Kurzübersicht - Unterstufe

Mathematik auf dem PC

in linearer Darstellungsweis

Teil 4

Rechenregeln, Formeln, Beschreibung geometrischer Figuren

Inhalt: Kurzer Überblick über die Mathematik der Unterstufe

Aktualisiert im Dezember 2018

Inhaltsverzeichnis

1. Rechenarten

1.1. Addition

5 +7 =12, umkehrbar (kommutativ)

Summand plus Summand ist Summe

(+5) +(+7) =(+12)

(+5) +(-7) =(-2)

(-5) +(+7) =(+2)

(-5) +(-7) =(-12)

1.2. Subtraktion

5 -7 =-2, nicht umkehrbar (nicht kommutativ)

Minuend minus Subtrahend ist Differenz

(+5) -(+7) =(-2)

(+5) -(-7) =(+12)

(-5) -(+7) =(-12)

(-5) -(-7) =(+2)

1.3. Multiplikation

6 *8, umkehrbar (kommutativ)

Faktor mal Faktor ist Produkt

(+5) *(+7) =(+35)

(+5) *(-7) =(-35)

(-5) *(+7) =(-35)

(-5) *(-7) =(+35)

1.4. Division

45 /5 =9, nicht umkehrbar (nicht kommutativ)

Dividend dividiert durch Divisor ist Quotient

(+15) /(+3) =(+5)

(+15) /(-3) =(-5)

(-15) /(+3) =(-5)

(-15) /(-3) =(+5)

1.5. Potenzieren

5*5 =5^2 =25

5 Basis, 2 Hochzahl: 5^2

3 *3 *3 *3 =3^4 =81

3 Basis, 4 Hochzahl: 3^4

(-4)^2 =(-4) *(-4) =+16

-4 Basis, 2 Hochzahl: (-4)^2

(-7)^3 =(-7) *(-7) *(-7) =-343

Addieren von Potenzen:

8^2 +8^2 =2 *8^2

5 *3^4 +3 *3^4 =8 *3^4

es darf nur addiert werden, wenn die Basis und die Hochzahl gleich sind

4^2 +3^2 ist nicht 7^2, sondern 16 +9 =25

wenn die Basis verschieden ist, darf nicht addiert werden

Multiplizieren von Potenzen:

4^2 *4^3 =4^(2 +3) =4^5

beim Multiplizieren werden die Hochzahlen addiert, wenn die Basis gleich ist

Dividieren von Potenzen:

7^5 /7^3 =7^4

beim Dividieren werden die Hochzahlen subtrahiert, wenn die Basis gleich ist

1.6. Wurzelziehen

Umkehrung des Potenzierens

'w(25) =25^(1/2) =5 (weil 5 *5 =5^2 =25)

'w[3](8) =8^(1/3) =2 (weil 2 *2 *2 =2^3 =8)

Addieren von Wurzelausdrücken

25^(1/2)+ 16^(1/2) ist nicht 49^(1/2), sondern 5 +4 =9

Wurzeln dürfen nicht addiert werden, ohne sie vorher auszurechnen

Multiplizieren von Wurzelausdrücken

25^(1/2) *16^(1/2) =(25 *16)^(1/2) =400(1/2) =20

gleiche Wurzeln dürfen unter eine Wurzel gesetzt und dann multipliziert werden

Dividieren von Wurzelausdrücken

64^(1/2) /16^(1/2) =(64/16)^(1/2) =4^(1/2) =2

gleiche Wurzeln dürfen unter eine Wurzel gesetzt und dann dividiert werden

Teilweises Wurzelziehen

50^(1/2) =(25 *2)^(1/2) =5 *2^(1/2)

Zuerst in Produkte zerlegen, die Quadratzahlen enthalten

2. Vorrangregeln

Zuerst Klammern ausrechnen

Potenzieren und Wurzelziehen kommen vor Multiplikationen und Divisionen

Multiplikationen und Divisionen kommen vor Additionen und Subtraktionen

(4 +5) +8 *7 =9 +8*7 =9 +56 =65

(7 +6*8) -3 -7 *1 =(7 +48) -3 -7*1 =55 -3 -7 =52 -7 =45

(3 +2^3) *5 =(3 *8) *5 =11 *5 =55

3. Teilbarkeitsregeln

Zwei Zahlen sind teilerfremd, wenn sie keine gemeinsamen Teiler außer 1 haben.

Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn die letzte Ziffer Null ist.

Eine Zahl ist durch 100 teilbar, wenn die letzten zwei Ziffern Null sind.

Eine Zahl ist durch 1000 teilbar, wenn die letzten drei Ziffern Null sind.

Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn die letzte Ziffer gerade, also
0, 2, 4, 6 oder 8 ist.

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn die letzte zwei Ziffer 0 oder 5 ist.

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die aus den beiden letzten Ziffern
gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 25 teilbar, wenn die aus beiden letzten Ziffern
gebildete Zahl durch 25 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme duch 9 teilbar ist.

Die Teilbarkeit durch zusammengesetzte Zahlen

Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2, aber auch durch 3 teilbar ist (2*3 =6, 2 und 3 haben keine gemeinsamen Teiler, sie sind teilerfremd)

Eine Zahl ist durch 12 teilbar, wenn sie durch 3, aber auch durch 4 teilbar ist (3*4 =12, 3 und 4 haben keine gemeinsamen Teiler)

Eine Zahl ist durch 15 teilbar, wenn sie durch 3, aber auch durch 5 teilbar ist (3*5 =15, 3 und 5 haben keine gemeinsamen Teiler)

4. Bruchrechnen

Jeder Bruch ist eine besondere Schreibweise einer Division.
Jeder Bruchstrich entspricht also einem Divisionszeichen.

