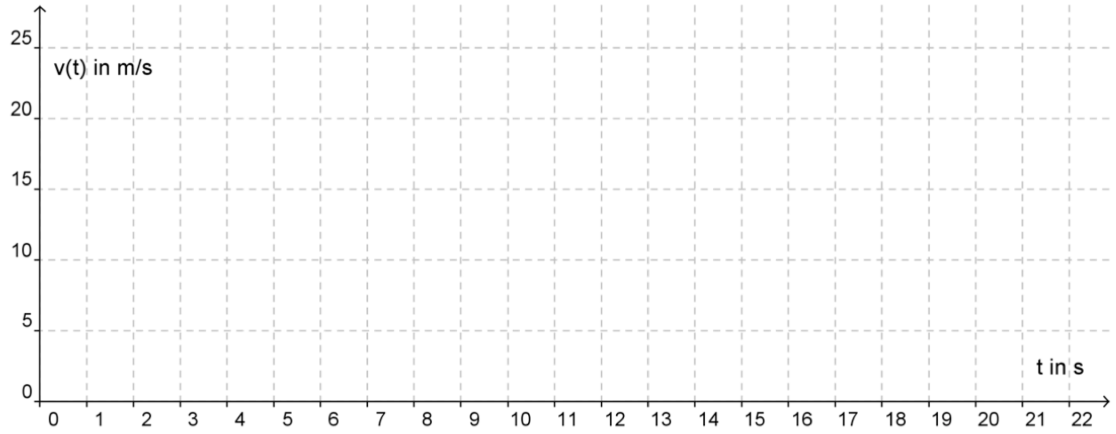
Bestimmen Sie ihren Anstieg und geben Sie dessen Bedeutung im Hinblick auf die Bewegung des Fahrzeugs in den ersten fünf Sekunden an!

c) Ermitteln Sie, nach wie vielen Sekunden das Fahrzeug eine Momentangeschwindigkeit von 20 m/s erreicht!

Beschreiben Sie (verbal und/oder mithilfe einer Skizze) den Geschwindigkeitsverlauf in den ersten fünf Sekunden!

d) Der Anhalteweg setzt sich aus dem Reaktionsweg und dem Bremsweg zusammen. Berechnen Sie die Zeit, die vom Einsetzen der Bremswirkung elf Sekunden nach Beginn der Bewegung bis zum Stillstand des Fahrzeugs verstreicht!

Stellen Sie den Geschwindigkeitsverlauf ab dem Zeitpunkt t = 10 in der angegebenen Abbildung graphisch dar und kennzeichnen Sie den Anhalteweg!



Möglicher Lösungsweg

a) Das Integral $\int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t$ gibt die Länge des Weges in Metern an, den das Fahrzeug in den ersten fünf Sekunden seiner Bewegung zurücklegt.

Anmerkung: Die Antwort muss die Einheit m und das Zeitintervall beinhalten.

Der Ausdruck $\frac{\int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t}{3}$ gibt die durchschnittliche Geschwindigkeit in m/s des Fahrzeugs im Zeitintervall [2; 5] an.

Anmerkung: Äquivalente Formulierungen sind zu akzeptieren.

b) $v(t) = -0{,}8t^2 + 8t$
$v'(t) = -1{,}6t + 8$
$v'(3) = 3{,}2$

Die Beschleunigung 3 Sekunden nach dem Beginn der Bewegung beträgt 3,2 m/s^2.

Anmerkung: Der Zeitpunkt und der Begriff „Beschleunigung" müssen angegeben werden.

Die Beschleunigung nimmt pro Sekunde um 1,6 m/s^2 ab.

Anmerkung: Die Einheit m/s^2 muss angegeben werden.

c) $v(t) = -0{,}8t^2 + 8t = 20$
$-0{,}8t^2 + 8t - 20 = 0 \qquad t_1 = t_2 = 5$

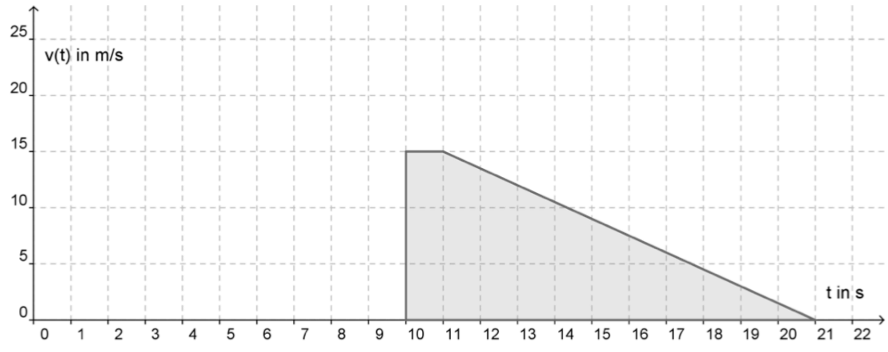
Die Geschwindigkeit steigt im gegebenen Zeitintervall an und erreicht nach 5 Sekunden ihr Maximum von 20 m/s.

Skizzen von Parabeln, die diese Aussage belegen, und äquivalente Formulierungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Anmerkung: Die Beantwortung der ersten Frage kann auch auf anderem Wege erfolgen. Somit kann daraus auch umgekehrt auf die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung, ohne diese zu lösen, geschlossen werden.

d) $A = 90 = 15 \cdot 1 + \frac{15 \cdot t}{2}$

Der Bremsweg wird in 10 Sekunden zurückgelegt.



Auch andere Lösungswege (z. B. mit Formeln aus der Physik) sind zu akzeptieren.

