

# Photovoltaikanlagen

Aufgabennummer: 2\_013

Prüfungsteil: Typ 1  Typ 2

Grundkompetenzen: FA 1.3, FA 1.4, FA 1.7, AG 2.1

keine Hilfsmittel erforderlich

gewohnte Hilfsmittel möglich

besondere Technologie erforderlich

Die benachbarten Familien Lux und Hell haben auf den Dächern ihrer Einfamilienhäuser zwei baugleiche Photovoltaikanlagen installiert, deren Maximalleistung jeweils 5 kW beträgt. Nicht selbst verbrauchte elektrische Energie wird zu einem Einspeisetarif ins Netz geliefert. Energie, die nicht durch die Photovoltaikanlage bereitgestellt werden kann, muss von einem Energieunternehmen zum regulären Stromtarif zugekauft werden (netzgekoppelter Betrieb). Beide Familien wollen die Wirtschaftlichkeit ihrer Anlagen durch Messungen überprüfen.

## Aufgabenstellung:

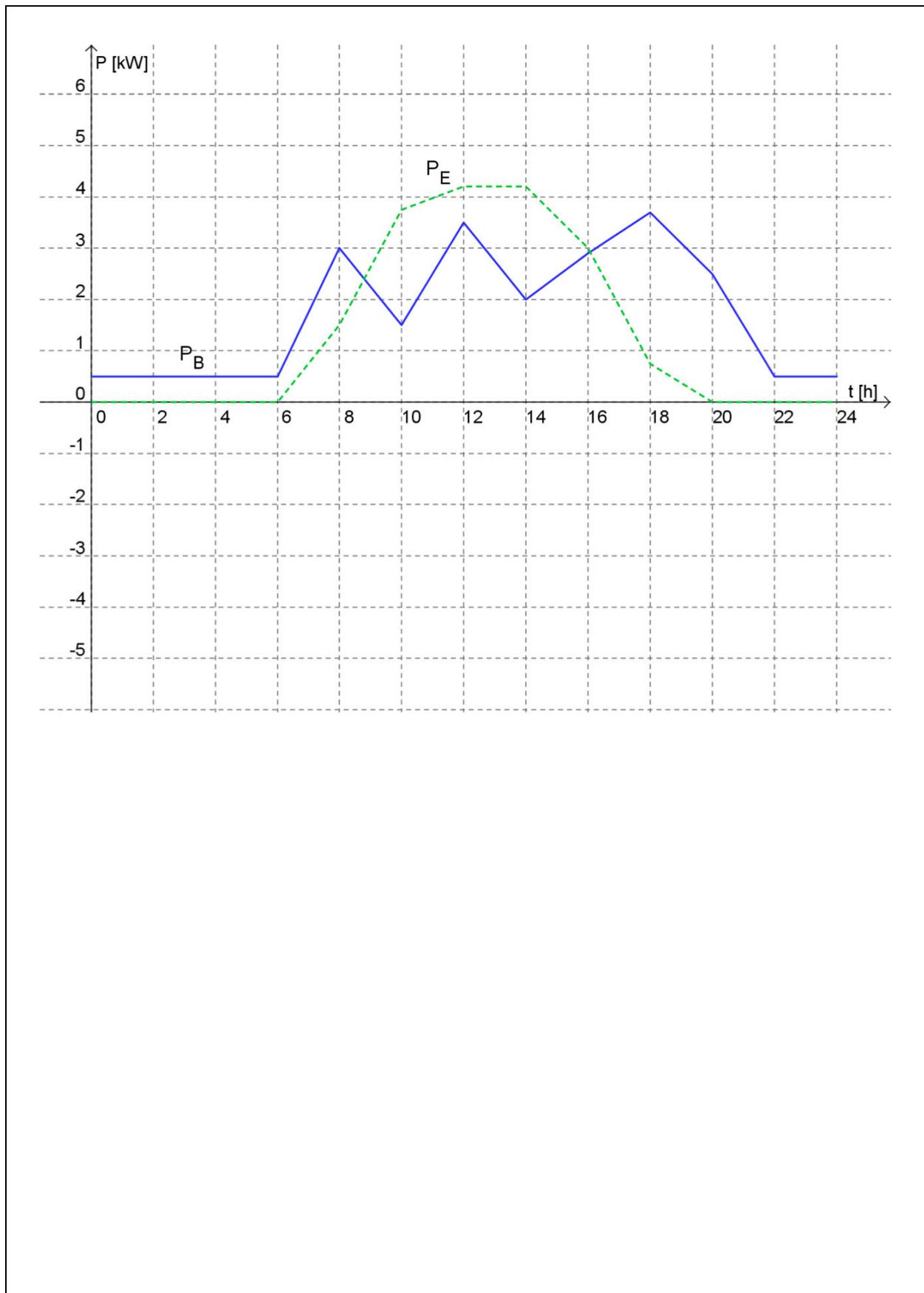
- a) Familie Lux hat dazu an einem durchschnittlichen Frühlingstag folgende Leistungsdaten für  $P_B$  (im Haus der Familie Lux benötigte Leistung) und  $P_E$  (durch die Photovoltaikanlage erzeugte elektrische Leistung) in Abhängigkeit vom Zeitpunkt  $t$  über den Tagesverlauf ermittelt. Die Leistungsdaten wurden um Mitternacht beginnend alle zwei Stunden aufgezeichnet.

