Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

SRP Mathematik (AHS):
Typ-2-Aufgaben mit reduziertem Kontext

Stand: 21. September 2020

Der neue Teil 2 der SRP Mathematik enthält *eine* Typ-2-Aufgabe mit reduziertem Kontext. Die vorliegende Aufgabensammlung bietet eine zusätzliche Übungsmöglichkeit für diesen Aufgabentyp. Dabei hat jede Aufgabe jeweils 4 unabhängige Punkte und entspricht den Rahmenbedingungen der SRP Mathematik (Inhalte, Antwortformate etc.).

Die Aufgabensammlung ist als ein ergänzendes Element der Vorbereitung für die SRP Mathematik zu verstehen. Eine Beschränkung der Vorbereitung auf diese Aufgaben ist jedoch nicht ausreichend.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Gewitter

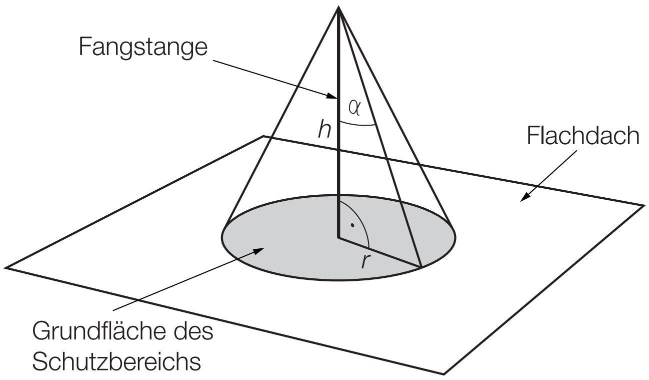
Aufgabennummer: 2_065	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, AN 4.3, WS 2.3	

a) In drei verschiedenen Städten – *A*, *B* und *C* – werden am Nachmittag laut Wetterprognose unabhängig voneinander mit folgenden Wahrscheinlichkeiten Gewitter auftreten:

Stadt	*A*	*B*	*C*
Wahrscheinlichkeit für ein Gewitter	50 %	80 %	80 %

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der drei Städte kein Gewitter auftreten wird.

b) Um Gebäude vor Blitzeinschlägen zu schützen, werden Blitzableiter verwendet. Dabei wird eine Metallstange, die sogenannte *Fangstange*, auf dem Gebäude senkrecht montiert. Der höchste Punkt einer solchen Fangstange kann als Spitze eines drehkegelförmigen Schutzbereichs angesehen werden. Alle Objekte, die sich vollständig innerhalb dieses Schutzbereichs befinden, sind vor direkten Blitzeinschlägen geschützt.



h … Höhe der Fangstange
α … Schutzwinkel
r … Radius der Grundfläche des Schutzbereichs

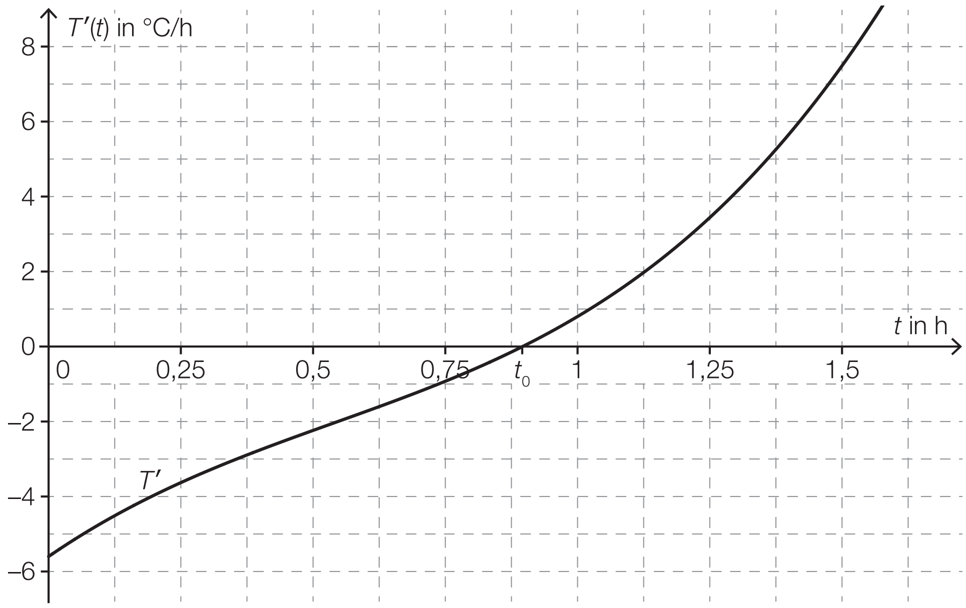
1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Radius r aus α und h.

r = ____

Auf einem Flachdach ist eine 2 m hohe Fangstange senkrecht montiert. 3 m vom Fußpunkt der Fangstange entfernt steht eine 1,2 m hohe Antenne senkrecht auf dem Flachdach. Der Schutzwinkel beträgt 77°.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob sich diese Antenne vollständig innerhalb des Schutzbereichs befindet.

c) Während eines Nachmittags, an dem es ein Gewitter gab, wurde die Veränderung der Temperatur ermittelt. Die Funktion T' beschreibt die momentane Änderungsrate der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit t (siehe nachstehende Abbildung).



t … Zeit seit Beginn der Messung in h
$T'(t)$ … momentane Änderungsrate der Temperatur zur Zeit t in °C/h

Die absolute Temperaturänderung in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ kann durch das Integral $\int_{t_1}^{t_2} T'(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet werden.

1) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung näherungsweise die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall [1,25; 1,5].

Lösungserwartung

a1) $1 - 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}68$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der drei Städte kein Gewitter auftritt, beträgt 68 %.

b1) $r = h \cdot \tan(\alpha)$

b2) $\frac{3}{\tan(77°)} = 0{,}69...$

$2 - 0{,}69... = 1{,}30...$

In einer Entfernung von 3 m von der Fangstange hat der Schutzbereich eine Höhe von rund 1,3 m.
Die 1,2 m hohe Antenne befindet sich daher zur Gänze im Schutzbereich.

Auch eine Überprüfung mithilfe einer exakten Zeichnung ist als richtig zu werten.

c1) Die dem Integral $\int_{1,25}^{1,5} T'(t)\,dt$ entsprechende Fläche wird von rund 10,5 Kästchen mit einem Flächeninhalt von jeweils 0,125 überdeckt.
Gesamtflächeninhalt: $10{,}5 \cdot 0{,}125 \approx 1{,}3$

Die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall [1,25; 1,5] beträgt rund 1,3 °C.
Toleranzintervall: [1,2 °C; 1,45 °C]

Sonnenaufgang

Aufgabennummer: 2_066	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 3.3, FA 5.1, FA 5.3	

a) Während der Morgendämmerung wird es kontinuierlich heller. Die Beleuchtungsstärke bei klarem Himmel kann an einem bestimmten Ort in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch folgende Exponentialfunktion E beschrieben werden:

$E(t) = 80 \cdot a^t$ mit $-60 \leq t \leq 30$

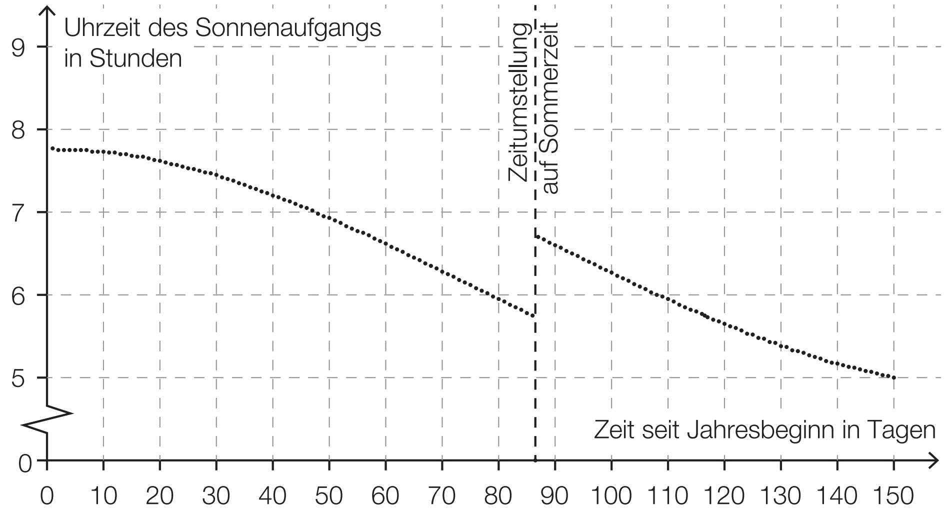
t ... Zeit in min, wobei $t = 0$ der Zeitpunkt des Sonnenaufgangs ist
$E(t)$ ... Beleuchtungsstärke zur Zeit t in Lux
a ... Parameter

1) Interpretieren Sie die Zahl 80 in der Funktionsgleichung von E im gegebenen Sachzusammenhang.