Saturn-V-Rakete

Aufgabennummer: 2_025	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.1, FA 2.1, FA 4.3, AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.3

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☒ besondere Technologie erforderlich

Eine Mehrstufenrakete besteht aus mehreren, oft übereinander montierten „Raketenstufen“. Jede Raketenstufe ist eine separate Rakete mit Treibstoffvorrat und Raketentriebwerk. Leere Treibstofftanks und nicht mehr benötigte Triebwerke werden abgeworfen. Auf diese Weise werden höhere Geschwindigkeiten und somit höhere Umlaufbahnen als mit einstufigen Raketen erreicht.
Die Familie der Saturn-Raketen gehört zu den leistungsstärksten Trägersystemen der Raumfahrt, die jemals gebaut wurden. Sie wurden im Rahmen des Apollo-Programms für die US-amerikanische Raumfahrtbehörde NASA entwickelt. Die Saturn V ist die größte jemals gebaute Rakete. Mithilfe dieser dreistufigen Rakete konnten in den Jahren 1969 bis 1972 insgesamt 12 Personen auf den Mond gebracht werden. 1973 beförderte eine Saturn V die US-amerikanische Raumstation Skylab in eine Erdumlaufbahn in 435 km Höhe.
Eine Saturn V hatte die Startmasse $m_0 = 2{,}9 \cdot 10^6$ kg. Innerhalb von 160 s nach dem Start wurden die $2{,}24 \cdot 10^6$ kg Treibstoff der ersten Stufe gleichmäßig verbrannt. Diese ersten 160 s werden als Brenndauer der ersten Stufe bezeichnet. Die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) einer Saturn V kann t Sekunden nach dem Start während der Brenndauer der ersten Stufe näherungsweise durch die Funktion v mit

$$v(t) = 0{,}0000000283 \cdot t^5 - 0{,}00000734 \cdot t^4 + 0{,}000872 \cdot t^3 - 0{,}00275 \cdot t^2 + 2{,}27 \cdot t$$

beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Beschleunigung einer Saturn V beim Start und am Ende der Brenndauer der ersten Stufe!

Geben Sie an, ob die Beschleunigung der Rakete nach der halben Brenndauer der ersten Stufe kleiner oder größer als die mittlere Beschleunigung (= mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit) während der ersten 160 Sekunden des Flugs ist! Begründen Sie Ihre Antwort anhand des Graphen der Geschwindigkeitsfunktion!

b) Berechnen Sie die Länge des Weges, den eine Saturn V 160 s nach dem Start zurückgelegt hat!

Begründen Sie, warum in dieser Aufgabenstellung der zurückgelegte Weg nicht mit der Formel „Weg = Geschwindigkeit mal Zeit“ berechnet werden kann!

c) Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt t_1, für den gilt: $v(t_1) = \frac{v(0) + v(160)}{2}$.
Interpretieren Sie t_1 und $v(t_1)$ im gegebenen Kontext!

d) Beschreiben Sie die Abhängigkeit der Treibstoffmasse m_T (in Tonnen) der Saturn V von der Flugzeit t während der Brenndauer der ersten Stufe durch eine Funktionsgleichung!

Geben Sie die prozentuelle Abnahme der Gesamtmasse einer Saturn V für diesen Zeitraum an!

e) Nach dem Gravitationsgesetz wirkt auf eine im Abstand r vom Erdmittelpunkt befindliche Masse m die Gravitationskraft $F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante und M die Masse der Erde ist.

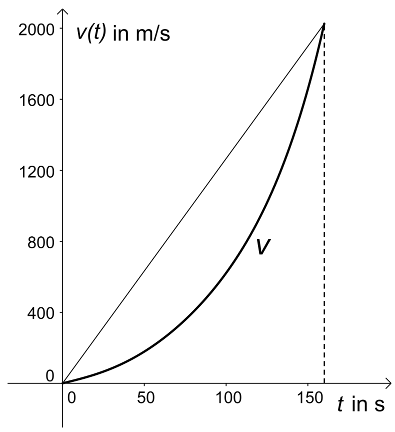
Deuten Sie das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r$ im Hinblick auf die Beförderung der Raumstation Skylab in die Erdumlaufbahn und beschreiben Sie, welche Werte dabei für die Grenzen r_1 und r_2 einzusetzen sind!

Begründen Sie anhand der Formel für die Gravitationskraft, um welchen Faktor sich das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r$ ändert, wenn ein Objekt mit einem Zehntel der Masse von Skylab in eine Umlaufbahn derselben Höhe gebracht wird!

Möglicher Lösungsweg

a) $a(0) = v'(0) = 2{,}27\ \text{m/s}^2$
$a(160) = v'(160) = 40{,}83\ \text{m/s}^2$

Bestimmt man die zur Sekante parallele Tangente, so liegt die Stelle des zugehörigen Berührpunktes rechts von $t = 80$. Aus der Linkskrümmung der Funktion v folgt daher, dass die Beschleunigung nach 80 Sekunden kleiner als die mittlere Beschleunigung im Intervall [0 s; 160 s] ist.