Jeder Bruch kann auch ausdividiert werden und es entsteht eine Dezimalzahl.
Jeder Bruch hat einen Zähler und einen Nenner.
Der Zähler steht vor dem Bruchstrich, der Nenner steht nach dem Bruchstrich.
Bei ganzen Zahlen ist der Nenner 1.
5/8
4 =4/1

4.1. Echte Brüche:

Der Zähler ist kleiner als der Nenner. Der Wert des Bruchs ist kleiner als 1.
5/7

4.2. Unechte Brüche:

Der Zähler ist größer als der Nenner. Der Wert des Bruchs ist größer als 1.
8/5

4.3. Uneigentliche Brüche:

Gekürzt ergibt der Bruch eine ganze Zahl.
6/3 =2/1 =2

4.4. Gemischte Zahl

ist die Kurzschreibweise für die Summe einer ganzen Zahl und eines Bruchs

2 1/3 =2 +1/3 =7/3

4.5. Kürzen von Brüchen

Zähler und Nenner werden durch die gleiche Zahl dividiert.

Der Wert des Bruchs ändert sich nicht.

4/6 =2/3 gekürzt durch 2

4/6 (K:2) =2/3

4.6. Erweitern von Brüchen

Zähler und Nenner werden mit der gleichen Zahl multipliziert.

Der Wert des Bruchs ändert sich nicht.

5/9 =15/27 erweitert mit 3

5/9 (E:3) =15/27

4.7. Addieren von Brüchen

die Nenner müssen gleich sein

wenn die Nenner der Brüche nicht gleich sind, müssen sie durch Erweitern auf gleichen Nenner gebracht werden.

1/2 +3/7 =7/14 +6/14 =13/14

3 1/4 +2 1/4 =5 2/4 =5 1/2

oder 13/4 +9/4 =22/4 =5 2/4 =5 1/2

4.8. Subtrahieren von Brüchen

die Nenner müssen gleich sein

wenn die Nenner der Brüche nicht gleich sind, müssen sie durch Erweitern auf gleichen Nenner gebracht werden.

1/2 -3/7 =7/14 -6/14 =1/14

3 1/4 -2 3/4 =2 5/4 -2 3/4 =2/4 =1/2

oder

3 1/4 -2 3/4 =13/4 11/4 =2/4 =1/2

4.8.1. Multiplizieren von Brüchen

gemischte Zahlen zuerst in unechte Brüche verwandeln!

Zähler mal Zähler durch Nenner mal Nenner

Vorschlag: Bei größeren Zahlen vor dem Ausmultiplizieren die Reihenfolge der Zähler vertauschen und wenn möglich kürzen

1 1/3 *2 1/2 =4/3 *5/2 =20/6 =10/3 =3 1/3

oder mit Vertauschen:

4/3 *5/2 =5/3 *4/2 =5/3 *2 =10/3 =3 1/3

5.Dividieren von Brüchen

gemischte Zahlen zuerst in unechte Brüche verwandeln!
Den Bruch **nach** dem Bruchstrich umdrehen (Zähler und Nenner vertauschen) und anschließend multiplizieren: Zähler mal Zähler durch Nenner mal Nenner

(3 1/2) /(14/5) =(7/2) /(14/5) =7/2 *5/14 =5/2 *7/14 =5/2 *1/2 =5/4

6.Dezimalzahlen

Die erste Ziffer nach dem Komma bedeutet Zehntel

3,2 =3 Ganze und 2 Zehntel =3 2/10

Stehen 2 Ziffern nach dem Komma, sind dies Hundertstel

4,25 =4 25/100

Stehen 3 Ziffern nach dem Komma, sind dies Tausendstel

14,138 =14 138/1000

6.1. Endliche Dezimalzahlen

entstehen als Ergebnis einer Division, die als Rest irgendwann 0 ergibt

haben endlich viele Dezimalstellen

6.2. Reinperiodische Dezimalzahlen

haben unendlich viele Dezimalstellen

4,3^. =4,333333333 =4 3/9

5,2^.3^. =5,(23)^- =5,232323232323 =5 23/99

6.3. Gemischtperiodische Dezimalzahlen

haben unendlich viele Dezimalstellen, nach einer Vorperiode wiederholen sich die Ziffern immer wieder

2,15^. =2,15555555

1 ist die Vorperiode

5 ist die Periode

6.4. Irrationale Zahlen

2^(1/2), 8^(1/3), pi, ...

haben unendlich viele Dezimalstellen, sind aber nicht periodisch

pi =3.141592654......

7. Rechnen mit Platzhaltern

7.1. Addieren und Subtrahieren

nur gleiche Platzhalter zusammenfassen,

nur gleiche Platzhalter, die auch die gleiche Potenz haben, zusammenfassen

x +x +x =3 *x =3x

x +x +2 =2x +2

3x +5y -2x -3y =x +2y

x^2 +x^2 =2x^2

3x^2 +x +2x =3x^2 +3x

7.2. Multiplizieren und Dividieren

x *x =x^2

3x *2y =6xy

Steht mehr als eine Zahl im Nenner, muss der Nenner in Klammern gesetzt werden! Wir können zusätzlich auch den Zähler in Klammer setzen.