Leistungsdaten:

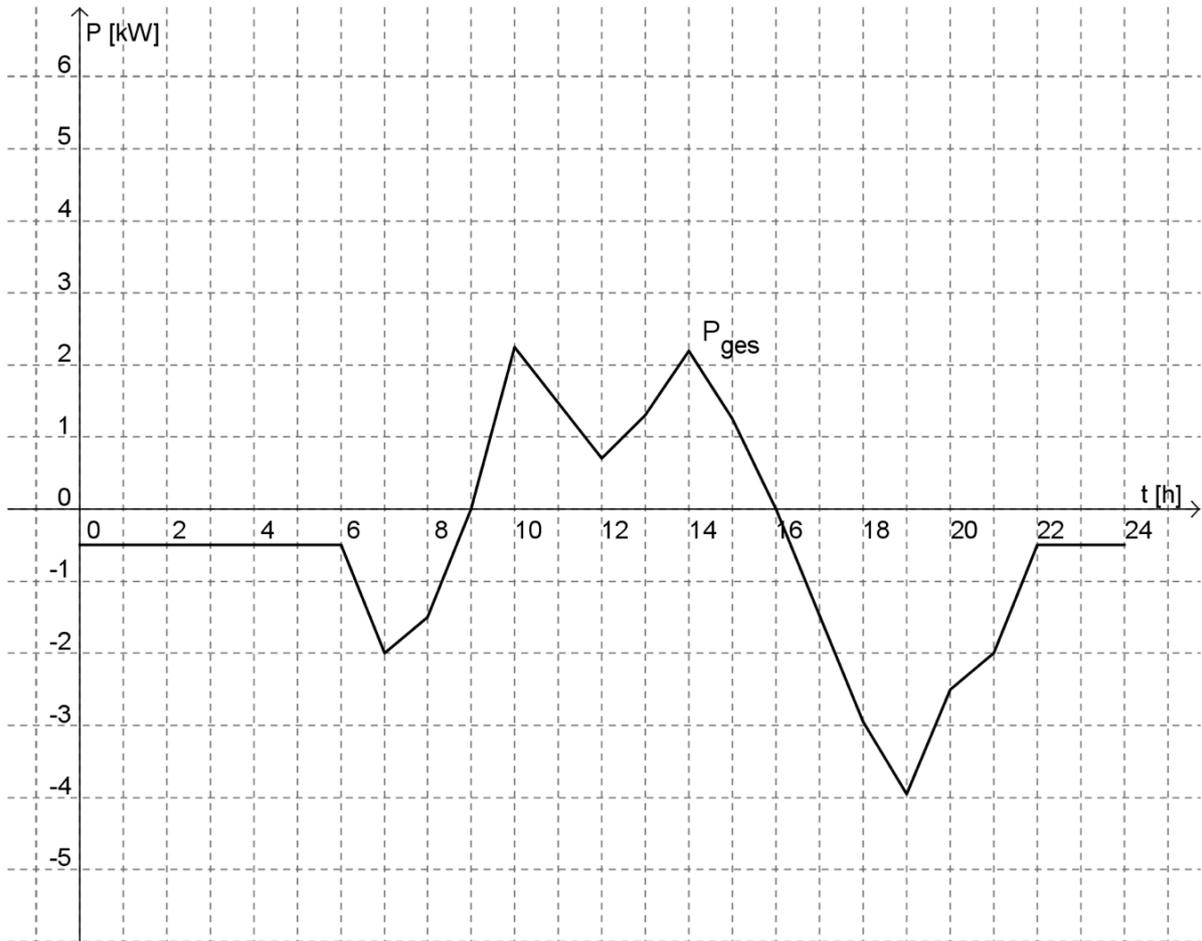
|             |     |     |     |     |     |      |     |     |     |      |     |     |     |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|-----|------|-----|-----|-----|
| $t$ in h    | 0   | 2   | 4   | 6   | 8   | 10   | 12  | 14  | 16  | 18   | 20  | 22  | 24  |
| $P_B$ in kW | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 3   | 1,5  | 3,5 | 2   | 2,9 | 3,7  | 2,5 | 0,5 | 0,5 |
| $P_E$ in kW | 0   | 0   | 0   | 0   | 1,5 | 3,75 | 4,2 | 4,2 | 3   | 0,75 | 0   | 0   | 0   |

Zeichnen Sie in die nachstehende Abbildung aus den vorgegebenen Graphen für  $P_B$  und  $P_E$  den Tagesverlauf der elektrischen Gesamtleistungsbilanz  $P_{\text{ges}}$  für die Photovoltaikanlage der Familie Lux ein! Die Gesamtleistungsbilanz  $P_{\text{ges}}$  ist die Differenz der beiden Leistungsteile  $P_E - P_B$ .

Markieren Sie zusätzlich in der Abbildung die gesamte über den Tagesverlauf erzeugte elektrische Energie dieser Photovoltaikanlage!



b) Familie Hell hat aus einer an einem durchschnittlichen Frühlingstag erfolgten stündlichen Messung folgenden Tagesverlauf für die Gesamtleistungsbilanz  $P_{ges}$  ihrer elektrischen Leistung ermittelt und durch den gegebenen Graphen modelliert:



Geben Sie an, was in dieser Grafik positive bzw. negative Funktionswerte für  $P_{ges}$  bedeuten!

Positive Funktionswerte .....

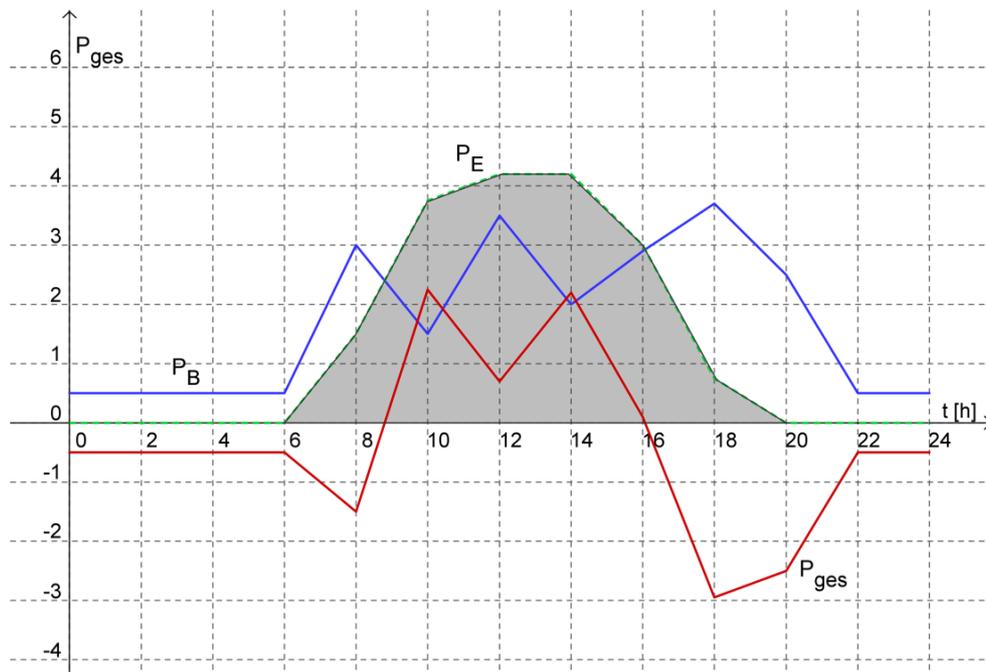
Negative Funktionswerte .....