Weitere mögliche Begründung:
Die mittlere Beschleunigung (= Steigung der Sekante) in [0; 160] ist größer als die Momentanbeschleunigung (= Steigung der Tangente) bei $t = 80$.

b) $s(160) = \int_0^{160} v(t)\,\mathrm{d}t \approx 93\,371$

zurückgelegter Weg nach 160 s: 93 371 m

$s = v \cdot t$ gilt nur bei konstanter Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit der Saturn V ändert sich allerdings mit der Zeit.

c) $v(0) = 0\ \text{m/s}$; $v(160) \approx 2\,022\ \text{m/s}$
$v(t_1) = 1\,011 \;\Rightarrow\; t_1 \approx 125\ \text{s}$

Die Geschwindigkeit ist nach 125 s halb so groß wie nach 160 s.

d) $m_T(t) = 2\,240 - 14 \cdot t$
$\frac{2{,}24}{2{,}9} \approx 0{,}77$
Die Gesamtmasse hat um 77 % abgenommen.

e) Das Ergebnis gibt die Arbeit an, die nötig ist, um die Raumstation Skylab in die entsprechende Erdumlaufbahn zu bringen.
r_1 ist der Erdradius, r_2 ist die Summe aus Erdradius und Höhe der Umlaufbahn.

Die Gravitationskraft und somit auch die Arbeit sind direkt proportional zur Masse des Objekts. Die erforderliche Arbeit ist daher nur ein Zehntel des Vergleichswertes.

Lösungsschlüssel

a) Ein Punkt für die richtige Berechnung der beiden Beschleunigungswerte.
Toleranzintervall für $a(0)$: [2,2 m/s^2; 2,3 m/s^2]
Toleranzintervall für $a(160)$: [40 m/s^2; 42 m/s^2]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.

b) Ein Punkt für die richtige Berechnung des zurückgelegten Weges.
Toleranzintervall: [93 000 m; 94 000 m]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.

c) Ein Punkt für die richtige Berechnung des Zeitpunkts t_1.
Toleranzintervall: [124 s; 126 s]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Deutung der beiden Werte laut Lösungserwartung.

d) Ein Punkt für die Angabe einer richtigen Funktionsgleichung.
Äquivalente Schreibweisen sind als richtig zu werten.
Ein Punkt für die Angabe des richtigen Prozentsatzes.
Toleranzintervall: [77 %; 78 %]

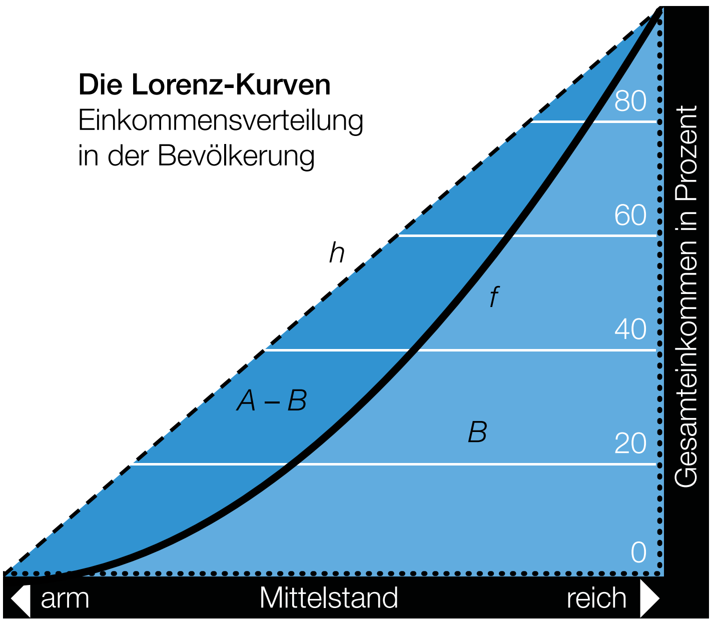
e) Ein Punkt für die richtige Deutung des bestimmten Integrals und die richtige Beschreibung der Werte der beiden Grenzen.
Ein Punkt für eine richtige Begründung, um welchen Faktor sich das Ergebnis ändert.
Die direkte Proportionalität zwischen Masse und Gravitationskraft muss dabei sinngemäß erwähnt werden.

Einkommensverteilung

Aufgabennummer: 2_031	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.4, AN 4.2, AN 4.3, FA 1.4, FA 1.7, FA 3.2, FA 4.1, FA 5.6, WS 1.1, WS 1.2	

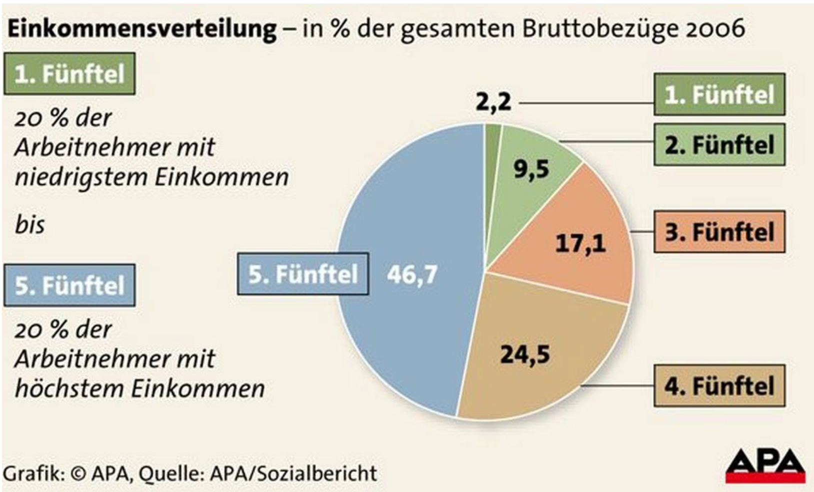
Der Statistiker Max Lorenz beschrieb bereits im Jahr 1905 statistische Verteilungen mithilfe der nach ihm benannten Lorenz-Kurve. Eine Lorenz-Kurve f kann z. B. zur Beschreibung der Einkommensverteilung in einem Staat herangezogen werden. Je ausgeprägter ihr „Bauch" ist, desto größer ist der Einkommensunterschied zwischen niedrigem und hohem Einkommen. Die Lorenz-Kurve der Einkommensverteilung eines Staates, in dem alle Personen bis auf eine Person nichts verdienen und diese eine Person alles bekommt, wird in der nachstehenden Grafik durch die punktierten Linien (Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks) dargestellt. Das andere Extrem ist ein Staat, in dem alle Personen gleich viel verdienen. In diesem Fall wird die Lorenz-Kurve zu einer Geraden h, welche durch die strichlierte Linie dargestellt ist. Zwischen den beiden Extremen verläuft die Lorenz-Kurve f eines Staates.