4x /(2x) =2 oder (4x) /(2x) =2

7.3. Monom mal Binom

x *(y +z) =xy +xz

Das Monom (x) muss mit jedem Teil des Binom (y, z) ausmultipliziert werden.

7.4. Binom mal Binom

(o +p) *(x -y) =ox +px -oy -py

Vorzeichen vor den Buchstaben sind ganz wichtig! Sie gehören zum Platzhalter dazu!
Das o muss mit dem x und dem y ausmultipliziert werden.
Danach muss das p mit dem x und dem y ausmultipliziert werden.

7.5. Die binomischen Formeln

(a +b)^2 =a^2 +2 *a *b +b^2
(a -b)^2 =a^2 -2 *a *b +b^2
(a +b) *(a-b) =a^2 -b^2

7.6. Die dritte Potenz von Binomen

(a +b)^3 =a^3 +3 *a^2 *b +3 *a *b^2 +b^3
(a -b)^3 =a^3 -3 *a^2 *b +3 *a *b^2 -b^3

8. Gleichungen

Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man auf beiden Seiten dasselbe hinzufügt oder wegnimmt oder wenn auf beiden Seiten mit der gleichen Zahl multipliziert oder dividiert wird. (Äquivalenzumformung)

Enthält eine Gleichung einen Platzhalter, muss nach dem Berechnen des Platzhalters eine Probe gemacht werden.

3 *x +4 =19 |-4 auf beiden Seiten 4 subtrahieren

3 *x =15 | /3 beide Seiten durch 3 dividieren

x =5

Probe:

3 *5 +4 =19

19 =19

Ziel des Umformens:

ein Platzhalter soll auf einer Seite alleine stehen (explizit darstellen)

Reihenfolge beim Umformen:

zuerst jede Seite der Gleichung für sich ausrechnen

dann alle Zahlen auf eine Seite bringen (addieren, subtrahieren)

dann alle gesuchten Platzhalter auf eine Seite bringen (addieren, subtrahieren)

dann jede Seite für sich ausrechnen

dann den Platzhalter explizit darstellen (multiplizieren oder dividieren)

8x -(16 -10) -3x =22x +3 -20x

jede Seite vereinfachen

5x-6 =2x+3 |-2x

Alle x -Glieder auf eine Seite bringen. Da 5x > 2x ,

subtrahieren wir auf beiden Seiten 2x.

3x-6 =3| +6

Alle Zahlen auf die andere Seite bringen; wir addieren auf

beiden Seiten

die Zahl 6.

3x =9

x =3

Probe:

8 *3 -(16 -10) -3 *3 =22 *3 +3 -20 *3

24 -6 -9 =66 +3-60

9 =9 wahre Aussage

9. Prozentrechnungen

W =Prozentwert

G =Grundwert

p =Prozentsatz

Der Grundwert ist immer eine Zahl. Diese Zahl bedeutet immer 100% oder auch das Ganze.

Der Prozentwert ist eine Zahl. Diese Zahl bedeutet immer etwas anderes als 100%. Es ist nie das Ganze.

9.1. 1. Weg: Schlussrechnung

Prozentwert gesucht:

100% ... G

1% ... G /100

p% ... G /100 *p =W

Grundwert gesucht:

p % ...W

1 % ...W /p

100 % ...W /p *100 =G

Prozentsatz gesucht

G...100 %

1...100/G

W...100 /G *W =p

9.2. 2. Weg: Rechnen mit einer Formel

W =G *p/100

Entweder du setzt ein, was du gegeben hast und formst dann um oder du formst so um, dass das, was du suchst alleine steht.

Prozentwert gesucht:

W =G *p/100

Grundwert gesucht:

W =G *p/100 |*100

W *100 =G *p |/p

W *100 /p =G

G =W *100 /p

Prozentsatz gesucht

W =G *p/100 |*100

W *100 =G *p |/G

W *100 /G =p

p =W *100 /G

9.3. 3. Weg Proportionen

Direkte Proportion

G ...100 %

W ...p %

Eine Proportion (ein Verhältnis) besteht aus 2 Divisionen.

Bei einer Proportion lassen wir vor und nach dem Divisionszeichen einen Abstand.

G / W =100 / p

Wir sagen: G zu W ist p zu 100

Wir können die Proportion auflösen wie jede Gleichung.

Wir können aber auch sagen: Außenglied mal Außenglied ist Innenglied mal Innenglied

G *p =W *100

9.4. 4. Weg Kurzform

Bei Erhöhung um p %:

W =G *(1 +p/100)

Durch Umformen ergibt sich:

G =W /(1 +p/100)

p =(W /G -1) *100

Verteuerung um 5 %

W =G *1,05

Bei Verminderung um p %

W =G *(1 -p/100)

Durch Umformen ergibt sich:

G =W /(1 -p/100)

p =(1 -W /G) *100

Verbilligung um 20 %

W =G *0,80

10. Zinsenrechnungen

10.1. Jahreszinsen

Z_J =Zinsen für ein Jahr,

K_0 =Ausgangskapital,

p =Prozentsatz

Berechnung mit der Formel:

Z_J =K_0 *p/100

Berechnung der Jahreszinsen mit einer Schlussrechnung:

100% ... K_0

1% ... K_0 /100

p% ... K_0 /100 *p =Z_J

10.2. Monatszinsen

Zinsen für ein Monat: Z_M =Z_J /12

Zinsen für m Monate: Z_M =Z_J /12 *m

Berechnung mit der Formel:

Z_M =K_0 *p/100 /12 *m

10.3. Tageszinsen

Zinsen für einen Tag: Z_T =Z_J/360

Zinsen für d Tage: Tz =Z_T =Z_J /360 *d

Berechnung mit der Formel:

Z_T =K_0 *p/100 /360 *d

10.4. Zinseszinsen

Kapital mit den Zinsen für n Jahre

K_n Kapital nach n Jahren

p Prozentsatz

K_0 Startkapital (Anfangskapital)

n Anzahl der Jahre, die das Kapital liegen bleibt

K_n =K_0 *(1 +p/100)^n

11. Einfache Kalkulation

Einkaufspreis (100 %) +Bezugskosten =Einstandspreis

Ek +B =Es

Einstandspreis (100 %) +Regien =Selbstkostenpreis

Es +R =S

Selbstkostenpreis (100 %) +Gewinn =Verkauspreis (netto)

S +G =Vn

Verkaufspreis netto (100 %) +Mehrwertsteuer (10 oder 20% je nach Ware) =Verkaufspreis brutto

Vn +Mwst =Vb

Verkaufspreis brutto (100 %) minus Preisnachlass (Skonto oder Rabatt) =Endpreis

Vb -Sk (oder Ra) =E

12. Lohn und Gehalt

Bruttolohn ((100 %) minus Abgaben =Nettolohn

Abgaben: für Arztkosten, Kindergeld, Behindertenbeihilfen, Arbeitslosengeld, Straßen, öffentliche Verkehrsmittel, Schulen und Kindergärten, Feuerwehr,....

Verhältnisse

13. Direktes Verhältnis

Je mehr desto mehr.

1. Weg

Immer zuerst auf 1 schließen, das Gesuchte steht rechts

5 Schüler essen zehn Brote, wie viele Brote essen 8 Schüler?

5 Schüler ... 10 Brote

1 Schüler ... 10 /5

8 Schüler ... 10 /5*8

2. Weg als Proportion (siehe 14.)

14. Indirektes Verhältnis

Je mehr desto weniger.

1. Weg

Immer zuerst auf 1 schließen, das Gesuchte steht rechts

5 Arbeiter brauchen 10 Tage, wie lange brauchen 8 Arbeiter für dieselbe Arbeit?

5 Arbeiter ... 10 Tage

1 Arbeiter ... 10 *5

8 Arbeiter 10 *5 /8

2. Weg (Proportion siehe 14.)

15. Verhältnisgleichungen (Proportionen)

Zuerst das Verhältnis feststellen, dann mit x und der darüberstehenden Zahl beginnen und rechts von dem = das 2. Paar anschreiben

Direktes Verhältnis: (2. Zeile der 1. Spalte zur ersten ist wie 2. Zeile der 2. Spalte zur ersten - mit x mit dem Anschreiben beginnen)
Blau und Gelb werden im Verhältnis 4 zu 7 gemischt.
Wie viel gelbe Farbe ist nötig, wenn 56 l blaue Farbe verwendet werden?
4 Bl ...56 l
7 G ...x
d.V.

x / 56 =7 / 4
x =7/4 *56 =56/4 *7 =14 *7 =98
Es sind 98 Liter gelber Farbe nötig.

Indirektes Verhältnis: (2. Zeile der 1. Spalte zur ersten ist wie 1. Zeile der 2. Spalte zur ersten - mit x mit dem Anschreiben beginnen)
Wenn eine Familie mit 80 km/h unterwegs ist, ist sie in 3 Stunden am Ziel. Wie lange braucht sie bei einem Tempo von 60 km/h für dieselbe Strecke?

80 km/h ... 3 h
60 km/h ... x h

i.V.

x / 3 =80 / 60 | *3 - wenn möglich gleich kürzen

x =4/3 *3 =4

Die Leute brauchen bei einem Tempo von 60 km/h für die Fahrt 4 Stunden.

16. Mehrgliedrige Proportionen

Zuerst die Verhältnisse feststellen, dann mit x und der darüberstehenden Zahl beginnen, das = setzen und auf der rechten Seite der Gleichung die beiden Proportionen hintereinander anschreiben, mit einem * verbinden und wie eine Gleichung behandeln.

8 Pferde brauchen in 15 Tagen 20 hl Stroh. Wie viel stroh brauchen 12 Pferde in 18 Tagen.
8 pf...15 d...20 hl
12 pf...18 d...x hl
d.V. d.V.
x / 20 =18 / 15 *12 / 8
x =18 / 15 *12 /8 *20 =6/5 *3/2 *20 =6/5 *20/2 *3 =6/5 *10 *3 =10/5 *6 *3 =36
12 Pferde brauchen in 18 Tagen 36 hl.

17. Zeit und Geschwindigkeit

v = Geschwindigkeit, velocity

s = Weg, space

t = Zeit, time

v =s /t

2 Einheiten der Geschwindigkeit:

m/s (Meter pro Sekunde)

km/h (Kilometer pro Stunde)

1 m/s =3,6 km/h

1 km/h =1/3,6 m/s

18. Funktionen

Sind eindeutige Zuordnungen, es gibt nur einen Funktionswert
Es gibt Wertepaare, jedem x-Wert entspricht genau ein y-Wert.