Die Beleuchtungsstärke verdoppelt sich alle 5 min.

2) Berechnen Sie den Parameter a.

b) In der nachstehenden Grafik ist die jeweilige Uhrzeit des Sonnenaufgangs in Wien für die ersten 150 Tage eines Jahres dargestellt.



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Grafik, wie viele Tage nach der Zeitumstellung der Sonnenaufgang erstmals zu einer früheren Uhrzeit als unmittelbar vor der Zeitumstellung stattfindet.

Im Zeitintervall [0; 40] kann die Uhrzeit des Sonnenaufgangs näherungsweise durch eine quadratische Funktion f modelliert werden.

$f(t) = a \cdot t^2 + c$

t … Zeit seit Jahresbeginn in Tagen
$f(t)$ … Uhrzeit des Sonnenaufgangs am Tag t in Stunden

2) Argumentieren Sie anhand der obigen Grafik, dass der Parameter a dabei negativ sein muss.

Lösungserwartung

a1) Die Beleuchtungsstärke bei Sonnenaufgang beträgt 80 Lux.

a2) $a^5 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[5]{2} = 1{,}148...$

b1) 31 Tage
Toleranzintervall: [26 Tage; 34 Tage]

b2) Die Datenpunkte im Zeitintervall [0; 40] können durch eine nach unten offene (negativ gekrümmte) Parabel angenähert werden. Daher ist der Parameter a der zugehörigen quadratischen Funktion negativ.

Münzen

Aufgabennummer: 2_067	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.7, WS 2.3, WS 3.2	

Susi und Markus spielen mit fairen Münzen. Beim Werfen einer fairen Münze treten die beiden Ereignisse „Kopf" und „Zahl" jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

a) Susi hat eine Schachtel mit 3 Ein-Euro-Münzen und 5 Zwei-Euro-Münzen.
Markus hat eine Schachtel mit 2 Ein-Euro-Münzen und 3 Zwei-Euro-Münzen.
Beide ziehen aus ihrer Schachtel zufällig jeweils 1 Münze.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass durch die beiden Ziehungen ein Gesamtwert von € 3 erzielt wird.

b) Markus will eine Zwei-Euro-Münze 10-mal werfen.
Susi stellt die Frage: „Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir mindestens 3-mal ‚Zahl'?"

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 Würfen mindestens 3-mal „Zahl" geworfen wird.

c) Susi und Markus beschäftigen sich mit der Wahrscheinlichkeit, mit der „Zahl" beim wiederholten Werfen einer Münze auftritt. Dabei stoßen sie auf folgende Gleichung:

$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}5^n = 0{,}9375$

X ... Anzahl der Würfe mit dem Ergebnis „Zahl"

1) Berechnen Sie n.

2) Interpretieren Sie die Bedeutung des Wertes n in diesem Zusammenhang.

Lösungserwartung

a1) $P(S = 1 \text{ und } M = 2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5}$

$P(S = 2 \text{ und } M = 1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5}$

Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ist die gesuchte Lösung:

$\frac{9}{40} + \frac{10}{40} = \frac{19}{40} = 47{,}5\ \%$

b1) Berechnung der Wahrscheinlichkeit mithilfe der Binomialverteilung: $n = 10$ und $p = 0{,}5$

$P(X \geq 3) = 0{,}9453... \approx 94{,}5\ \%$

c1) $n = \frac{\ln(0{,}0625)}{\ln(0{,}5)} = 4$

c2) Der Wert n gibt an, wie oft man die Münze werfen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 93,75 % mindestens 1-mal „Zahl" geworfen wird.

Lieblingsfarbe

Aufgabennummer: 2_068	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: WS 1.2, WS 2.1, WS 3.2	

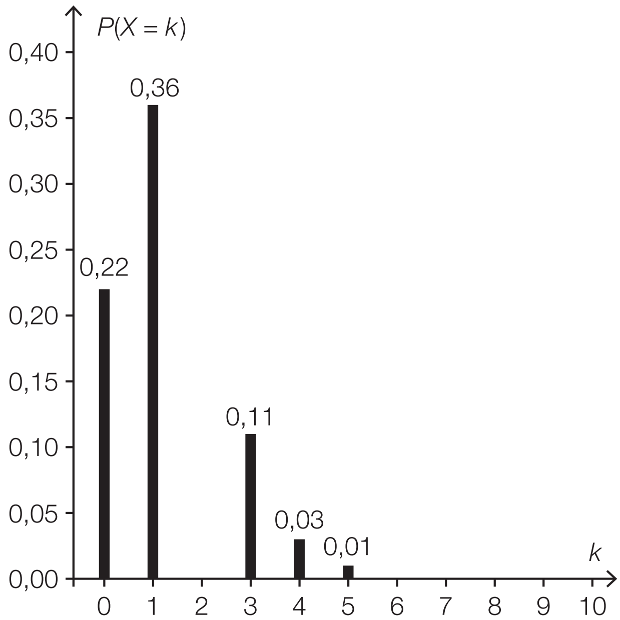
a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person Rosa als Lieblingsfarbe nennt, beträgt 13 %.
25 zufällig ausgewählte Personen werden nach ihrer Lieblingsfarbe gefragt.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 der 25 Personen Rosa als Lieblingsfarbe nennen.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person Orange als Lieblingsfarbe nennt, beträgt 7 %.
Unter n befragten Personen soll mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 1 Person sein, die Orange als Lieblingsfarbe nennt.

1) Berechnen Sie die Anzahl n derjenigen Personen, die dafür mindestens befragt werden müssen.

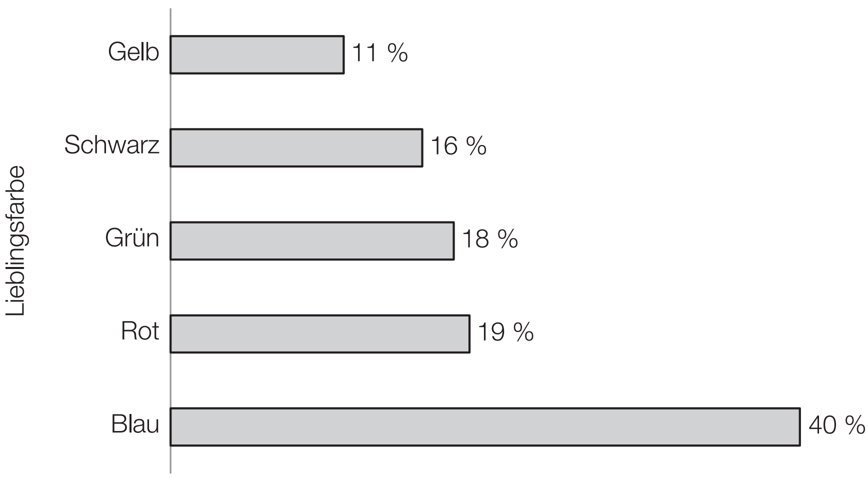
c) Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl derjenigen Personen unter 10 Befragten, die Lila als Lieblingsfarbe nennen. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Zufallsvariablen ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass unter 10 Befragten maximal 3 Befragte Lila als Lieblingsfarbe nennen, beträgt 96 %.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Säule für $P(X = 2)$ ein.

d) Die Schüler/innen einer Schule wurden nach ihren Lieblingsfarben gefragt. In der nachstehenden Abbildung ist dargestellt, wie viel Prozent der Befragten die jeweilige Farbe als Lieblingsfarbe genannt haben.



1) Beschreiben Sie, woran man erkennen kann, dass man auch mehr als eine Lieblingsfarbe nennen durfte.

Lösungserwartung

a1) X … Anzahl derjenigen Personen, die Rosa als Lieblingsfarbe nennen

Binomialverteilung mit $n = 25$ und $p = 0,13$:
$P(X = 3) = 0,2360…$

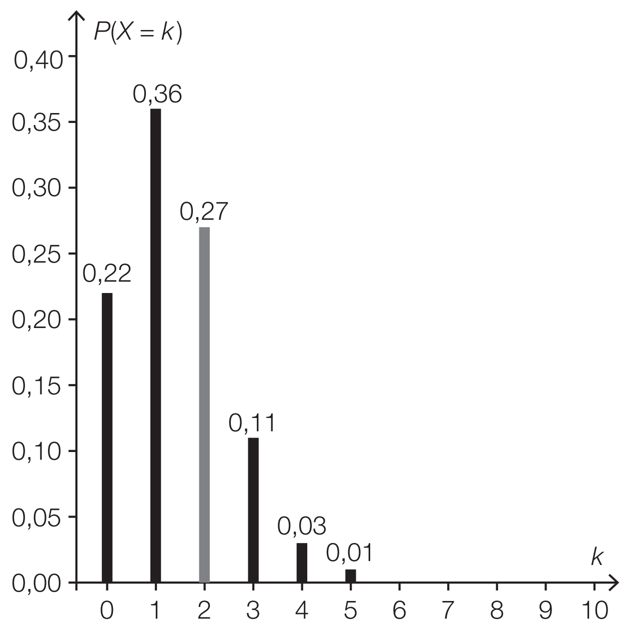
Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 23,6 % nennen genau 3 der 25 befragten Personen Rosa als Lieblingsfarbe.