Jeder Punkt $P = (x \mid f(x))$ auf der Kurve f steht für folgende Aussage: „Die einkommensschwächsten x % aller Haushalte beziehen $f(x)$ % des Gesamteinkommens."



Der Flächeninhalt des rechtwinkeligen Dreiecks wird mit A bezeichnet. Der Graph der Lorenz-Kurve f schließt mit den beiden Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks eine Fläche mit Inhalt B ein. Setzt man den Inhalt der Fläche zwischen der Lorenz-Kurve f und der Geraden h mit der Dreiecksfläche A in Bezug, erhält man den Gini-Ungleichheitskoeffizienten $GUK = \frac{A - B}{A}$, eine Zahl zwischen null und eins. Je kleiner der GUK ist, desto gleichmäßiger ist das Gesamteinkommen auf die Bevölkerung verteilt.

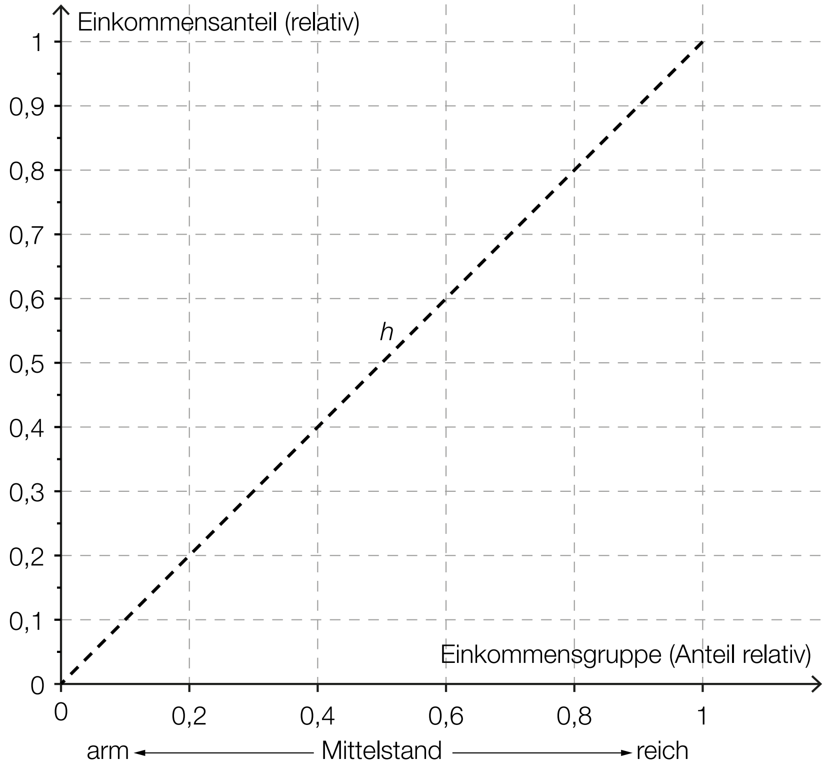
In der nachstehenden Grafik ist die Einkommensverteilung in Österreich in Prozent der gesamten Bruttobezüge im Jahre 2006 dargestellt. Daraus ist z. B. abzulesen, dass jene 20 % der Bevölkerung mit den niedrigsten Bruttoeinkommen nur 2,2 % des Gesamtbruttoeinkommens erhalten haben.



Quelle: http://diepresse.com/home/wirtschaft/economist/446997/Sozialbericht_Einkommen-in-Oesterreich-ungleicher-verteilt [04.05.2017].

Aufgabenstellung:

a) Zeichnen Sie die Lorenz-Kurve für die Einkommensverteilung der Bruttobezüge in Österreich im Jahr 2006 in der nachstehenden Grafik als Streckenzug ein!



Berechnen Sie mithilfe des eingezeichneten Streckenzuges den GUK für die Bruttobezüge in Österreich für das Jahr 2006!

b) Die Verteilung der Bruttoeinkommen in Österreich im Jahre 2006 soll durch eine Polynomfunktion p so modelliert werden, dass alle Daten, die aus dem Kreisdiagramm aus der Einleitung abgelesen werden können, mit Funktionswerten dieser Polynomfunktion übereinstimmen.

Begründen Sie, welchen Grad die Polynomfunktion p bei konkreter Berechnung (maximal) hat!

Begründen Sie, warum eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ $(a, b \in \mathbb{R}^+)$ nicht für die Modellierung einer Lorenz-Kurve geeignet ist!

c) Um politische Maßnahmen abschätzen zu können, werden verschiedene Szenarien entworfen. So soll beispielsweise für die Bruttoeinkommen langfristig eine Lorenz-Kurve angestrebt werden, die durch die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 0{,}245 \cdot x^3 + 0{,}6 \cdot x^2 + 0{,}155 \cdot x$ beschrieben werden kann.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der der GUK für die angestrebte Einkommensverteilung berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen GUK!