Familie Hell möchte den Amortisationszeitpunkt für die Photovoltaikanlage ermitteln. Das ist derjenige Zeitpunkt, ab dem die Errichtungskosten gleich hoch wie die Einsparungen durch den Betrieb der Anlage sind. Ab diesem Zeitpunkt arbeitet die Anlage rentabel.

Kann sich die Anlage für die Familie Hell auch amortisieren, wenn die finanzielle Tagesbilanz der Photovoltaikanlage für alle Tage im Jahr negativ ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

## Möglicher Lösungsweg

a)



Die eingefärbte Fläche stellt die gesamte über den Tagesverlauf erzeugte elektrische Energie dieser Photovoltaikanlage dar.

- b) Positive Funktionswerte bedeuten, dass elektrische Energie ans Stromnetz geliefert wird. Negative Funktionswerte bedeuten, dass elektrische Energie aus dem Netz entnommen wird.
- Die Anlage kann sich amortisieren, wenn der Betrag, den man aufgrund der Anlage an Stromkosten eingespart hat, größer ist als der Anschaffungsbetrag der Anlage.  
(Formulierungen, die sinngemäß dieser Aussage entsprechen, sind als richtig zu werten.)

# Treibstoffverbrauch

Aufgabennummer: 2\_015

Prüfungsteil: Typ 1  Typ 2

Grundkompetenzen: AG 2.1, FA 1.5, FA 2.3, FA 2.5

keine Hilfsmittel  
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel  
möglich

besondere Technologie  
erforderlich

Fast vier Fünftel aller Güter werden zumindest auf einem Teil ihres Weges vom Erzeuger zum Konsumenten mit dem Schiff transportiert.

In der Schifffahrt werden Entfernungen in Seemeilen (1 sm = 1,852 km) und Geschwindigkeiten in Knoten (1 K = 1 sm/h) angegeben.

Der stündliche Treibstoffverbrauch  $y$  (in Tonnen pro Stunde) des Schiffs *Ozeanexpress* kann in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit  $x$  (in Knoten) durch die Gleichung  $y = 0,00002x^4 + 0,6$  beschrieben werden. Dieses Schiff hat noch einen Treibstoffvorrat von 600 Tonnen.

## Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie eine Formel für die Zeit  $t$  (in Stunden) an, die das Schiff mit einer konstanten Geschwindigkeit  $x$  unterwegs sein kann, bis dieser Treibstoffvorrat aufgebraucht ist.

Die Funktion  $f$  soll den Weg  $f(x)$  beschreiben, den das Schiff mit diesem Treibstoffvorrat bei einer konstanten Geschwindigkeit  $x$  zurücklegen kann. Geben Sie den Term der Funktion  $f$  an!

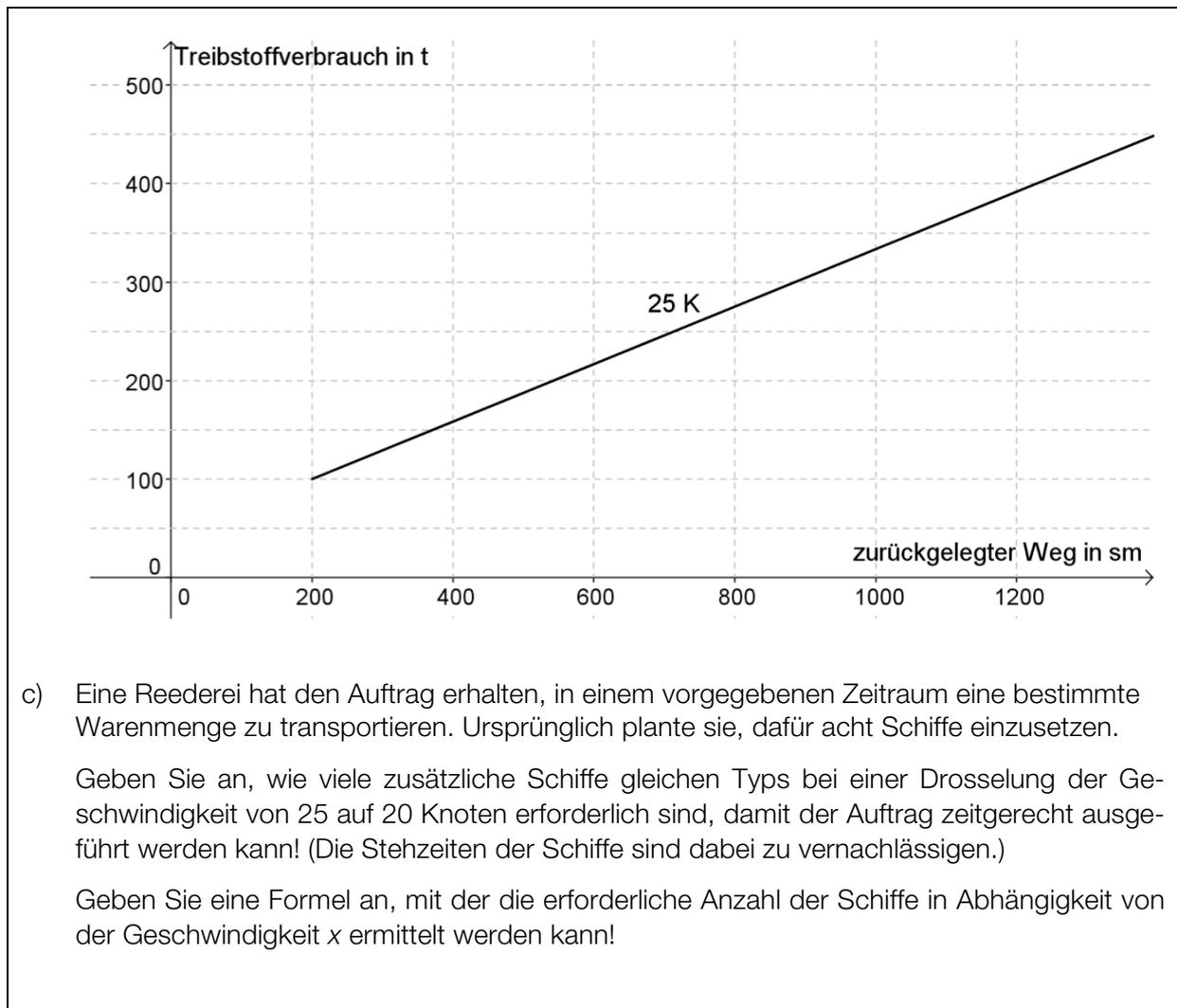
Die Funktion  $f$  hat in  $H(10|7\ 500)$  ein Maximum. Interpretieren Sie die Koordinaten dieses Punktes im vorliegenden Kontext!