b1) X … Anzahl derjenigen Personen, die Orange als Lieblingsfarbe nennen

Binomialverteilung mit $p = 0,07$:
$P(X \geq 1) = 0,9$
$1 - P(X = 0) = 0,9$
$1 - 0,93^n = 0,9$

$n = 31,7...$
Es müssen mindestens 32 Personen befragt werden.

c1) $P(X = 2) = 0,96 - (0,22 + 0,36 + 0,11) = 0,27$



Toleranzintervall für die Höhe der Säule: [0,25; 0,30]

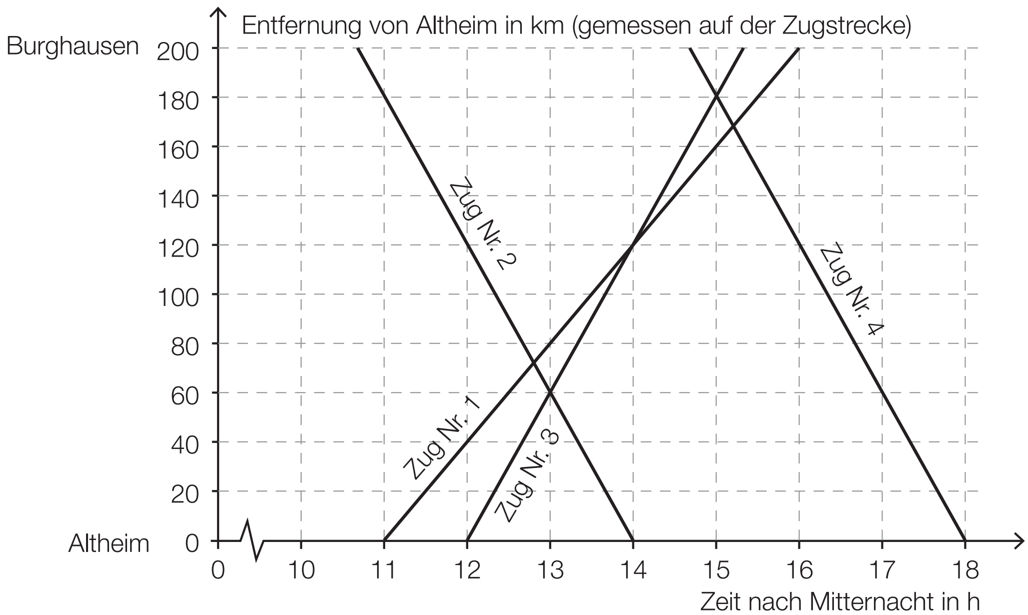
Es ist nicht erforderlich, den Wert von P(X = 2) *anzugeben.*

d1) Addiert man die Prozentsätze für alle Lieblingsfarben, so erhält man ein Ergebnis, das größer als 100 % ist.

Eisenbahn

Aufgabennummer: 2_069	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.6, FA 1.7, FA 2.2, FA 2.3	

In der nachstehenden Abbildung ist ein sogenannter Bildfahrplan für Züge zwischen Altheim und Burghausen dargestellt. Die Züge fahren dabei – vereinfacht betrachtet – mit konstanter Geschwindigkeit.



a) Zug Nr. 3 fährt um 12:00 Uhr in Altheim ab.
Zug Nr. 4 fährt um 14:40 Uhr in Burghausen ab.
Auf der Fahrt zu ihren Zielbahnhöfen begegnen die beiden Züge einander.

1) Lesen Sie aus dem obigen Bildfahrplan ab, wann und wie weit von Burghausen entfernt die beiden Züge einander begegnen.

b) 1) Argumentieren Sie, dass die Züge Nr. 2 und Nr. 4 mit der gleichen Geschwindigkeit fahren.

c) Die Fahrt eines Zuges Nr. 5 wird durch die Funktion s beschrieben. Es gilt:

$s(t) = -80 \cdot t + 1\,160$

t ... Zeit nach Mitternacht in h
$s(t)$ ... Entfernung von Altheim zur Zeit t in km

1) Bestimmen Sie die Uhrzeit, zu der Zug Nr. 5 in Burghausen abfährt.

d) Eine Eisenbahnstrecke hat eine Länge von 200 km. Nach einer Sanierung der Gleise können die Züge mit einer um 10 km/h höheren Geschwindigkeit fahren. Die Fahrzeit wird dadurch um eine halbe Stunde vermindert.
Zur Verdeutlichung sind die Angaben in der nachstehenden Tabelle dargestellt.
t ist dabei die Fahrzeit vor der Sanierung in Stunden.

	Streckenlänge in km	Geschwindigkeit in km/h	Fahrzeit in h
nach der Sanierung	200	$\left(\frac{200}{t} + 10\right)$	$\left(t - \frac{1}{2}\right)$

1) Berechnen Sie t.

Lösungserwartung

a1) Die beiden Züge begegnen einander um 15:00 Uhr, 20 km von Burghausen entfernt.

b1) Die beiden Züge benötigen für die Strecke Burghausen – Altheim gleich lang, sie fahren also mit der gleichen Geschwindigkeit.

oder:

Die zugehörigen Geraden im Bildfahrplan haben die gleiche Steigung.

c1) $s(t) = 200$

oder:

$-80 \cdot t + 1\,160 = 200$

$t = \frac{200 - 1\,160}{-80} = 12$

Zug Nr. 5 fährt um 12 Uhr in Burghausen ab.

d1) $200 = \left(\frac{200}{t} + 10\right) \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$

$t_1 = 3{,}422...$

$(t_2 = -2{,}922...)$

Die Fahrzeit vor der Sanierung betrug etwa 3,42 h.

Kugelstoßen

Aufgabennummer: 2_070	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 4.1, FA 2.1, FA 4.3	

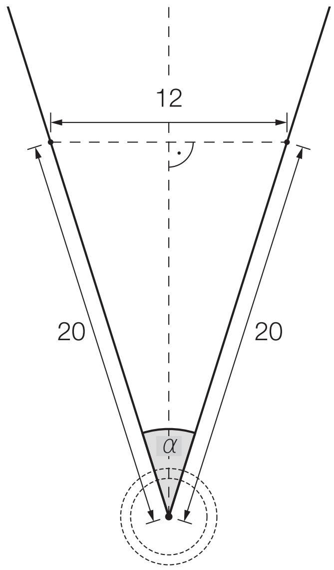
Kugelstoßen ist eine Disziplin bei den Olympischen Sommerspielen.
Eine Metallkugel muss so weit wie möglich aus einem Kreis in einen vorgegebenen Aufschlagbereich gestoßen werden.

a) Im Jahr 1948 wurde bei den Männern ein neuer Weltrekord mit der Weite 17,68 m aufgestellt.

Eine Faustregel besagt, dass sich seit 1948 der Weltrekord bei den Männern alle 2,5 Jahre um 34 cm verbessert hat. Die Weltrekordweite (in Metern) soll gemäß dieser Faustregel in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) durch eine lineare Funktion f beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1948.

b) Der Aufschlagbereich ist in der nachstehenden Abbildung in der Ansicht von oben dargestellt (alle Angaben in Metern).



1) Berechnen Sie den in der obigen Abbildung markierten Winkel α.

c) Die Bahnkurve einer gestoßenen Kugel lässt sich näherungsweise durch den Graphen der quadratischen Funktion h beschreiben:

$h(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x + 2$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung der Kugel von der Abstoßstelle in m
$h(x)$ ... Höhe der Kugel über dem Boden bei der horizontalen Entfernung x in m

1) Ermitteln Sie, in welcher horizontalen Entfernung von der Abstoßstelle die Kugel auf dem Boden aufschlägt.

d) Für die bei den Männern verwendeten Kugeln gelten folgende Vorgaben:

- Die Masse beträgt 7 257 g.
- Der Durchmesser der Kugel liegt zwischen 11 cm und 13 cm.

Eine Messing-Eisen-Legierung hat eine Dichte von 8,2 g/cm³.
Die Masse m ist das Produkt aus Volumen V und Dichte ϱ, also $m = V \cdot \varrho$.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob man aus dieser Messing-Eisen-Legierung eine Kugel herstellen kann, die diese Vorgaben erfüllt.