18.1. Lineare Funktionen

18.1.1. Darstellung als Funktionsgleichung

f(x) =k *x +d
oder
f: y =k *x +d
k ... Anstieg, d ... Abstand vom Ursprung auf der y-Achse
Lineare Abnahmen und lineare Zunahmen können mit linearen Funktionen ausgedrückt werden.

18.1.2. Grafische Darstellung:

Jedem Wertepaar entspricht ein Punkt, ist x 'el 'R entsteht eine Gerade
d =0: Die Gerade geht durch den Ursprung, es werden direkte Proportionen damit dargestellt
d =0, k >0: die Gerade geht durch den Ursprung und steigt
d =0, k <0: die Gerade geht durch den Ursprung und fällt
d =0, k =0: die Gerade steigt nicht und fällt nicht, sie liegt genau auf der x-Achse
d >0, k >0: die Gerade geht nicht durch den Ursprung und steigt, es gibt einen Punkt auf der positiven y-Achse
d >0, k <0: die Gerade geht nicht durch den Ursprung und fällt, es gibt einen Punkt auf der positiven y-Achse
d >0, k =0: die Gerade ist parallel zur x-Achse, es gibt einen Punkt auf der positiven y-Achse

d <0, k >0: die Gerade geht nicht durch den Ursprung und steigt, es gibt einen Punkt auf der negativen y-Achse
d <0, k <0: die Gerade geht nicht durch den Ursprung und fällt, es gibt einen Punkt auf der negativen y-Achse
d <0, k =0: die Gerade ist parallel zur x-Achse, es gibt einen Punkt auf der negativen y-Achse

18.1.3. Darstellung: Wertetabelle

x | y (f(x) = k *x +d
0 | k *0 +d
1 | k *1 +d
2 | k *2 +d

18.2. Quadratische Funktionen

Parabel
f(x) =a *(x +b)^2 +c
oder
f:y =a *(x +b)^2 +c
Wenn a positiv ist, hat die Parabel einen Tiefpunkt, je größer a desto steiler die Parabel
Wenn a negativ ist, hat die Parabel einen Hochpunkt, je kleiner a desto steiler die Parabel

b verschiebt die Parabel a *x^2 nach links oder nach rechts
Wenn b positiv ist, wird die Parabel nach links verschoben
Wenn b negativ ist, wird die Parabel nach rechts verschoben
Wenn b null ist, ist die Parabel symmetrisch zur y-Achse
c verschiebt die Parabel hinauf oder hinunter

Wenn c negativ ist, wird die Parabel nach unten verschoben

Wenn c positiv ist, wird die Parabel nach oben verschoben

Wenn c null ist, berührt die Parabel die x-Achse

19. Zahlenräume

19.1. Die natürlichen Zahlen 'N

'N ={0, 1, 2, 3 ... }

'N* ={1, 2, 3 ... }

19.2. Die ganzen Zahlen 'Z

'Z ={ ... -3, -2, -1, 0, +1, +2 +3 ... }

19.3. Die rationalen Zahlen 'Q

'Q ={x/y |x 'el 'Z, y 'el 'Z \{0}}

Alle Brüche gehören zu den Rationalen Zahlen.

Es gibt echte Brüche (Der Zähler ist kleiner als der Nenner)

Unechte Brüche (Zähler ist größer als der Nenner)

Uneigentliche Brüche (Der Bruch ergibt gekürzt eine ganze Zahl)

Stammbrüche (Der Zähler ist 1)

Dezimalbrüche (Der Nenner ist 10, 100, 1000, ...)

19.4. Die irrationalen Zahlen 'I

Die irrationalen Zahlen sind alle Dezimalzahlen mit unendlich vielen Dezimalstellen, die aber nicht periodisch sind. Zu den irrationalen Zahlen gehören alle Wurzeln, die keine ganzen Zahlen ergeben. Beispiel: 5^(1/2), 7^(1/2), 13^(1/2)

19.5. Die reellen Zahlen 'R

'R sind alle Zahlen ('N, 'Z, 'Q, 'I)

20. Statistik

Daten werden gesammelt, Kennzahlen werden ermittelt

H (Absolute Häufigkeit): Anzahl wie oft ein Wert vorkommt

h (relative Häufigkeit): Verhältnis von absoluter Häufigkeit zur Gesamtzahl

p (prozentuelle Häufigkeit): Angabe der relativen Häufigkeit in Prozent

ungeordnete Liste: Daten in der Reihenfolge, in der sie erhoben werden

geordnete Liste: Daten nach den Werten geordnet

Minimum: kleinster Wert

Maximum: größter Wert

Spannwerte: Differenz von Maximum und Minimum

Median (Zentralwert, 2. Quartil): der Wert genau in der Mitte, bei einer geraden Zahl fällt die Mitte auf 2 Zahlen, der Median ist dann der Mittelwert dieser beiden Zahlen.