- b) Der Chef eines Schifffahrtsunternehmens stellte fest, dass sich der Treibstoffverbrauch um rund 50 % verringert, wenn Schiffe statt mit 25 nur noch mit 20 Knoten unterwegs sind.

In der nachstehenden Grafik wird der Treibstoffverbrauch in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg bei einer Geschwindigkeit von 25 Knoten dargestellt.

Überlegen Sie, wie sich diese Grafik ändert, wenn die Geschwindigkeit nur 20 Knoten beträgt, und zeichnen Sie den entsprechenden Graphen ein!

Interpretieren Sie, was die 50%ige Treibstoffreduktion für die Steigung der Geraden bedeutet!



- c) Eine Reederei hat den Auftrag erhalten, in einem vorgegebenen Zeitraum eine bestimmte Warenmenge zu transportieren. Ursprünglich plante sie, dafür acht Schiffe einzusetzen.

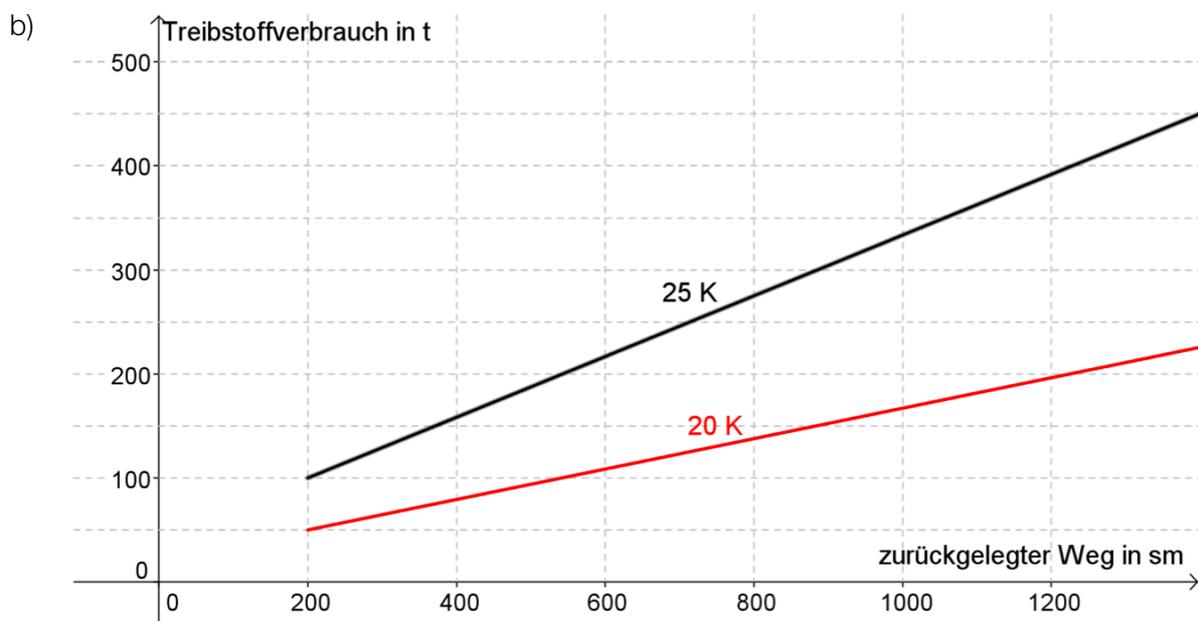
Geben Sie an, wie viele zusätzliche Schiffe gleichen Typs bei einer Drosselung der Geschwindigkeit von 25 auf 20 Knoten erforderlich sind, damit der Auftrag zeitgerecht ausgeführt werden kann! (Die Stehzeiten der Schiffe sind dabei zu vernachlässigen.)

Geben Sie eine Formel an, mit der die erforderliche Anzahl der Schiffe in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit  $x$  ermittelt werden kann!

## Möglicher Lösungsweg

a)  $t = \frac{600}{0,00002x^4 + 0,6}$ ;  $f(x) = \frac{600}{0,00002x^4 + 0,6} \cdot x$

Bei einer Geschwindigkeit von 10 Knoten kann mit dem vorhandenen Treibstoff die längste Strecke, nämlich 7 500 Seemeilen, zurückgelegt werden.



Die Steigung der Geraden wird halbiert, wenn die Treibstoffverbrauch um 50 % reduziert wird.

c) Es müssen zwei weitere Schiffe eingesetzt werden.

$$\text{Anzahl der Schiffe} = \frac{200}{x}$$

# Hohlspiegel

Aufgabennummer: 2\_023

Prüfungsteil: Typ 1  Typ 2

Grundkompetenzen: a) AG 2.1, FA 1.8 b) FA 1.7, FA 1.8 c) AG 2.1, FA 1.2

keine Hilfsmittel  
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel  
möglich

besondere Technologie  
erforderlich

In der Physik spricht man von einem kugelförmigen Hohlspiegel, wenn er Teil einer innenver-  
 spiegelten Kugel ist. Charakteristische Punkte beim Hohlspiegel sind der Mittelpunkt  $M$  der  
 Kugel, der Scheitelpunkt  $S$  und der Brennpunkt  $F$  des Spiegels.