Lösungserwartung

a1) Steigung k der linearen Funktion f: $k = \frac{0{,}34}{2{,}5} = 0{,}136$

$f(t) = 0{,}136 \cdot t + 17{,}68$

t ... Zeit in Jahren
$f(t)$ ... Weltrekordweite zur Zeit t in m

b1) $\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{6}{20}\right) = 34{,}915...° \approx 34{,}92°$

c1) $h(x) = 0$

oder:

$-0{,}05 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x + 2 = 0$

$x_1 = 17{,}310...$
$(x_2 = -2{,}310...)$
Die Kugel schlägt in einer horizontalen Entfernung von rund 17,31 m auf dem Boden auf.

d1) $7\,257 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot 8{,}2$

$r = \sqrt[3]{\frac{7\,257 \cdot 3}{8{,}2 \cdot 4 \cdot \pi}} = 5{,}95...$

$d = 2 \cdot r = 11{,}91...$
Der Durchmesser einer derartigen Kugel beträgt rund 11,9 cm und liegt im angegebenen Bereich.

Pauschalreisen

Aufgabennummer: 2_071	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, WS 3.2	

Ein Reisebüro vermittelt Plätze für Pauschalreisen nach Kroatien.

a) Es wird angenommen, dass die vermittelten Plätze unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht in Anspruch genommen werden. Alle 100 zur Verfügung stehenden Plätze werden vermittelt.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 4 der vermittelten Plätze nicht in Anspruch genommen werden.

2) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet werden kann:
$\binom{100}{5} \cdot 0{,}05^5 \cdot 0{,}95^{95}$

b) Es wird angenommen, dass die vermittelten Plätze unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht in Anspruch genommen werden. Es werden 102 Plätze vermittelt, obwohl nur 100 Plätze zur Verfügung stehen.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Plätze unter diesen Voraussetzungen nicht ausreicht.

c) Pro Reisetermin stehen jeweils 100 Plätze zur Verfügung.
Für jeden gebuchten Platz erzielt das Reisebüro einen Gewinn von a Euro.
Für jeden nicht gebuchten Platz macht das Reisebüro einen Verlust von 120 Euro.
Den Gesamtgewinn erhält man, indem man vom Gewinn für alle gebuchten Plätze den Verlust für alle nicht gebuchten Plätze abzieht.

Bei einem bestimmten Reisetermin werden nur x Plätze gebucht. Der Gesamtgewinn für diesen Termin beträgt G Euro.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von x aus a und G.

$x =$ ______________________________

Lösungserwartung

a1) X ... Anzahl der nicht in Anspruch genommenen Plätze

Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0{,}05$

$P(X \leq 4) = 0{,}4359...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 43,6 %.

a2) Es werden 5 der 100 vermittelten Plätze nicht in Anspruch genommen.

b1) X ... Anzahl der nicht in Anspruch genommenen Plätze

Binomialverteilung mit $n = 102$ und $p = 0{,}05$

$P(X \leq 1) = 0{,}0340...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 3,4 %.

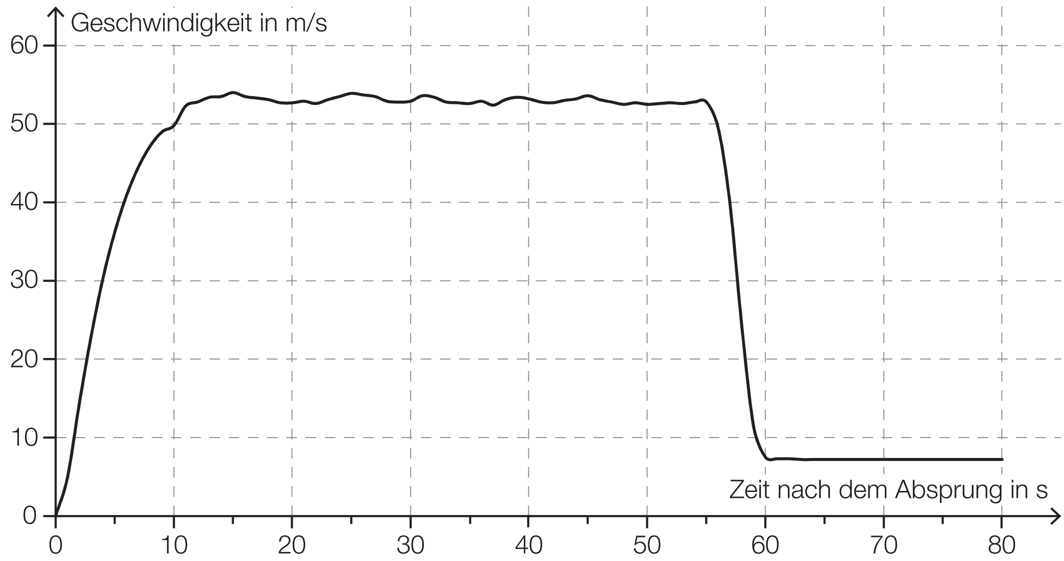
c1) $G = x \cdot a - (100 - x) \cdot 120 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{G + 12\,000}{a + 120}$

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fallschirmsprung

Aufgabennummer: 2_072	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.1, AN 3.3, AN 4.2, AN 4.3	

Bei einem Fallschirmsprung wurde der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit eines Fallschirmspringers aufgezeichnet. Im nachstehenden Diagramm wird diese Geschwindigkeit für die ersten 80 Sekunden nach dem Absprung veranschaulicht.



a) In den ersten Sekunden nach dem Absprung gilt für den Fallschirmspringer annähernd das Fallgesetz:

$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$

t ... Zeit nach dem Absprung in s
$s(t)$ ... Fallstrecke zur Zeit t in m
g ... Erdbeschleunigung, $g = 9{,}81$ m/s²

1) Berechnen Sie mithilfe des Fallgesetzes die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers 1,5 Sekunden nach dem Absprung.

b) 55 Sekunden nach dem Absprung zieht der Fallschirmspringer die Reißleine, der Fallschirm öffnet sich.

1) Schätzen Sie den Flächeninhalt zwischen der Geschwindigkeitskurve und der Zeitachse im Intervall [0 s; 55 s] ab.

2) Interpretieren Sie die Bedeutung dieses Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit.

c) Der Höhenmesser des Fallschirmspringers zeigt 60 Sekunden nach dem Absprung eine Meereshöhe von 1 300 Metern an. Ab dieser Meereshöhe sinkt der Fallschirmspringer jeweils 100 Meter in 14 Sekunden.
Dabei soll die Meereshöhe des Fallschirmspringers (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) durch eine Funktion h beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion h. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt 60 Sekunden nach dem Absprung.

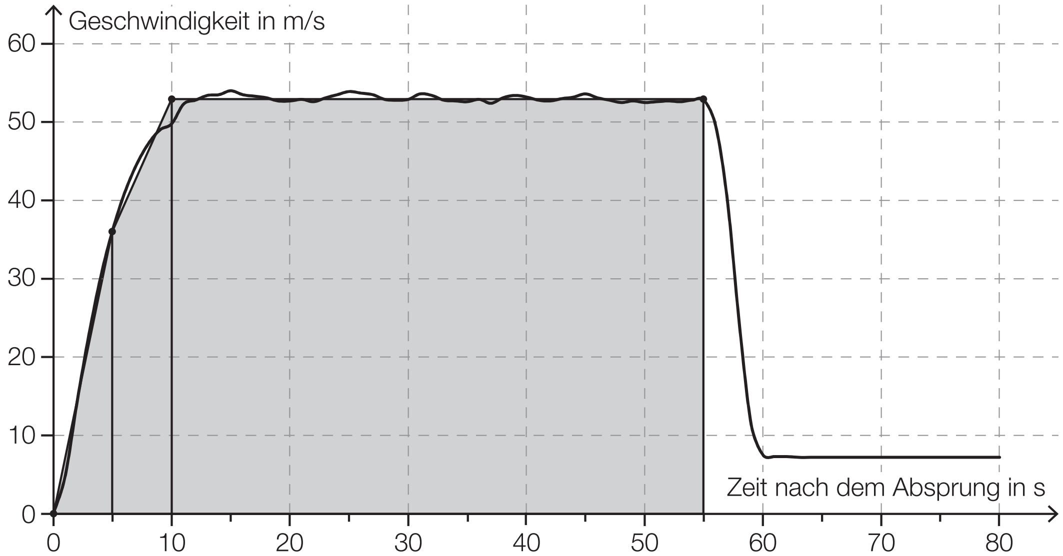
Lösungserwartung

a1) $s'(t) = v(t) = g \cdot t$

$v(1{,}5) = 9{,}81 \cdot 1{,}5 = 14{,}715$

Gemäß dem Fallgesetz beträgt die Geschwindigkeit 1,5 Sekunden nach dem Absprung rund 14,72 m/s.

b1) Näherungsweises Ermitteln des Flächeninhalts durch Dreiecke und Vierecke:



$$A \approx \frac{36 \cdot 5}{2} + \frac{(53 + 36) \cdot 5}{2} + 53 \cdot 45 = 2\,697{,}5$$

Toleranzintervall: [2 400; 2 900]

b2) Der Flächeninhalt entspricht der Fallstrecke in den ersten 55 Sekunden in Metern.

c1) $h(t) = 1\,300 - \frac{100}{14} \cdot t$

t ... Zeit in s

$h(t)$ ... Meereshöhe des Fallschirmspringers zur Zeit t in m

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Altenpflege

Aufgabennummer: 2_073	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 2.5, AN 1.1, AN 1.3	

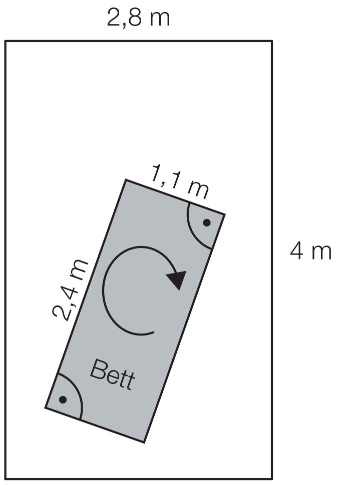
a) Katharina und Georg arbeiten als Pflegekräfte in einem Heim. Sie bekommen das gleiche monatliche Grundgehalt. Im Februar lag in diesem Heim ein besonderer Arbeitsbedarf vor. Georg leistete 14 Überstunden, Katharina leistete 46 Überstunden. Ihr jeweiliges Gesamtentgelt setzt sich aus dem Grundgehalt und der Abgeltung für die geleisteten Überstunden zusammen. Jede Überstunde wird dabei gleich abgegolten.