1. Quartil: Mitte zwischen Median und Minimum

3. Quartil: Mitte zwischen Median und Maximum

Modus: der Wert, der am häufigsten vorkommt

Mittelwert =arithmetisches Mittel (x^- oder 'my)

x^- =(Summe aller Werte)/(Anzahl der Werte)

Standardabweichung (s_x): Die Differenzen der Werte zum Mittelwert bilden, diese quadrieren und addieren. Die Summe durch die Gesamtzahl dividieren, aus dem Ergebnis die Wurzel ziehen

Beispiel:

Ungeordnete Liste: 15, 14, 15, 16, 18, 15, 18

Geordnete Liste: 14, 15, 15, **15**, 16, 18, 18

Mittelwert: (15 +14 +15 +16 +18 +15 +18)/5 ~~15,85

Minimum: 14

Maximum: 18

Spannweite: 18 -14 =14

Median: 15 (4. Von 7 Werten)

Modus: 15 (kommt 3 mal vor)

1. Quartil: (15 +15)/2 =15

3. Quartil: (16 +18)/2 =17

Mittelwert: (14 +15 +15 +15 +16 +18 +18)/7 ~~15,85

x^- ~~15,85

Standardabweichung:

1.) Summe bilden:

(15,85 -14)^2 +3 *(15,85 -15)^2 +(16 -15,85)^2 +2 *(18 -15,85)^2 ~~14,85

2.) Summe durch 7 dividieren: 14,85/7 ~~2,12

3. Aus dem Ergebnis die Wurzel ziehen 'w(2,12)~~1,46

s_x ~~1,46

21. Vierecke

Vierecke sind geometrische Figuren

Vierecke haben eine Winkelsumme von 360°.

Die Eckpunkte heißen A B C D

Die Seite zwischen A und B heißt a

Die Seite zwischen B und C heißt b

Die Seite zwischen C und D heißt c

Die Seite zwischen A und D heißt d

Der Innenwinkel beim Eckpunkt A heißt alpha 'al (α)

Der Innenwinkel beim Eckpunkt B heißt beta 'be (β)

Der Innenwinkel beim Eckpunkt C heißt gamma 'ga (γ)

Der Innenwinkel beim Eckpunkt D heißt delta 'de (δ)

21.1. Umfang des allgemeinen Vierecks

Umfang =a +b +c +d

21.2. Fläche des allgemeinen Vierecks

Flächenberechnung: Zerlegung in 2 Dreiecke, außer es sind besondere Vierecke

22. Besondere Vierecke

22.1. Quadrat

4 gleich lange Seiten, 4 rechte Winkel (ein rechter Winkel ist 90°), 2 parallele Seitenpaare.

Umfang: u =4 *a

Fläche: A =a^2

Quadrat der Diagonale: d^2 =a^2 +a^2 =2 *a^2

Diagonale d =(2a^2)^(1/2) =a *2^(1/2) ~a *1,4

22.2. Rechteck

2 parallele gleich lange Seitenpaare, 4 rechte Winkel

Umfang: u =a +b +a +b, u =2a +2b, u =(a +b) *2, u =2 *(a +b)

Fläche: A =a *b

Quadrat der Diagonale: d^2 =a^2 +b^2

d =(a^2+b^2)^(1/2) Wurzel aus der Summe von a^2 und b^2

22.3. Parallelogramm

2 parallele gleich lange Seitenpaare (a =c, b =d),

2 gegenüberliegende Winkel sind gleich groß

Die Nachbarwinkel ergänzen einander auf 180°

alpha und gamma gleich, beta und delta gleich groß,

Winkelsumme 360°.

Umfang: u =a +b +a +b, u =2 *a +2 *b, u =(a +b) *2, u =2*(a +b)

Fläche: A =a *h_a, A =b *h_b

22.4. Trapez

1 paralleles Seitenpaar (a, c,) diese beiden Seiten müssen nicht gleich lang sein. Die Seiten b und d sind nicht parallel. Der Abstand zwischen den beiden parallelen Seiten ist die Höhe h.
Bei echten Trapezen sind entweder die Winkel alpha und beta kleiner oder gleich 90° oder die Winkel gamma und delta sind kleiner oder gleich 90°.
Die Winkel alpha und delta ergeben zusammen 180° (supplementäre)
Die Winkel beta und gamma ergeben zusammen 180°.
Die Seiten b und d müssen nicht parallel und müssen nicht gleich lang sein.
Sind b und d gleich lang sein, dann ist es ein gleichschenkeliges Trapez.
Winkelsumme: 360°
Umfang: u =a +b +c +d
Fläche: A =(a +c) *h /2

22.5. Deltoid (Drachenviereck)

hat keine parallelen Seiten. Seite a und d sind gleich lang, Seite b und c sind gleich lang.
Die Diagonale e verbindet die Eckpunkte A und C, die Diagonale f verbindet Eckpunkte B und D.
Die Diagonalen e, f stehen aufeinander normal. Die Diagonale f wird von der Diagonale e halbiert.
Umfang: U =2 *a +2 *b
Fläche: A =e *f /2

22.6. Raute (Rhombus)

ist ein Parallelogramm mit 4 gleich langen Seiten. Die Diagonalen e, f stehen normal aufeinander und halbieren einander. Die Diagonalen sind nicht gleich lang.

Umfang: u =4 *a

2 Flächenformeln:

A =e *f /2

A =a *h_a

Zusammenhang der Diagonalen:

a^2 =(e/2)^2 +(f/2)^2

23. Dreiecke

Dreiecke sind geomterische Figuren

Dreiecke haben eine Winkelsumme von 180°

Die Eckpunkte heißen: A, B, C

Die Seiten heißen a, b, c

Die Seite a liegt gegenüber dem Eckpunkt A, zwischen B und C.

Die Seite b liegt gegenüber dem Eckpunkt B, zwischen A und C.

Die Seite c liegt gegenüber dem Eckpunkt C, zwischen A und B.