Es gelten folgende Relationen (siehe untenstehende Abbildungen):

Brennweite  $f$  des Spiegels:  $f = \overline{FS} = \frac{\overline{MS}}{2}$  ( $f > 0$ )

Radius der Kugel:  $\overline{MS} = 2 \cdot f$

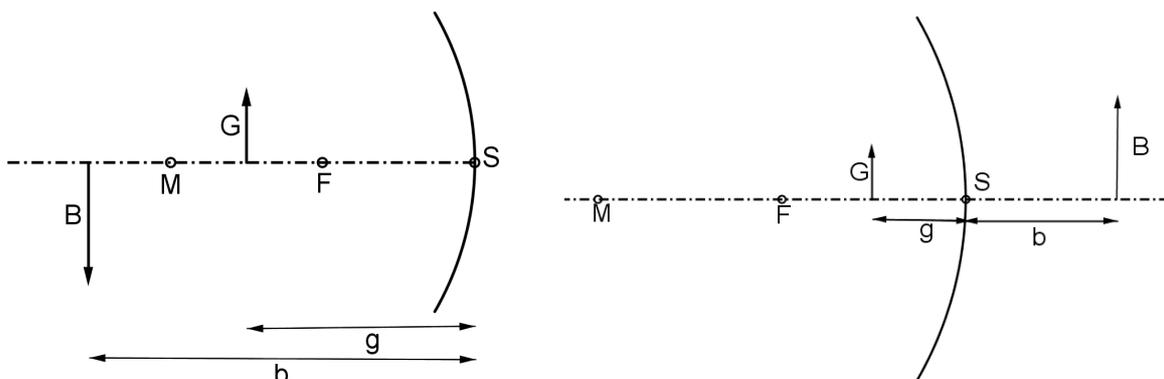
Die Entfernung eines Gegenstands  $G$  (mit der Höhe  $G$ ) vom Scheitelpunkt  $S$  wird mit  $g$  ( $g > 0$ )  
 bezeichnet, die Entfernung des nach Reflexion der Strahlen am Spiegel entstehenden Bildes  $B$   
 (mit der Höhe  $B$ ) vom Scheitel  $S$  mit  $b$ .

Das Vorzeichen von  $b$  hat dabei die folgenden Bedeutungen:

- $b > 0$ : Es entsteht ein reelles Bild „vor“ dem Spiegel, das auf einem Schirm aufgefangen  
 werden kann.
- $b < 0$ : Es entsteht ein virtuelles Bild „hinter“ dem Spiegel.

Skizzen des Querschnitts:

- linke Grafik: reelles Bild  $B$  eines Gegenstandes  $G$  ( $b > 0$ )
- rechte Grafik: virtuelles Bild  $B$  eines Gegenstandes  $G$  ( $b < 0$ )



Aufgrund physikalischer Überlegungen gelten unter bestimmten Bedingungen die Beziehungen  $\frac{G}{B} = \frac{g}{b}$  und  $\frac{G}{B} = \frac{g-f}{f}$ . Daraus ergibt sich der Zusammenhang  $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ .

Der Quotient  $\frac{B}{G}$  bestimmt den Vergrößerungsfaktor; er ist bei einem reellen Bild positiv ( $g > 0$  und  $b > 0$ ) und bei einem virtuellen Bild negativ ( $g > 0$  und  $b < 0$ ).

#### Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie den Vergrößerungsfaktor  $\frac{B}{G}$  für  $f = 40$  cm und  $g = 50$  cm an!

Geben Sie ein Intervall für die Gegenstandsweite  $g$  an, damit ein virtuelles Bild entsteht!

Begründen Sie Ihre Antwort durch eine mathematische Argumentation!

- b) Stellen Sie die Bildweite  $b$  als Funktion der Gegenstandsweite  $g$  bei konstanter Brennweite  $f$  dar! Betrachten Sie die Fälle  $g = 2f$  sowie  $g = f$  und geben Sie die jeweilige Auswirkung für  $b$  an!

Was kann mithilfe dieser Funktion über den Grenzwert von  $b$  ausgesagt werden, wenn  $g > f$  ist und sich  $g$  der Brennweite  $f$  annähert? Tätigen Sie eine entsprechende Aussage und begründen Sie diese durch Betrachtung von Zähler und Nenner!

- c) Leiten Sie aus den gegebenen Beziehungen  $\frac{G}{B}$  die oben angeführte Formel  $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$  her! Geben Sie die notwendigen Umformungsschritte an!

Der Ausdruck  $\frac{1}{b}$  kann als Funktion in Abhängigkeit von  $g$  der Form  $\frac{1}{b}(g) = a \cdot g^k + c$  betrachtet werden. Geben Sie die Werte der Parameter  $a$  und  $c$  sowie des Exponenten  $k$  für diesen Fall an!

## Möglicher Lösungsweg

a)  $\frac{1}{b} = \frac{1}{40} - \frac{1}{50} = \frac{1}{200} \rightarrow$  Bildweite 200 cm = 2 m

$$\frac{B}{G} = \frac{200}{50} = 4 \rightarrow \text{vierfache Vergrößerung}$$

Bildweite negativ:

Intervall für  $g$ :  $(0; f)$  bzw. Angabe des Intervalls durch:  $0 < g < f$

Akzeptiert wird auch der Bezug zur ersten Fragestellung mit  $f = 40$ .

Intervall für  $g$ :  $(0; 40)$  bzw.  $0 < g < 40$

Begründung 1: Aus  $b = \frac{g \cdot f}{g - f} < 0$  folgt  $g < f$ .

Begründung 2: Aus  $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$  folgt  $g < f$ , da der Kehrwert von  $b$  dann größer ist als der Kehrwert von  $f$ .

b) Funktion:  $b(g) = \frac{f \cdot g}{g - f}$

$b(2f) = 2f$ ; Bildweite und Gegenstandsweite sind gleich groß und entsprechen dem Radius der Kugel. Erweiterung: Auch  $G$  und  $B$  sind gleich groß.  $b(f)$  existiert nicht; der Nenner hat den Wert 0.

(Auch die Form  $b(g) = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$  ist als richtig zu werten.)