Das Gesamtentgelt von Georg betrug im Februar € 2.617, jenes von Katharina betrug € 3.433.

1) Ermitteln Sie das Grundgehalt und die Abgeltung für eine Überstunde.

b) Der Aufzug eines Pflegeheims hat eine rechteckige Grundfläche mit einer Länge von 4 m und einer Breite von 2,8 m. Ein Pflegebett fährt auf beweglichen Rollen und hat die Außenmaße 2,4 m × 1,1 m (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).

Aufzug-Innenraum von oben gesehen



1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Aufzug breit genug ist, damit das Bett – wie oben skizziert – um 180° gedreht werden kann.

c) Die nachstehende Tabelle zeigt die Anzahl der Hausbesuche pro Jahr durch mobile Dienste im Rahmen der Altenpflege in Oberösterreich sowie deren prozentuellen Anstieg jeweils im Vergleich zur Anzahl 2 Jahre davor.

Jahr	Anzahl der Hausbesuche pro Jahr	prozentueller Anstieg (gerundet)
1994	498 086	
1996	589 168	18,3 %
1998	802 146	36,1 %
2000	1 017 793	26,9 %
2002	1 176 665	15,6 %
2004	1 360 543	15,6 %

Der prozentuelle Anstieg der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr betrug sowohl von 2000 auf 2002 als auch von 2002 auf 2004 jeweils rund 15,6 %.

1) Erklären Sie in Worten, warum sich die absolute Änderung der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr von 2000 auf 2002 von jener von 2002 auf 2004 unterscheidet, obwohl die prozentuellen Anstiege in den jeweiligen Zeitintervallen gleich sind.

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der Berechnung $\frac{1\,360\,543 - 498\,086}{2004 - 1994} \approx 86\,246$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Lösungserwartung

a1) x ... Grundgehalt in €
y ... Abgeltung für eine Überstunde in €

$x + 14 \cdot y = 2617$
$x + 46 \cdot y = 3433$

$x = 2260$, $y = 25{,}50$

Das Grundgehalt beträgt € 2.260, die Abgeltung für eine Überstunde € 25,50.

b1) Länge der Diagonalen des Bettes d:
$d = \sqrt{1{,}1^2 + 2{,}4^2} = 2{,}640...$

Die Länge der Diagonalen beträgt rund 2,64 m. Da die Diagonale kürzer als die Liftbreite ist, kann das Bett im Lift um 180° gedreht werden.

c1) Die absolute Änderung der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr unterscheidet sich, da verschiedene Grundwerte für die Berechnung der prozentuellen Anstiege herangezogen werden.

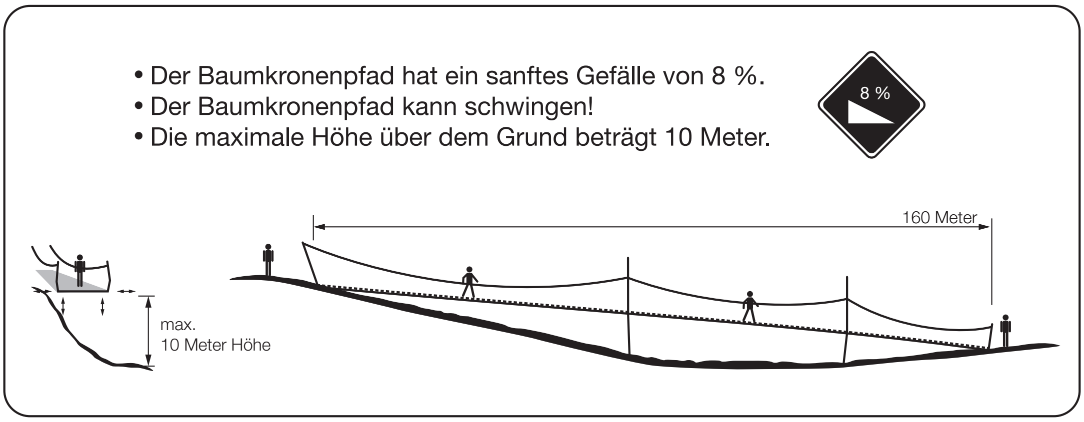
c2) Die Anzahl der Hausbesuche pro Jahr ist im Zeitintervall von 1994 bis 2004 durchschnittlich um rund 86246 pro Jahr gestiegen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Baumkronenpfad

Aufgabennummer: 2_076	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 4.1, FA 5.1, FA 5.3	

Der *Baumkronenpfad* ist eine Brückenstrecke durch einen Teil des Schönbrunner Tiergartens.



a) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen:
„Der Baumkronenpfad hat ein sanftes Gefälle von 8 %.“

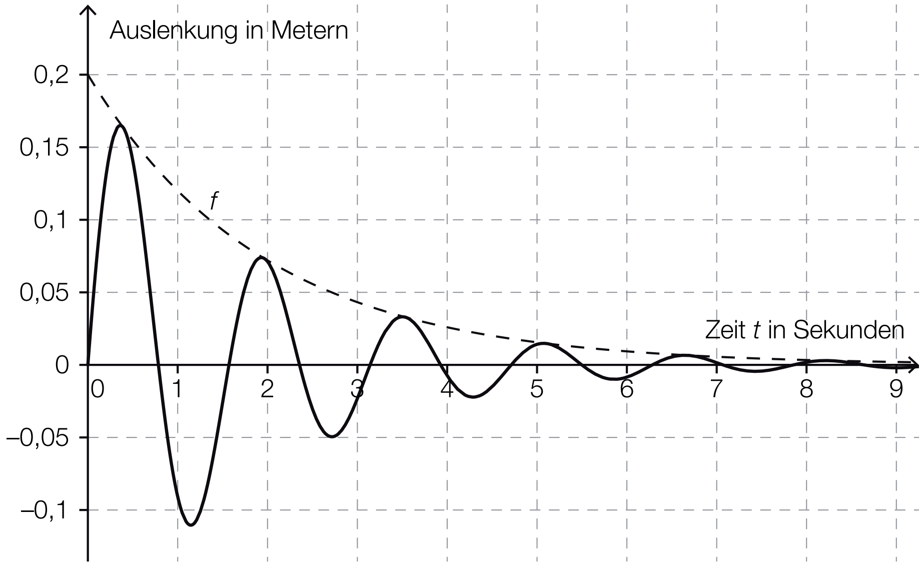
Dabei wird der Baumkronenpfad vereinfacht als geradlinig angenommen. Die horizontale Entfernung zwischen Startpunkt und Endpunkt beträgt 160 m.

1) Berechnen Sie den Höhenunterschied zwischen Startpunkt und Endpunkt.

2) Berechnen Sie den Neigungswinkel des Baumkronenpfads.

b) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Der Baumkronenpfad kann schwingen!“

In der nachstehenden Grafik ist das Auf-und-ab-Schwingen des Baumkronenpfads an einer bestimmten Stelle dargestellt.



In der obigen Grafik ist die sogenannte „Einhüllende“ strichliert eingezeichnet. Es handelt sich dabei um eine Funktion f mit $f(t) = c \cdot a^t$.

1) Lesen Sie aus der Grafik den Parameter c ab.

2) Begründen Sie mathematisch, warum für den Parameter a dieser Funktion f gilt: $0 < a < 1$.

Lösungserwartung

a1) Höhenunterschied in Metern: $160 \cdot 0{,}08 = 12{,}8$

a2) $\tan(\alpha) = 0{,}08 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4{,}57...°$

Auch $\alpha = -4{,}57...°$ ist als richtig zu werten.
Auch die Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

b1) $c = f(0) = 0{,}2$

b2) Da die gegebene Exponentialfunktion streng monoton fallend ist, gilt für den Parameter a:
$0 < a < 1$.