Höhe eines Dreiecks: Normalabstand zwischen Eckpunkt und der gegenüberliegenden Seite (h_a, h_b, h_c)

23.1. Umfang des allgemeinen Dreiecks

u =a +b +c

23.2. Flächenformeln des allgemeinen Dreiecks

3 Flächenformeln:

A =a *h_a/2

A =b *h_b/2

A =c *h_c/2

23.3. Höhenlinie

eine Gerade: steht im rechten Winkel auf eine Seite und geht durch den gegenüberliegenden Eckpunkt, im Dreieck gibt es 3 Höhenlinien (hl_a, hl_b, hl_c)

23.4. Höhenschnittpunkt

Schnittpunkt der 3 Höhenlinien

23.5. Streckensymmetrale

eine Gerade: steht im rechten Winkel auf eine Seite und halbiert sie. Im Dreieck gibt es 3 Streckensymmetralen (ss_a, ss_b, ss_c)

23.6. Umkreismittelpunkt

Schnittpunkt der 3 Streckensymmetralen

23.7. Winkelsymmetrale

eine Gerade: geht durch einen Eckpunkt und halbiert den Winkel, den die beiden angrenzenden Seiten miteinander einschließen. Im Dreieck gibt es 3 Winkelsymmetralen (ws_alpha, ws_beta, ws_gamma) alpha ='al (α), beta ='be (β), gamma ='ga (γ)

23.8. Inkreismittelpunkt

Schnittpunkt der 3 Winkelsymmetralen

23.9. Schwerlinie

eine Gerade: verbindet den Mittelpunkt einer Seite mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt. Im Dreieck gibt es 3 Schwerlinien (s_a, s_b, s_c)

23.10. Schwerpunkt

Schnittpunkt der 3 Schwerlinien

24. Besondere Dreiecke

24.1. Rechtwinkeliges Dreieck

2 Katheten (a, b), 1 Hypotenuse (c), ein rechter Winkel.

Hypotenuse liegt dem rechten Winkel gegenüber

Flächenformel:

A =c *h_c /2

oder:

A =a *b /2

b =h_a,

a =h_b

24.2. Der pythagoräische Lehrsatz im rechtwinkligen Dreieck

Er gilt in jedem rechtwinkeligen Dreieck

Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich dem Quadrat der 1. Kathtete plus dem Quadrat der 2.Kathete

H^2 =K_1^2 +K_2^2

Sind a, b Katheten und c ist die Hypotenuse, dann gilt:

c^2 =a^2 +b^2

24.3. Gleichschenkliges Dreieck

2 gleich lange Schenkel, 2 gleich große Winkel

Basis: c, Schenkel: a, b, alpha =beta,

h_c halbiert die Seite c.

Zusammenhang zwischen h_c, den Schenkeln und der Basis

a^2 =(c /2)^2 +h_c^2

24.4. Gleichseitiges Dreieck

3 gleich lange Seiten, alle Höhen sind gleich lang, alle Höhen halbieren die gegenüberliegende Seite.

jeder Winkel 60°

Zusammenhang zwischen den Seiten und der Höhe

a^2 =(a /2)^2 +h_a^2

Weitere Umfangformel: u =3 *a

Berechnung der Höhe h_a, wenn nur die Seite a bekannt ist:

h_a =a/2 *3^(1/2)

Flächenformel: A =a *h_a/2 =a^2/4 *3^(1/2)

25. Kreise

Kreise haben einen Mittelpunkt.

Die Kreislinie ist immer gleich weit vom Mittelpunkt entfernt.

Entfernung Kreislinie Mittelpunkt heißt Radius r.

Die Länge der Kreislinie heißt Umfang.

Das Innere des Kreises ist die Kreisfläche.

Ein ganzer Kreis hat 360°.

Ein Viertelkreis ist ein Teil eines Kreises. Es ist ein Kreissektor. Er hat den Zentriwinkel 90°.

'pi =ca. 3,14 Wir rechnen beim Kopfrechnen mit 3

Umfang U =2 *r *PI

Fläche A =r^2 *PI

Kreisbogen b =u *alpha/360

Fläche eines Kreissektors A_sek =A *alpha/360

Umfang eines Kreissektors U_sek =b +2*r

26. Prismen

Ein Prisma ist ein geometrischer Körper
Ein Prisma hat eine Grundfläche und die gleiche Deckfläche.
Grundfläche G und Deckfläche sind deckungsgleich (kongruent).
Die Seitenflächen sind Rechtecke. Alle Seitenflächen zusammen heißen Mantel M. Der Abstand zwischen Grundfläche und Deckfläche heißt Körperhöhe H.
Für Berechnungen sind Grundfläche G, Umfang U, Körperhöhe H wichtig
M =U *H
O =2 *G +M
V =G *H

26.1. Quader

Der Quader ist ein Prisma. Er hat eine rechteckige Grundfläche. Die 4 Seitenflächen sind Rechtecke.
Grundfläche G =a *b
Deckfläche =Grundfläche =a *b
Umfang U =2 *(a+b)
Mantel M =U *H
Oberfläche O =2 *G +M
Volumen V =G *H

26.2. Dreiseitiges Prisma

Grundfläche und Deckfläche sind ein Dreieck. Der Abstand zwischen Grundfläche und Deckfläche ist die Körperhöhe H. Die 3 Seitenflächen sind Rechtecke.
Grundfläche G =a*h_a/2 =b*h_b/2 =c*h_c/2

Umfang U =a +b +c

Mantel M =U *H

O =2 *G +M

V =G *H

26.3. Trapezförmiges Prisma

Grundfläche G =(a+c) *h /2

Umfang U =a +b +c +d

Mantel M =U *H

Oberfläche =M +2*G

Volumen =G *H

26.4. Deltoidförmiges Prisma

Grundfläche und Deckfläche sind ein Deltoid. Der Abstand zwischen Grundfläche und Deckfläche ist die Körperhöhe H.