Geben Sie mithilfe konkreter Zahlenwerte an, wie sich in diesem Fall die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den niedrigsten Bruttoeinkommen" und die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den höchsten Bruttoeinkommen" im Vergleich zu den Bruttobezügen im Jahr 2006 in Österreich ändern würden!

d) Für das Jahr 2007 kann die Einkommensverteilung für Österreich mit einem GUK von 0,26 beschrieben werden.

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_L%C3%A4nder_nach_Einkommensverteilung [04.05.2017].

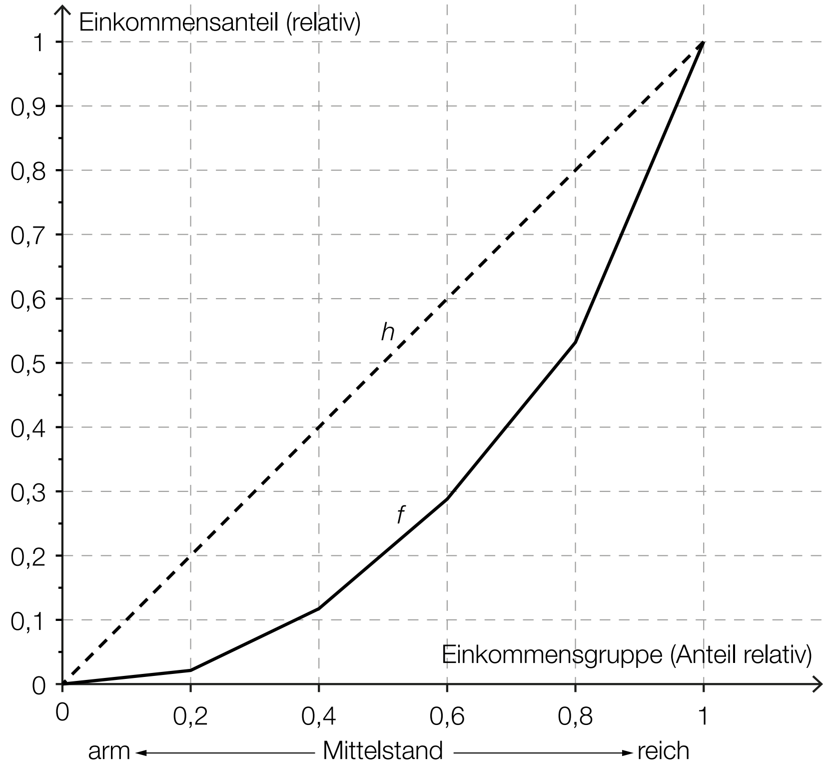
Angenommen, die Lorenz-Kurve für die Einkommensverteilung kann für ein bestimmtes Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, durch eine Potenzfunktion h mit $h(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b, z \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Geben Sie an, welche Werte die Parameter a und b haben müssen, und begründen Sie Ihre Wahl!

Geben Sie eine Ungleichung an, die für das Jahr 2007 einen Zusammenhang zwischen dem GUK von Österreich und dem GUK von demjenigen Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, beschreibt! Ermitteln Sie für diesen Fall einen möglichen Wert für den Exponenten z mit $z > 1$!

Möglicher Lösungsweg

a)



Der Inhalt der Fläche zwischen dem Polygonzug f und der Strecke h beträgt 0,208 Flächeneinheiten (die Ermittlung des Flächeninhalts zwischen der waagrechten Achse und dem Streckenzug kann z. B. aus zwei Dreiecksflächen und drei Trapezflächen erfolgen).

$$\Rightarrow \ GUK = \frac{0{,}208}{0{,}5} = 0{,}416$$

b) Aus den Daten des Kreisdiagramms ergeben sich (für die Argumente $x = 0$, $x = 0{,}2$, $x = 0{,}4$, $x = 0{,}6$, $x = 0{,}8$, $x = 1$) sechs Funktionswerte von p und somit sechs „Bedingungen“ für die Koeffizienten der Funktionsgleichung. Eine Polynomfunktion fünften Grades hat sechs Koeffizienten und ist daher geeignet.
(Anmerkung: Bei „besonderer“ Lage der Punkte kann auch ein Grad kleiner als fünf ausreichend sein.)

Jede Lorenz-Kurve verläuft durch den Punkt (0|0). Da eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ ($a, b \in \mathbb{R}^+$) nicht durch den Koordinatenursprung verläuft, ist sie nicht für die Modellierung geeignet.

c) $GUK = \frac{0{,}5 - \int_0^1 \left(0{,}245x^3 + 0{,}6x^2 + 0{,}155x\right) \mathrm{d}x}{0{,}5} = 0{,}3225$

$g(0{,}2) \approx 0{,}057$
$g(0{,}8) \approx 0{,}633$

Der Einkommensanteil der „20 % mit den niedrigsten Bruttoeinkommen" würde (um ca. 3,5 Prozentpunkte) von 2,2 % auf ca. 5,7 % steigen.