Erfassen der Geschwindigkeit

Aufgabennummer: 2_077	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: FA 1.7, AN 3.2, AN 3.3

Auf einer Teststrecke werden Messungen durchgeführt.

a) Die Teststrecke beginnt bei einem Stoppschild. Die Messergebnisse für ein Auto auf dieser Strecke sind in folgender Tabelle angegeben:

	am Stoppschild	Messung 1	Messung 2
Zeit t in min	0	1	2,5
zurückgelegter Weg $s_1(t)$ in km	0	1	3

Der zurückgelegte Weg soll in Abhängigkeit von der Zeit t im Zeitintervall [0; 2,5] durch eine Polynomfunktion s_1 mit $s_1(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

1) Berechnen Sie die Koeffizienten der Funktion s_1.

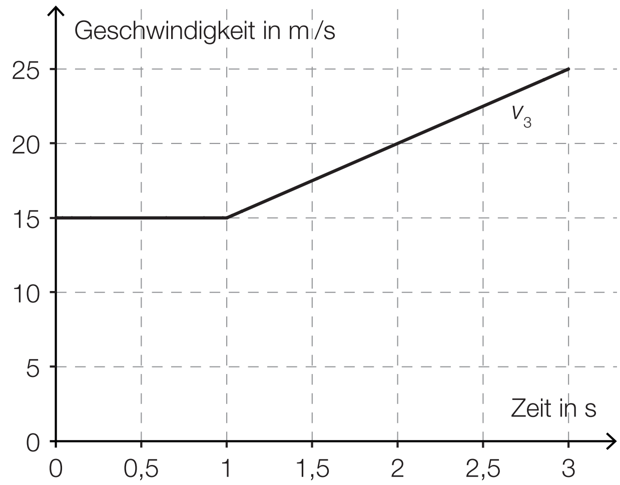
b) Der zurückgelegte Weg eines anderen Autos kann näherungsweise durch die Funktion s_2 beschrieben werden:

$s_2(t) = -\frac{1}{3} \cdot t^3 + 2 \cdot t^2 + \frac{1}{3} \cdot t$ mit $0 \leq t \leq 3$

t ... Zeit in min
$s_2(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in km

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob die Geschwindigkeit dieses Autos zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls null ist.
2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit t_0 die Beschleunigung des Autos im angegebenen Zeitintervall null ist.

c) Die Geschwindigkeit eines anderen Autos kann im Zeitintervall [0; 3] näherungsweise durch die Funktion v_3 beschrieben werden. Der Graph dieser Funktion v_3 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Weg-Zeit-Funktion s_3 im Zeitintervall [1; 3] mit $s_3(1) = 15$.

Lösungserwartung

a1) $s_1(0) = 0$
$s_1(1) = 1$
$s_1(2{,}5) = 3$

oder:

$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
$1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$
$3 = a \cdot 2{,}5^2 + b \cdot 2{,}5 + c$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{2}{15}$
$b = \frac{13}{15}$
$c = 0$

b1) $v_2(t) = s_2'(t) = -t^2 + 4 \cdot t + \frac{1}{3}$
$v_2(0) = \frac{1}{3} \neq 0$
Das Auto hatte zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls eine Geschwindigkeit ungleich 0.

b2) $a_2(t) = s_2''(t) = -2 \cdot t + 4$
$a_2(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 2$

c1) $v_3(t) = 5 \cdot t + 10$ mit $1 \leq t \leq 3$
Integrieren ergibt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + C$
Wegen $s_3(1) = 15$ gilt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + \frac{5}{2}$ mit $1 \leq t \leq 3$
t ... Zeit in s
$s_3(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

Buntes Spielzeug

Aufgabennummer: 2_078	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: WS 1.3, WS 2.3	

Spielzeugteile werden von einer Maschine in den Farben Rot, Gelb und Blau eingefärbt.

a) Die 3 zur Produktion notwendigen Farbdüsen arbeiten (unabhängig voneinander) jeweils mit unterschiedlicher Qualität. Die Farbe Rot wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 96,8 %, die Farbe Gelb mit einer Wahrscheinlichkeit von 98,3 % und die Farbe Blau mit einer Wahrscheinlichkeit von 97,2 % so auf die Teile aufgetragen, dass diese die Qualitätskontrolle bestehen.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zweifärbiges Spielzeugteil in den Farben Rot und Blau die Qualitätskontrolle besteht.

2) Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang für ein zweifärbiges Spielzeugteil, dessen Wahrscheinlichkeit durch $P(E) = 1 - (0{,}968 \cdot 0{,}983)$ berechnet wird.

b) Die einfärbigen Spielzeugteile einer Produktion werden vermessen und ihre jeweiligen Längen werden tabellarisch erfasst.

rote Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
4,5	20
5,6	10
6,0	20
6,5	15
25,3	5

gelbe Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
5,5	25
10,0	7
14,5	13

blaue Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
7,0	70

1) Ermitteln Sie den Median der Längen der gelben Spielzeugteile.

2) Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel der Längen der blauen Spielzeugteile gleich groß ist wie das arithmetische Mittel der Längen der roten Spielzeugteile.

Lösungserwartung

a1) E ... zweifärbiger Spielzeugteil in den Farben Rot und Blau besteht die Kontrolle

$P(E) = 0{,}968 \cdot 0{,}972 = 0{,}9408...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 94,1 %.

a2) E steht in diesem Sachzusammenhang für das Ereignis, dass ein zweifärbiges Spielzeugteil in den Farben Rot und Gelb die Kontrolle nicht besteht.

b1) Median der Längen der gelben Spielzeugteile: $\tilde{x} = 5{,}5$ cm

b2) $$\bar{x}_{\text{rot}} = \frac{20 \cdot 4{,}5\text{ cm} + 10 \cdot 5{,}6\text{ cm} + 20 \cdot 6{,}0\text{ cm} + 15 \cdot 6{,}5\text{ cm} + 5 \cdot 25{,}3\text{ cm}}{70} = 7{,}0\text{ cm}$$

$\bar{x}_{\text{blau}} = 7{,}0$ cm

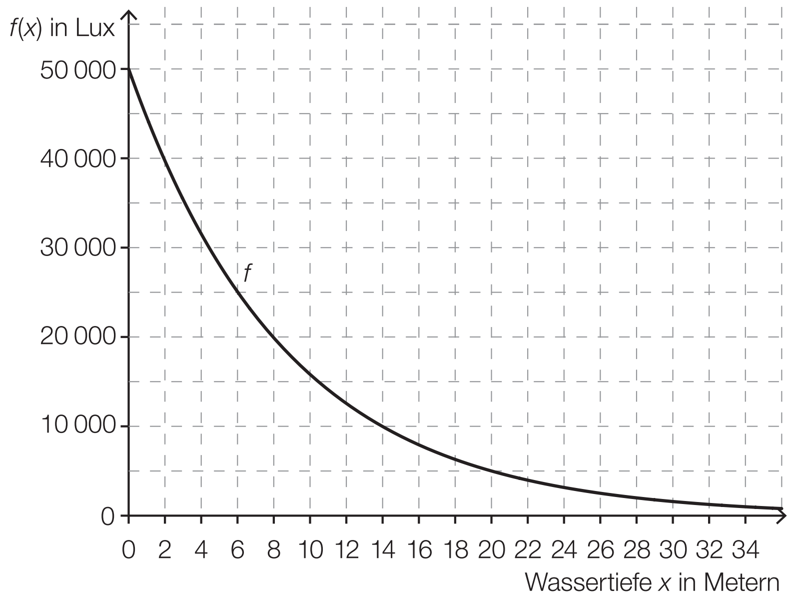
Unter Wasser

Aufgabennummer: 2_079	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.4, FA 5.1	

a) Direkt unter der Wasseroberfläche beträgt der Druck 1 Bar. Der Druck nimmt mit zunehmender Wassertiefe gleichmäßig zu, und zwar um 1 Bar je 10 Meter Wassertiefe.

1) Berechnen Sie, in welcher Wassertiefe ein Druck von 3,9 Bar herrscht.

b) Die Abnahme der Beleuchtungsstärke erfolgt unter Wasser exponentiell und kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden. Der Graph von f ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, in welcher Tiefe die Beleuchtungsstärke nur mehr 10 % ihres Anfangswerts beträgt.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f.

c) Durch eine bestimmte Tauchermaske werden alle Gegenstände unter Wasser um ein Drittel größer wahrgenommen, als sie tatsächlich sind.

1) Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die tatsächliche Größe kleiner als die wahrgenommene Größe ist.

Lösungserwartung

a1) $3{,}9 = 1 + 0{,}1 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 29$

In einer Wassertiefe von 29 Metern herrscht ein Druck von 3,9 Bar.

b1) In einer Tiefe von 20 Metern beträgt die Beleuchtungsstärke 5000 Lux.