Annäherung von  $g$  an  $f$  mit  $g > f$ :

Der Ausdruck  $\frac{f \cdot g}{g - f}$  ist positiv; der Zähler ist eine positive Zahl (auch: nähert sich dem Wert  $f^2$ ), der Nenner ist positiv und nähert sich dem Wert 0, daher wird  $b$  immer größer (der Grenzwert ist unendlich – oder ähnliche Aussagen).

Anmerkungen: Wenn die Form  $b(g) = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$  verwendet wird, sind auch umgangssprachliche

Formulierungen wie „oben steht die positive Zahl 1, unten steht etwas Positives, das gegen 0 geht, daher ist der Grenzwert +1“ als richtig zu werten. Auch Argumente, bei denen teilweise oder immer „oben“ statt „Zähler“ und „unten“ statt „Nenner“ (oder Ähnliches) verwendet wird, sind als richtig zu werten.

c) Zwei mögliche Umformungen werden angeführt:

Variante 1:

$$\frac{g}{b} = \frac{g-f}{f}$$

$$\frac{g}{b} = \frac{g}{f} - 1 \quad | : g$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$$

Variante 2:

$$\frac{g}{b} = \frac{g-f}{f} \quad | \cdot (b \cdot f)$$

$$g \cdot f = b \cdot g - f \cdot b \quad | : (b \cdot g \cdot f)$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$$

Daraus ergibt sich direkt der angegebene Zusammenhang.

$$\frac{1}{b}(g) = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \Rightarrow a = -1, k = -1, c = \frac{1}{f}$$

# Waldbewirtschaftung

Aufgabennummer: 2\_027

Prüfungsteil: Typ 1  Typ 2

Grundkompetenzen: AG 2.1, FA 4.1, FA 4.3, FA 5.1, FA 5.6, AN 1.1, AN 1.4, WS 1.3

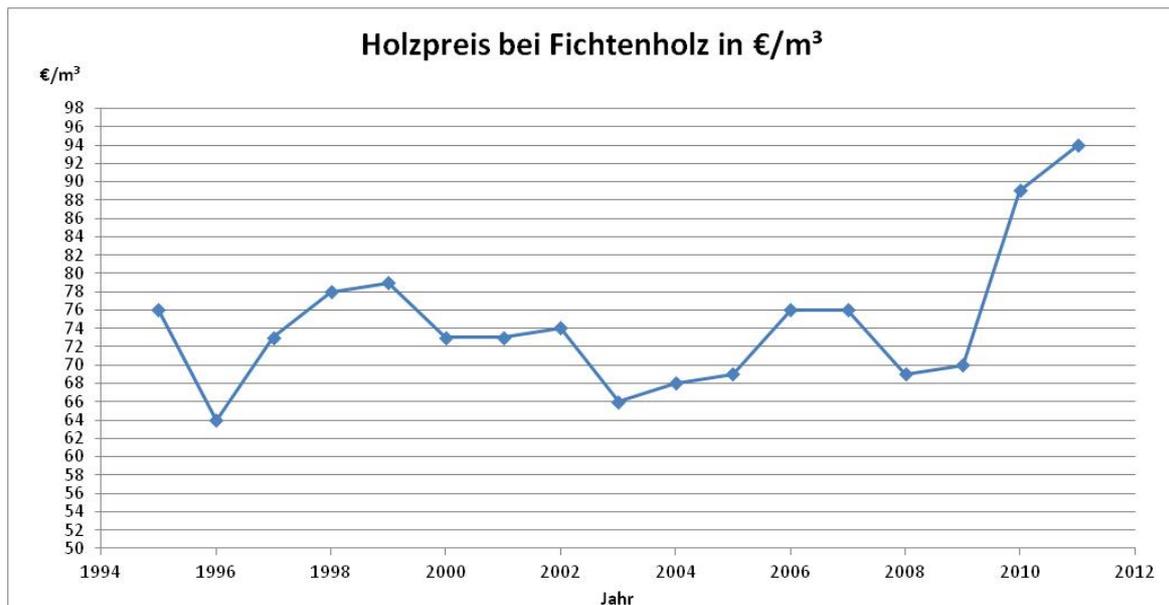
keine Hilfsmittel  
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel  
möglich

besondere Technologie  
erforderlich

Der Holzbestand eines durchschnittlichen Fichtenwaldes in Österreich beträgt  $350 \text{ m}^3$  pro Hektar Waldfläche. Pro Jahr ist mit einem durchschnittlichen Zuwachs von  $3,3 \%$  zu rechnen. Bei einer nachhaltigen Bewirtschaftung, wie sie in Österreich vorgeschrieben ist, soll der Holzbestand des Waldes gleich bleiben oder leicht zunehmen.

Der nachstehenden Grafik kann die Entwicklung des Holzpreises bei Fichtenholz im Zeitraum von 1995 bis 2011 entnommen werden.



Datenquelle: <http://bfw.ac.at/db/bfwcms2.web?dok=9430> [21.06.2016].

## Aufgabenstellung:

- a) Bestimmen Sie das maximale Holzvolumen (in  $\text{m}^3/\text{ha}$ ), das bei einer nachhaltigen Bewirtschaftung pro Jahr geschlägert werden darf!

Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Holzbestand eines durchschnittlichen Fichtenwaldes innerhalb von 10 Jahren zunimmt, unter der Annahme, dass keinerlei Schlägerungen vorgenommen werden, alle anderen genannten Rahmenbedingungen jedoch unverändert bleiben!

- b) Der Holzbestand eines 20 ha großen Fichtenwaldes wird in einem Zeitraum von 15 Jahren jährlich jeweils am Ende des Jahres (nachdem der jährliche Zuwachs abgeschlossen ist) um  $10 \text{ m}^3$  pro Hektar (also um  $200 \text{ m}^3$ ) verringert.

Ermitteln Sie den Holzbestand des Fichtenwaldes nach Ablauf von 15 Jahren!

Geben Sie an, ob bei dieser Art der Bewirtschaftung der Holzbestand des Fichtenwaldes trotz Schlägerung exponentiell zunimmt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

- c) Ermitteln Sie für den Zeitraum 2003 bis 2011 die empirische Standardabweichung des Holzpreises entsprechend der Formel  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ !

Dabei werden mit  $x_i$  die Beobachtungswerte und mit  $\bar{x}$  das arithmetische Mittel der Beobachtungswerte bezeichnet. Lesen Sie die dazu notwendigen Daten aus der Grafik ab!

Begründen Sie anhand der Grafik, warum die empirische Standardabweichung des Holzpreises für den Zeitraum 1998 bis 2004 kleiner ist als die empirische Standardabweichung für den Zeitraum 2005 bis 2011!

- d) Die Entwicklung des Holzpreises soll für den Zeitraum von 2009 bis 2011 durch eine Funktion  $P$  mit  $P(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0$  modelliert werden. Der Holzpreis  $P(t)$  wird in  $\text{€}/\text{m}^3$  angegeben, die Zeitrechnung beginnt mit dem Jahr 2009 und erfolgt in der Einheit „Jahre“.

Führen Sie die Modellierung auf Basis der Daten für die Jahre 2009, 2010 und 2011 durch und begründen Sie, warum der Parameter  $a$  negativ sein muss!

Ermitteln Sie eine Prognose für den in der Grafik nicht angegebenen Holzpreis für das Jahr 2012 mithilfe dieser Modellfunktion!

- e) Bestimmen Sie für den Zeitraum von 1995 bis 2011 die absoluten Holzpreisänderungen aufeinanderfolgender Jahre!

Geben Sie dasjenige Intervall [Jahr 1; Jahr 2] an, in dem sich der Holzpreis prozentuell am stärksten ändert!

## Möglicher Lösungsweg

a)  $350 \cdot 0,033 = 11,55$

Jährlich dürfen bei einer nachhaltigen Bewirtschaftung maximal 11,55 m<sup>3</sup>/ha Holz geschlägert werden.

$$1,033^{10} \approx 1,384$$

Unter der Annahme, dass keine Schlägerungen erfolgen, nimmt der Holzbestand innerhalb von zehn Jahren um ca. 38,4 % zu.

b)

| Jahr | Holzbestand in m <sup>3</sup> |
|------|-------------------------------|
| 0    | 7 000                         |
| 1    | 7 031                         |
| 2    | 7 063,023                     |
| 3    | 7 096,102759                  |
| 4    | 7 130,27415                   |
| 5    | 7 165,573197                  |
| 6    | 7 202,037112                  |
| 7    | 7 239,704337                  |
| 8    | 7 278,61458                   |
| 9    | 7 318,808861                  |
| 10   | 7 360,329554                  |
| 11   | 7 403,220429                  |
| 12   | 7 447,526703                  |
| 13   | 7 493,295085                  |
| 14   | 7 540,573822                  |
| 15   | <b>7 589,412759</b>           |

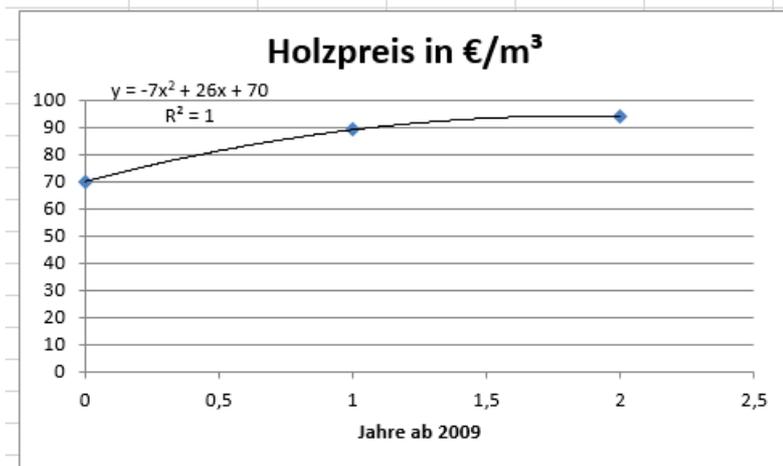
Wenn der Holzbestand eines 20 ha großen Fichtenwaldes jährlich jeweils am Ende des Jahres um 10 m<sup>3</sup> pro Hektar verringert wird, beträgt er nach Ablauf von 15 Jahren ca. 7 589,41 m<sup>3</sup>.

Bei dieser Art der Bewirtschaftung nimmt der Holzbestand nicht exponentiell zu, da das jährliche prozentuelle Wachstum nicht konstant ist.

c) Die empirische Standardabweichung beträgt ca. 9,91 €/m<sup>3</sup>.

Im Zeitraum von 1998 bis 2004 ist die empirische Standardabweichung des Holzpreises kleiner als im Zeitraum von 2005 bis 2011, da die Schwankungen der Werte des Holzpreises im Zeitraum von 1998 bis 2004 geringer sind.

d)  $P(t) = -7 \cdot t^2 + 26 \cdot t + 70$



Der Wert des Parameters  $a$  muss negativ sein, weil der Graph der Modellfunktion eine nach unten geöffnete Parabel ist.

Prognosewert für das Jahr 2012:

$$P(3) = 85 \text{ €/m}^3$$

e)

| Jahr | Holzpreis in €/m <sup>3</sup> | absolute Änderungen | prozentuelle Änderungen |
|------|-------------------------------|---------------------|-------------------------|
| 1995 | 76                            |                     |                         |
| 1996 | 64                            | -12                 | -15,79                  |
| 1997 | 73                            | 9                   | 14,06                   |
| 1998 | 78                            | 5                   | 6,85                    |
| 1999 | 79                            | 1                   | 1,28                    |
| 2000 | 73                            | -6                  | -7,59                   |
| 2001 | 73                            | 0                   | 0                       |
| 2002 | 74                            | 1                   | 1,37                    |
| 2003 | 66                            | -8                  | -10,81                  |
| 2004 | 68                            | 2                   | 3,03                    |
| 2005 | 69                            | 1                   | 1,47                    |
| 2006 | 76                            | 7                   | 10,14                   |
| 2007 | 76                            | 0                   | 0                       |
| 2008 | 69                            | -7                  | -9,21                   |
| 2009 | 70                            | 1                   | 1,45                    |
| 2010 | 89                            | 19                  | 27,14                   |
| 2011 | 94                            | 5                   | 5,62                    |

Im Zeitraum [2009; 2010] ändert sich der Holzpreis prozentuell am stärksten.