Der Einkommensanteil der „20 % mit den höchsten Bruttoeinkommen" würde (um ca. 10 Prozentpunkte) von 46,7 % auf 36,7 % sinken.

d) $b = 0$, da der Graph durch den Punkt $(0|0)$ verlaufen muss
$a = 1$, da der Graph durch den Punkt $(1|1)$ verlaufen muss

$\frac{0{,}5 - \int_0^1 x^z \,\mathrm{d}x}{0{,}5} < 0{,}26$

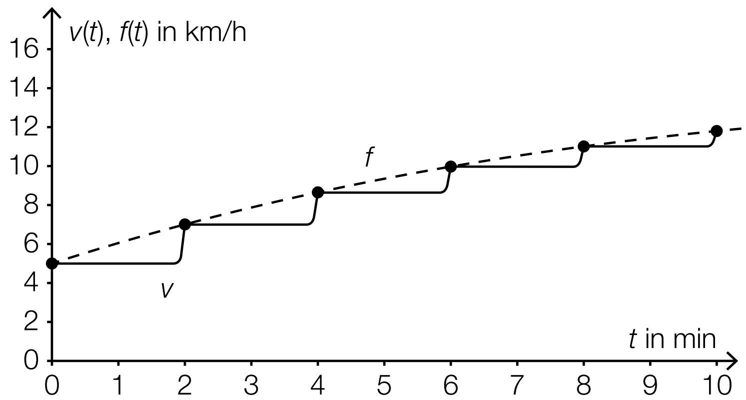
$z \in \left(1; \frac{63}{37}\right)$

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Laufband

Aufgabennummer: 2_029	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, AN 3.2, AN 3.3, AN 4.2, FA 1.4, FA 1.7, FA 2.6, WS 1.3	

Ein Laufband ist ein Sportgerät, auf dem verschiedene Lauftrainingsprogramme absolviert werden können.
Bei einem individuell erstellten, 30-minütigen Trainingsprogramm ändert sich die Laufbandgeschwindigkeit alle zwei Minuten. Die von der Zeit t (in min) abhängigen Laufbandgeschwindigkeiten (in km/h) sind Funktionswerte an bestimmten Stellen der Funktion f mit
$f(t) = 0{,}0008 \cdot t^3 - 0{,}05 \cdot t^2 + 1{,}1 \cdot t + 5$.
Die Laufbandgeschwindigkeit während der ersten beiden Minuten entspricht dem Funktionswert $f(0)$, die Geschwindigkeit in den beiden darauffolgenden Minuten dem Wert $f(2)$ usw. Für die Berechnungen wird vereinfacht angenommen, dass sich die Laufbandgeschwindigkeit innerhalb sehr kurzer Zeit ändert.
Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Entwicklung der Laufbandgeschwindigkeit in den ersten zehn Minuten des Trainings, wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit des Laufbands zum Zeitpunkt t angibt. Das Training beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.



Aufgabenstellung:

a) Geben Sie einen Ausdruck an, mit dem das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten während des 30-minütigen Trainingsprogramms berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Wert!

Begründen Sie, warum das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$ während des 30-minütigen Trainingsprogramms entspricht!
Berechnen Sie unter Verwendung der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$ die während des 30-minütigen Trainingsprogramms bewältigte Strecke!

b) Geben Sie die minimale und die maximale Geschwindigkeit des Laufbands während des 30-minütigen Trainingsprogramms an!

v_{min} = ____ km/h

v_{max} = ____ km/h

Begründen Sie, warum zu den Zeitpunkten t_{min} und t_{max}, zu denen die minimale bzw. die maximale Geschwindigkeit des Laufbands in dem 30-minütigen Trainingsprogramm erreicht wird, $f'(t_{min}) \neq 0$ und $f'(t_{max}) \neq 0$ gilt!

c) Geben Sie den Wert von $v'(1)$ an und interpretieren Sie diesen Wert (mit Angabe der Einheit) im gegebenen Kontext!

$v'(1)$ = ____

Beschreiben Sie anhand des Graphen in der Einleitung, wie der Graph der Ableitungsfunktion v' im Intervall [0; 30] verlaufen müsste!

d) Die in den ersten zehn Trainingsminuten zurückgelegte Weglänge kann näherungsweise mit dem Integral $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet werden.
Berechnen Sie diesen Näherungswert und erläutern Sie die Bedeutung des Faktors $\frac{1}{60}$!

Geben Sie die absolute Abweichung des berechneten Näherungswertes von der tatsächlich zurückgelegten Weglänge während der ersten zehn Minuten in Metern an!

e) Unter bestimmten Voraussetzungen ist der Energiebedarf einer Person bei einem Lauftraining direkt proportional zur Masse der Person (in kg) und zur zurückgelegten Weglänge (in km).
Die nachstehende Tabelle zeigt den Energiebedarf (in kcal) einer 80 kg schweren Person bei einem Lauftraining in Abhängigkeit von der Dauer t des Trainings. Die Person läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h .

	t = 15 min	t = 30 min	t = 45 min	t = 60 min
Energiebedarf in kcal	194	388	582	776

Zeigen Sie anhand der Tabellenwerte die direkte Proportionalität des Energiebedarfs zur zurückgelegten Wegstrecke und berechnen Sie den Proportionalitätsfaktor k!

Beim Lauftraining wird die Geschwindigkeit häufig als „Tempo" in min/km umschrieben. Berechnen Sie für die unten angeführten Geschwindigkeiten unter Verwendung des Proportionalitätsfaktors k für eine 90 kg schwere Person jeweils das Tempo und den Energiebedarf (in kcal) für die angegebene Zeitdauer!

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8		
10			
12			

Möglicher Lösungsweg

a) $\bar{v} = \frac{1}{15} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + ... + f(28)) \approx 11{,}57$

Das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten beträgt 11,57 km/h.