Toleranzintervall: [19,5; 20,5]

b2) $f(x) = a \cdot b^x$

$a = 50\,000$

$5\,000 = 50\,000 \cdot b^{20} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[20]{0{,}1} = 0{,}8912... \approx 0{,}891$

$f(x) = 50\,000 \cdot 0{,}891^x$

Geringfügige Abweichungen aufgrund der Verwendung anderer Punkte sind zulässig.

c1) tatsächliche Größe: x

wahrgenommene Größe: $w = \frac{4}{3} \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{4} \cdot w$

Die tatsächliche Größe ist um 25 % kleiner als die wahrgenommene Größe.

Standseilbahnen

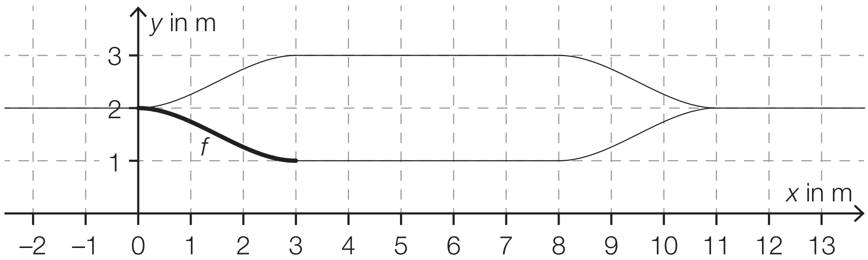
Aufgabennummer: 2_080	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 4.1, FA 1.8, FA 4.3	

Die Wägen von Standseilbahnen fahren auf Schienen und können große Steigungen bewältigen.

a) Eine bestimmte Standseilbahn hat eine konstante Steigung von 40 %.

1) Berechnen Sie, welchen Höhenunterschied ein Wagen dieser Bahn überwindet, wenn er von der Talstation bis zur Bergstation eine Fahrstrecke von 180 m zurücklegt.

b) Bei den meisten Standseilbahnen gibt es in der Mitte der Strecke eine Ausweichstelle, bei der der talwärts fahrende Wagen dem bergwärts fahrenden Wagen ausweichen kann.
In der nachstehenden Abbildung ist eine solche Ausweichstelle modellhaft dargestellt.



Der Funktionsgraph von f schließt an den Stellen 0 und 3 knickfrei an die eingezeichneten Geradenstücke an. „Knickfrei" bedeutet, dass die Funktionen an denjenigen Stellen, an denen ihre Graphen aneinander anschließen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Für die Funktion f gilt:

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x, $f(x)$ … Koordinaten in m

Die Koeffizienten a, b, c und d können mithilfe eines linearen Gleichungssystems berechnet werden. Der Ansatz für zwei der benötigten Gleichungen lautet:

$27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = \boxed{}$

$27 \cdot a + 6 \cdot b + c = \boxed{}$

1) Vervollständigen Sie mithilfe der obigen Abbildung die beiden Gleichungen, indem Sie jeweils die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen schreiben.

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Wert des Koeffizienten d ab.

c) Der Umsatz des Weltmarktführers im Seilbahnbau betrug im Geschäftsjahr 2015/16 rund 834 Millionen Euro und lag somit um 5,04 % über dem Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15.

1) Berechnen Sie den Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15 in Millionen Euro.

Lösungserwartung

a1) $\tan(\alpha) = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 21{,}801...°$

Höhenunterschied $h = 180 \cdot \sin(\alpha) = 66{,}850...$

Der Wagen überwindet einen Höhenunterschied von rund 66,85 m.

b1) $27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = \boxed{1}$

$27 \cdot a + 6 \cdot b + c = \boxed{0}$

b2) $d = 2$

c1) $\frac{834}{1{,}0504} = 793{,}9...$

Der Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15 betrug rund 794 Millionen Euro.
Die Angabe des Zusatzes „Millionen Euro" ist nicht erforderlich.

Fußballspielen im Park

Aufgabennummer: 2_081	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.7, FA 4.3, AN 3.3	

Roland und Julia spielen im Park Fußball. Roland legt den Ball auf die horizontale Wiese, nimmt Anlauf und schießt.

Die Flugbahn des Balles kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion h beschrieben werden. Dabei wird der Ball als punktförmig angenommen.

$h(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$ mit $x \geq 0$

x … horizontale Entfernung des Balles von der Abschussstelle in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe des Balles über dem Boden an der Stelle x in m

a) 1) Ermitteln Sie den für diesen Sachzusammenhang größtmöglichen sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion h.

2) Berechnen Sie den höchsten Punkt der Flugbahn.

b) Julia fängt den Ball aus einer Höhe von 1,80 m.

1) Ermitteln Sie die beiden horizontalen Entfernungen von der Abschussstelle, an denen Julia sich dabei befinden kann.

c) Roland überlegt, ob er bei diesem Schuss den Ball über ein 2,8 m hohes Klettergerüst, das in direkter Schussrichtung 10 m von der Abschussstelle entfernt steht, schießen könnte.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Schuss tatsächlich über das Klettergerüst fliegen kann.

Lösungserwartung

a1) $0 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$
$0 = x^2 \cdot (-0{,}003 \cdot x + 0{,}057) \;\Rightarrow\; x_1 = 0$
$-0{,}003 \cdot x + 0{,}057 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 19$

$D = [0; 19]$

a2) $h'(x) = 0$
$x \cdot (-0{,}009 \cdot x + 0{,}114) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$
$-0{,}009 \cdot x + 0{,}114 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 12{,}66... \approx 12{,}7$
$h(x_2) = 3{,}04\ldots \approx 3{,}0$

In einer horizontalen Entfernung von rund 12,7 m zur Abschussstelle erreicht der Ball seine größte Höhe von rund 3,0 m.
Der Nachweis, dass es sich bei der Extremstelle um eine Maximumstelle handelt, und eine Überprüfung der Ränder des Definitionsbereichs sind nicht erforderlich.

b1) $1{,}80 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$

$(x_1 = -5)$
$x_2 = 7{,}10\ldots \approx 7{,}1$
$x_3 = 16{,}89\ldots \approx 16{,}9$

Julia kann sich in einer Entfernung von etwa 7,1 m oder von etwa 16,9 m von der Abschussstelle befinden.

c1) $h(10) = 2{,}7$

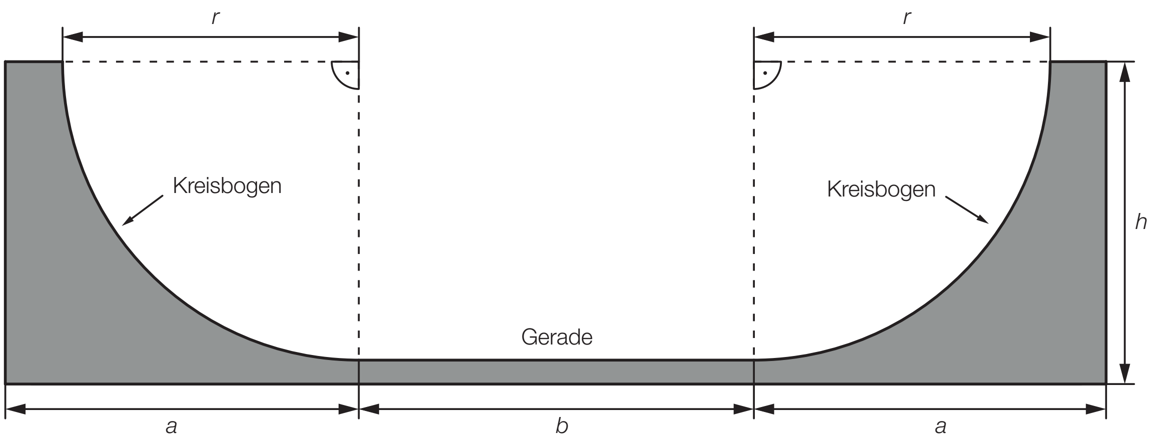
Da $h(10)$ kleiner als 2,8 m ist, kann der Ball nicht über das Klettergerüst fliegen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Skatepark

Aufgabennummer: 2_082	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.3	

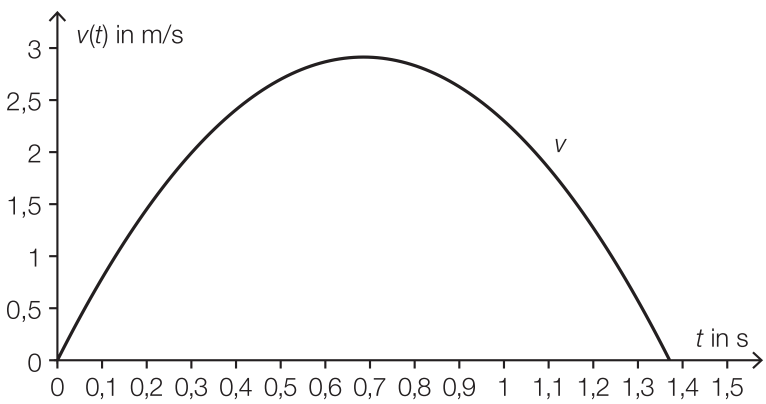
a) Folgende Grafik zeigt den Entwurf einer Halfpipe im Querschnitt:



1) Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts A der grauen Fläche (Querschnittsfläche) aus a, b, h und r.