# Stratosphärensprung

Aufgabennummer: 2\_028

Prüfungsteil: Typ 1  Typ 2

Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, FA 2.1, FA 2.2

Am 14.10.2012 sprang der österreichische Extremsportler Felix Baumgartner aus einer Höhe von 38 969 m über dem Meeresspiegel aus einer Raumkapsel. Er erreichte nach 50 s in der nahezu luftleeren Stratosphäre eine Höchstgeschwindigkeit von 1 357,6 km/h ( $\approx 377,1$  m/s) und überschritt dabei als erster Mensch im freien Fall die Schallgeschwindigkeit, die bei 20 °C ca. 1 236 km/h ( $\approx 343,3$  m/s) beträgt, in der Stratosphäre wegen der niedrigen Lufttemperaturen aber deutlich geringer ist.

Die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft hängt bei Windstille nur von der Lufttemperatur  $T$  ab. Für die Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) werden nachstehend zwei Formeln angegeben, die – bis auf einen (gerundeten) Faktor – äquivalent sind. Die Lufttemperatur  $T$  wird in beiden Formeln in °C angegeben.

$$v_1 = \sqrt{401,87 \cdot (T + 273,15)}$$

$$v_2 = 331,5 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273,15}}$$

## Aufgabenstellung:

- a) Die Fallbeschleunigung  $a$  eines Körpers im Schwerfeld der Erde ist abhängig vom Abstand des Körpers zum Erdmittelpunkt. Die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche auf Meereshöhe, d. h. bei einer Entfernung von  $r = 6371\,000$  m vom Erdmittelpunkt, beträgt bei vernachlässigbarem Luftwiderstand ca.  $9,81$  m/s<sup>2</sup>.

Für die Fallbeschleunigung  $a$  gilt:  $a(r) = \frac{G \cdot M}{r^2}$ , wobei  $G$  die Gravitationskonstante,  $M$  die Erdmasse und  $r$  der Abstand des Körpers vom Erdmittelpunkt ist. Es gilt:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}; M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Berechnen Sie den Wert der Fallbeschleunigung, die auf Felix Baumgartner beim Absprung aus der Raumkapsel wirkte!

$$a = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m/s}^2$$

Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung, die auf Felix Baumgartner bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit wirkte!

- b) Als Felix Baumgartner seine Höchstgeschwindigkeit erreichte, bewegte er sich um 25 % schneller als der Schall in dieser Höhe.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der unter Verwendung einer der beiden in der Einleitung genannten Formeln die Lufttemperatur, die zu diesem Zeitpunkt geherrscht hat, berechnet werden kann, und ermitteln Sie diese Lufttemperatur!

Untersuchen Sie mithilfe der beiden Formeln den Quotienten der Schallgeschwindigkeiten im Lufttemperaturintervall  $[-60\text{ °C}; 20\text{ °C}]$  in Schritten von  $10\text{ °C}$  und geben Sie eine Formel an, die in diesem Lufttemperaturintervall den Zusammenhang zwischen  $v_1$  und  $v_2$  beschreibt!

- c) Zeigen Sie mithilfe von Äquivalenzumformungen, dass die beiden Formeln für die Schallgeschwindigkeit in der Einleitung bis auf einen (gerundeten) Faktor äquivalent sind! Gehen Sie dabei von der Formel für  $v_1$  aus!

Die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit  $v_1$  von der Lufttemperatur  $T$  kann im Lufttemperaturintervall  $[-20\text{ °C}; 40\text{ °C}]$  in guter Näherung durch eine lineare Funktion  $f$  mit  $f(T) = k \cdot T + d$  modelliert werden.

Ermitteln Sie die Werte der Parameter  $k$  und  $d$  und interpretieren Sie diese Werte im gegebenen Kontext!

## Möglicher Lösungsweg

a)  $r_1 = 6371000 + 38969 = 6409969 \text{ m}$

$$a(r_1) = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6409969^2} = 9,69 \text{ m/s}^2$$

mittlere Beschleunigung:  $a = \frac{377,1}{50} = 7,54 \text{ m/s}^2$

b)  $\frac{377,1}{1,25} \approx 301,7 \text{ m/s}$

$$v_1(T) = 301,7 \Rightarrow T \approx -46,7 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\text{bzw. } v_2(T) = 301,7 \Rightarrow T \approx -46,9 \text{ }^\circ\text{C}$$

| $T \text{ in } ^\circ\text{C}$ | $v_1 \text{ in m/s}$ | $v_2 \text{ in m/s}$ | $\frac{v_2}{v_1}$ |
|--------------------------------|----------------------|----------------------|-------------------|
| -60                            | 292,67               | 292,84               | 1,00055           |
| -50                            | 299,46               | 299,63               | 1,00055           |
| -40                            | 306,10               | 306,27               | 1,00055           |
| -30                            | 312,59               | 312,77               | 1,00055           |
| -20                            | 318,96               | 319,13               | 1,00055           |
| -10                            | 325,20               | 325,38               | 1,00055           |
| 0                              | 331,32               | 331,50               | 1,00055           |
| 10                             | 337,33               | 337,51               | 1,00055           |
| 20                             | 343,23               | 343,42               | 1,00055           |

$$v_2 \approx 1,00055 \cdot v_1 \text{ bzw. } v_1 \approx 0,99945 \cdot v_2$$

c) 
$$v_1 = \sqrt{401,87 \cdot (T + 273,15)} = \sqrt{401,87 \cdot 273,15 \cdot \left(\frac{T}{273,15} + 1\right)} \approx$$

$$\approx \sqrt{109770,8 \cdot \left(\frac{T}{273,15} + 1\right)} \approx 331,3 \cdot \sqrt{\frac{T}{273,15} + 1}$$

Der Faktor 331,3 unterscheidet sich nur geringfügig vom Faktor 331,5 in der Formel für  $v_2$ .

$$k = \frac{v_1(40) - v_1(-20)}{60} \approx 0,6 \dots \text{ pro } 1 \text{ }^\circ\text{C} \text{ nimmt die Schallgeschwindigkeit um ca. } 0,6 \text{ m/s zu}$$

$$d = v_1(0) \approx 331,3 \dots \text{ Schallgeschwindigkeit bei } 0 \text{ }^\circ\text{C}$$