Das arithmetische Mittel entspricht der mittleren Geschwindigkeit während des 30-minütigen Trainingsprogramms, weil die Geschwindigkeiten $v(0), \dots, v(28)$ in gleich langen Zeitintervallen (2 min) jeweils konstant sind.

zurückgelegte Weglänge: 0,5 h · 11,57 km/h = 5,785 km

b) v_{min} = 5 km/h
v_{max} = 14,16 km/h

t_{min} und t_{max} sind keine lokalen Extremstellen der Funktion f, weshalb die 1. Ableitung von f an diesen Stellen nicht null ist.

c) $v'(1) = 0$

Mögliche Interpretationen:

Die Beschleunigung (momentane Geschwindigkeitsänderung) des Laufbands nach 1 Minute beträgt 0 m/s^2.

oder:

Das Laufband (die Läuferin / der Läufer) bewegt sich während der ersten 2 Minuten mit konstanter Geschwindigkeit, d.h., seine Beschleunigung ist zum Zeitpunkt t = 1 min gleich null.

Der Graph von v' würde auf der 1. Achse verlaufen und nur zu den Zeitpunkten der Geschwindigkeitsänderungen ($t = 2$, $t = 4$, $t = 6$, ...) sehr hohe Werte annehmen.

d) $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 1{,}506$

zurückgelegte Weglänge: ca. 1,51 km

Mögliche Begründungen:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die Geschwindigkeiten von km/h in km/min umzurechnen, da die Zeiten (Intervallgrenzen) in Minuten gegeben sind (1 h = 60 min).

oder:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die pro Stunde zurückgelegten Wegstrecken auf die pro Minute zurückgelegten Wegstrecken umzurechnen.

Für die tatsächlich zurückgelegte Weglänge gilt:
$\frac{2}{60} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8)) \approx 1{,}388$ km

⇒ Der Näherungswert für die Weglänge weicht um ca. 118 m vom exakten Wert ab.

e) $194 = k \cdot 80 \cdot 2{,}5$
$k = 0{,}97$

Bei der doppelten / dreifachen / vierfachen Laufzeit wird die doppelte / dreifache / vierfache Strecke zurückgelegt und auch der Energiebedarf ist doppelt / dreimal / viermal so groß.

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8	163,7	327,4
10	6	218,25	436,5
12	5	261,9	523,8

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Abkühlungsprozesse

Aufgabennummer: 2_032	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AN 1.3, AN 2.1, AN 4.3, FA 1.5, FA 1.6, FA 1.7	

Wird eine Tasse mit heißem Kaffee am Frühstückstisch abgestellt, kühlt der Kaffee anfangs rasch ab, bleibt aber relativ lange warm.

Die Temperatur einer Flüssigkeit während des Abkühlens kann nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz durch eine Funktion der Form $t \mapsto T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t}$ beschrieben werden. Dabei gibt T_0 die Anfangstemperatur der Flüssigkeit (in °C) zum Zeitpunkt $t = 0$ an, T_U ist die konstante Umgebungstemperatur (in °C) und $k \in \mathbb{R}^+$ (in s^{-1}) ist eine von den Eigenschaften der Flüssigkeit und des Gefäßes abhängige Konstante.

Ein zu untersuchender Abkühlungsprozess wird durch eine Funktion T der obigen Form beschrieben. Dabei beträgt die Anfangstemperatur $T_0 = 90$ °C und die Umgebungstemperatur $T_U = 20$ °C. Die Abkühlungskonstante hat den Wert $k = 0{,}002$. Die Zeit t wird in Sekunden gemessen, die Temperatur $T(t)$ in °C.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie den Wert des Differenzenquotienten der Funktion T im Intervall [0 s; 300 s] und interpretieren Sie den berechneten Wert im Hinblick auf den beschriebenen Abkühlungsprozess!

Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von T für große Werte von t und interpretieren Sie den Verlauf im gegebenen Kontext!

b) Der Wert $T'(t)$ kann als „Abkühlungsgeschwindigkeit" der Flüssigkeit zum Zeitpunkt t gedeutet werden.

Geben Sie für den zu untersuchenden Abkühlungsprozess eine Funktionsgleichung für T' an!
Geben Sie weiters denjenigen Zeitpunkt an, zu dem der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit am größten ist!

Der Graph von T' und die t-Achse schließen im Intervall [0 s; 600 s] eine Fläche von ca. 49 Flächeneinheiten ein.
Interpretieren Sie diesen Wert unter Verwendung der entsprechenden Einheit im gegebenen Kontext!

c) Eine zweite Flüssigkeit in einem anderen Gefäß hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Temperatur von 95 °C. Nach einer Minute ist die Temperatur auf 83,4 °C gesunken, die Umgebungstemperatur beträgt $T_U = 20$ °C. Die Funktion T_2 beschreibt den Abkühlungsprozess dieser Flüssigkeit.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Abkühlungskonstante k_2 für diesen Abkühlungsprozess berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Wert!