Grundfläche =e *f /2

Umfang U =2 *a +2 *b =2 *(a +b)

Mantel =U *H

Oberfläche O =2 *G +M

Volumen V =G *H

27. Zylinder

Ein Zylinder ist ein geometrischer Körper. Er ist wie ein Prisma, hat aber einen Kreis als Grundfläche und daher auch einen kongruenten Kreis als Deckfläche, es gelten alle Prismenformeln

Grundfläche G =r^2 *'pi

Umfang U =2 *r *'pi

Mantel M =U *H

Oberfläche O =2 *G +M

Volumen V =G *H

28. Pyramiden

Eine Pyramide hat eine eckige Grundfläche und eine Spitze
Die Grundfläche können Dreiecke, Vierecke oder Vielecke sein.
Die Entfernung zwischen der einzigen Grundfläche und der Spitze ist die Körperhöhe H.
Der Mantel besteht aus Dreiecken. Die Höhe der Dreiecke sind die Seitenhöhen h_a, h_b, ...
V =G *H /3
O =G +M

28.1. Quadratische Pyramide

Grundfläche ist ein Quadrat.
G =a^2
M =4 *(a *h_a/2)
V =G *H /3
O =G +M
Zusammenhang: Höhe der Seitenfläche, Körperhöhe, Grundlinie (a)
h_a^2 =(a/2)^2 +H^2

28.2. Rechteckige Pyramide:

Grundfläche ist ein Rechteck mit den Seiten a und b.
G =a*b
M =2 *(a *h_a/2)+2 *(b *h_b/2)
V =G *H /3
O =G +M
Zusammenhang: Höhe der Seitenflächen, Körperhöhe, a und b.
h_a^2 =(b/2)^2 +H^2

h_b^2 =(a/2)^2 +H^2

28.3. Regelmäßige dreiseitige Pyramide

Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck.

G =a^2/4 *3^(1/2)

M =3 *(a *h_a/2)

V =G *H /3

O =G +M

29. Kegel

hat einen Kreis als Grundfläche und eine Spitze

Der Abstand vom Kreis zur Spitze ist die Körperhöhe H

Der Mantel ist ein Kreissektor mit dem Radius s.

s heißt auch Seitenlinie.

Zusammenhang zwischen dem Radius r der Grundfläche und dem Radius s des Mantels:

r^2 +H^2 =s^2

V =G *H /3

O =G +M

M =r *'pi *s

30. Längenmaße

km (1000), m (10) dm (10) cm (10) mm

km ... m . dm . cm . mm

1 km =1000 m

1 m =0,001 km

1 m =10 dm

1 dm =0,1 m

1 m =100 cm

1 cm =0,01 m

1 m =1000 mm

1 mm =0,001 m

1 m =10 dm

1 dm =10 mm

1 cm =10 mm

---

31. Flächenmaße

km^2 (100), ha(100), a(100), m^2(100), dm^2(100), cm^2(100), mm^2

km^2 .. ha .. a .. m^2 .. dm^2 .. cm^2 .. mm^2

1 ha =100 a

1 a =0,01 ha

1 a =100 m^2

1 m^2 =0,01 a

1 m^2 =100 dm^2

1 dm^2 =0,01 m^2

1 dm^2 =100 cm^2

1 cm^2 =0,01 dm^2

1 cm^2 =100 mm^2

1 mm^2 =0,01 cm^2

1 m^2 =100 dm^2

1 m^2 =10000 cm^2

1 m^2 =1000000 mm^2

32. Volumsmaße

m^3(1000), dm^3(1000), cm^3(1000), mm^3

m^3 ... dm^3 ... cm^3 ... mm^3

1 m^3 =1000 dm^3

1 dm^3 =0,001 m^3

1 dm^3 =1000 cm^3

1 cm^3 =0,001 dm^3

1 cm^3 =1000 mm^3

1 mm^3 =0,001 cm^3

1 m^3 =1000 dm^3

1 m^3 =1000000 cm^3

1 m^3 =1000000000 mm^3

33. Hohlmaße

1 l =1 dm^3

1 hl =100 l

34. Gewichtsmaße

t (1000), kg (100), dag(10), g

t ... kg .. dag . g

1 t =1000 kg

1 kg =0,001 t

1 kg =100 dag

1 dag =0,01 kg

1 dag =10 g

1 g =0,1 dag

1 kg =100 dag

1 kg =1000 g

1 t =1000 kg

1 t =100000 dag

1 t =1000000 g

Teile von Gramm

1 g =10 dg

1 g =100 cg

1 g =1000 mg

35. Zeitmaße

j ... Jahr

d ... Tag

h ... Stunde

min ... Minute

sek ... Sekunde

1 j=365 (366) d

1 d =1/365 j

1 d =24 h

1 h =1/24 d

1 h =60 min

1 min =1/60 h

1 min =60 sek

1 sek =1/60 min

1 sek =1/3600 h

0,1 h =1/10 h =60/10 min =6 min