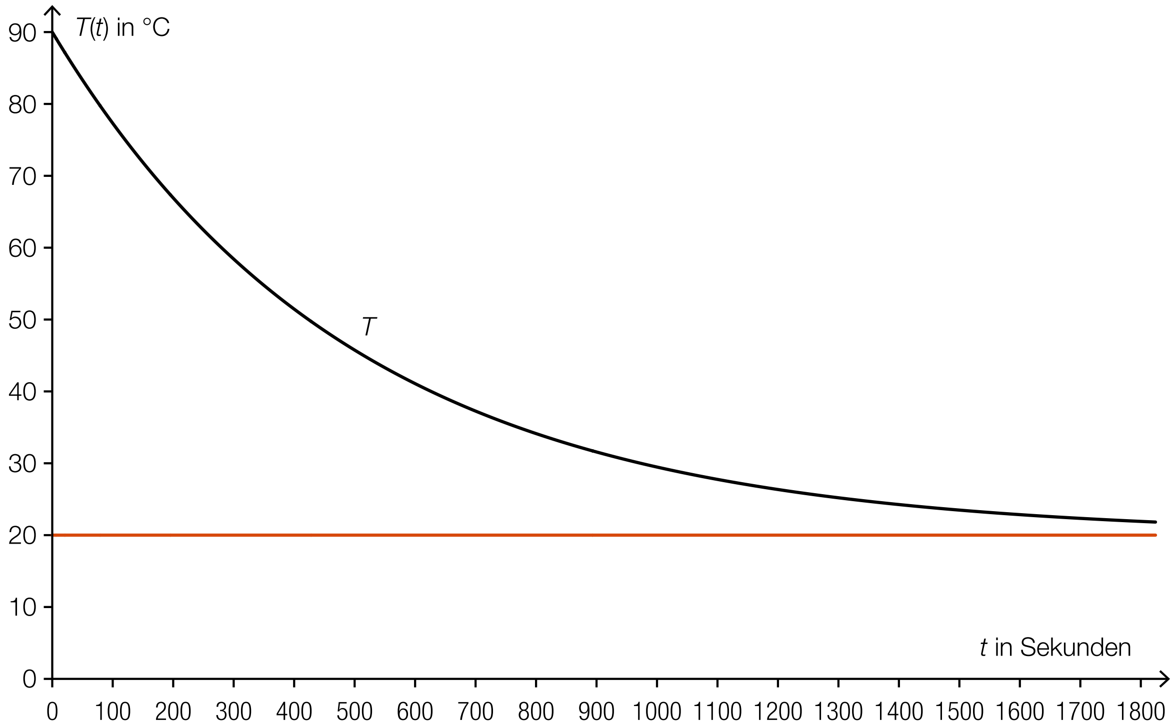
Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Graphen der Funktionen T und T_2 und interpretieren Sie die Koordinaten des Schnittpunkts im gegebenen Kontext!

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{T(300) - T(0)}{300} \approx -0{,}1053$

In den ersten fünf Minuten kühlt die Flüssigkeit durchschnittlich um ca. 0,1 °C pro Sekunde ab.

Der Graph von T nähert sich im Laufe der Zeit der Umgebungstemperatur (20 °C) an.



b) $T'(t) = -0{,}14 \cdot e^{-0{,}002 \cdot t}$

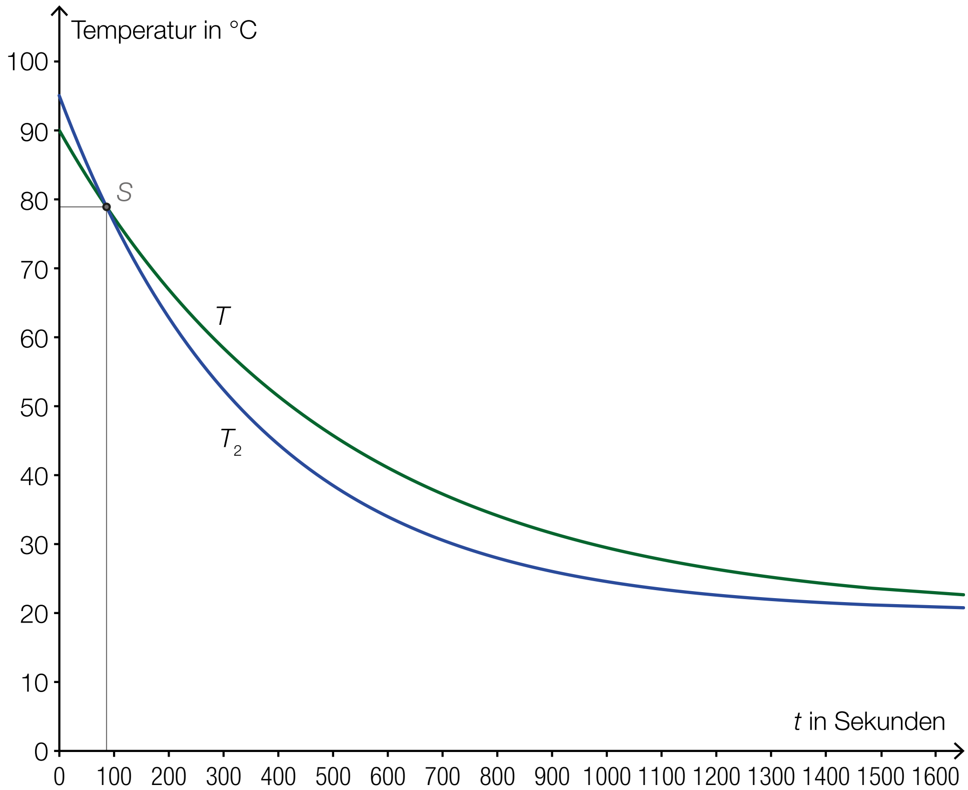
Der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit ist zum Zeitpunkt $t = 0$ am größten.

Die Flüssigkeit kühlt in den ersten zehn Minuten insgesamt um ca. 49 °C ab.

c) $T_2(t) = 20 + 75 \cdot e^{-k_2 \cdot t} \Rightarrow$

$T_2(60) = 20 + 75 \cdot e^{-k_2 \cdot 60} = 83{,}4$

$k_2 \approx 0{,}0028\ \text{s}^{-1}$



Schnittpunkt: $S \approx (86{,}2\,|\,78{,}9)$
Nach ca. 86,2 Sekunden haben beide Flüssigkeiten eine Temperatur von ca. 78,9 °C.