A = ____

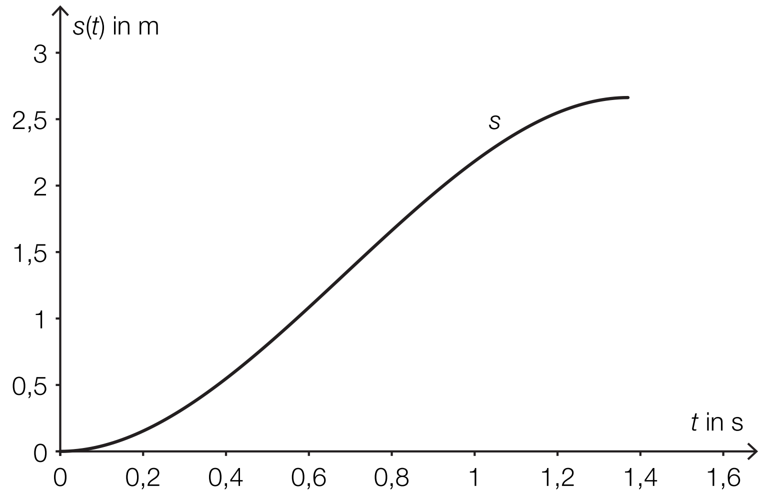
b) Die Geschwindigkeit einer Skaterin in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion v beschreiben. Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung denjenigen Weg, den die Skaterin zwischen $t = 0{,}5$ s und $t = 1$ s zurücklegt.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von $v'(0{,}3)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Der zurückgelegte Weg eines Skaters in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion s beschreiben. Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

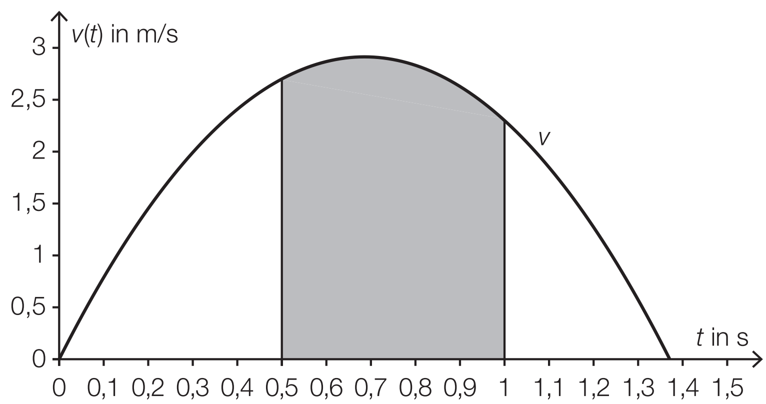


1) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit zwischen $t = 0{,}6$ s und $t = 1{,}2$ s.

Lösungserwartung

a1) $A = (2 \cdot a + b) \cdot h - b \cdot r - \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$

b1)



b2) $v'(0{,}3)$ ist die Beschleunigung (in m/s²) der Skaterin zum Zeitpunkt $t = 0{,}3$ s.

c1) $\bar{v} = \frac{1{,}5}{0{,}6} = 2{,}5$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt rund 2,5 m/s.
Toleranzintervall für $\bar{v}$: [2,1; 2,9]

Teilchenbeschleuniger

Aufgabennummer: 2_084	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, WS 3.2, WS 3.3	

Am Forschungsinstitut CERN wird mithilfe moderner Teilchenbeschleuniger physikalische Grundlagenforschung betrieben. In einem Teilchenbeschleuniger werden elektrisch geladene Teilchen auf hohe Geschwindigkeiten beschleunigt.

a) Die Teilchen bewegen sich in einem ringförmigen Tunnel nahezu mit Lichtgeschwindigkeit. Sie machen dabei in einer Sekunde *a* Umläufe und legen in dieser Zeit rund $3 \cdot 10^8$ m zurück.

1) Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Länge *u* eines Umlaufs in Kilometern.

u = ______________________________

b) Wenn Teilchen im Teilchenbeschleuniger kollidieren, können neue Teilchen entstehen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Kollision ein Teilchen eines bestimmten Typs entsteht, beträgt 3,4 %.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E wird mit $P(E) = \binom{500}{2} \cdot 0{,}034^2 \cdot (1 - 0{,}034)^{498}$ berechnet.

1) Beschreiben Sie im gegebenen Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit so berechnet wird.

2) Berechnen Sie, wie viele dieser Teilchen im Mittel entstehen, wenn 1 000 Kollisionen stattfinden.

c) Im Zentrum eines Atoms befindet sich der Atomkern. Vereinfacht können sowohl der Atomkern als auch das gesamte Atom als kugelförmig angenommen werden.
In einer Broschüre wird beschrieben, wie klein ein Atomkern im Vergleich zum gesamten Atom ist: „Hätte ein Atomkern 1 cm Durchmesser, so wäre der Durchmesser des gesamten Atoms 100 m."

1) Berechnen Sie den Durchmesser eines Atoms, wenn der Durchmesser des Atomkerns 10^{-14} m beträgt.

Lösungserwartung

a1) $u = \frac{3 \cdot 10^8}{a \cdot 10^3}$

b1) Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass bei 500 Kollisionen genau 2 Teilchen dieses Typs entstehen.

b2) $1\,000 \cdot 0{,}034 = 34$

Bei 1 000 Kollisionen entstehen im Mittel 34 Teilchen dieses Typs.

c1) $\frac{100}{0{,}01} = \frac{d}{10^{-14}} \Rightarrow d = 10^{-10}$

Der Durchmesser des Atoms beträgt 10^{-10} m.

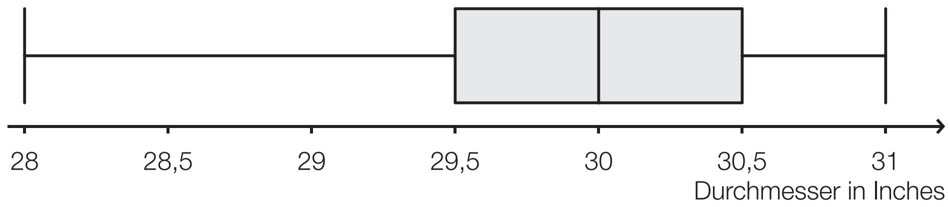
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Riesenpizza

Aufgabennummer: 2_085	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AN 3.3, WS 1.1, WS 1.2	

In den USA wird die Größe einer Pizza durch ihren Durchmesser (in Inches) angegeben. Im Folgenden werden Pizzen immer als kreisrund angenommen.

a) Bei 30-Inch-Pizzen verschiedener Lieferanten wurde der tatsächliche Durchmesser bestimmt. Die Messergebnisse sind im folgenden Boxplot zusammengefasst:



1) Lesen Sie die Spannweite ab.

Irrtümlich wurde beim Erfassen der Messwerte bei einer Pizza statt eines Durchmessers von 28,5 Inch ein Durchmesser von 29 Inch notiert.

2) Erklären Sie, warum dieser Fehler den Boxplot nicht beeinflusst.

b) 1) Zeigen Sie allgemein, dass der Flächeninhalt einer (kreisrunden) Pizza vervierfacht wird, wenn ihr Durchmesser verdoppelt wird.

c) Für eine bestimmte Pizzasorte wird der Preis pro Flächeneinheit in Abhängigkeit vom Durchmesser modellhaft durch folgende quadratische Funktion P beschrieben:

$P(d) = 0{,}0003 \cdot d^2 - 0{,}015 \cdot d + 0{,}2619$ mit $8 \leq d \leq 30$

d ... Durchmesser der Pizza in Inches
$P(d)$ ... Preis pro Flächeneinheit einer Pizza mit Durchmesser d in US-Dollar

1) Ermitteln Sie, für welchen Durchmesser der Preis pro Flächeneinheit am niedrigsten ist.

Lösungserwartung

a1) Spannweite: 3 Inch

a2) Sowohl der falsche als auch der korrekte Wert liegen zwischen dem Minimum und dem ersten Quartil. Daher verändert dieser Fehler weder das Minimum noch das erste Quartil und beeinflusst den Boxplot nicht.

b1) Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser d: $A_d = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$
Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser $2d$: $A_{2d} = \frac{4d^2}{4} \cdot \pi = d^2 \cdot \pi = 4 \cdot A_d$

Ein Nachweis mit konkreten Zahlenwerten für die Durchmesser ist nicht ausreichend.

c1) $P'(d) = 0{,}0006 \cdot d - 0{,}015$
$P'(d) = 0 \;\Rightarrow\; d = 25$

Die Pizza mit dem niedrigsten Preis pro Flächeneinheit hat einen Durchmesser von 25 Inch.

Section-Control

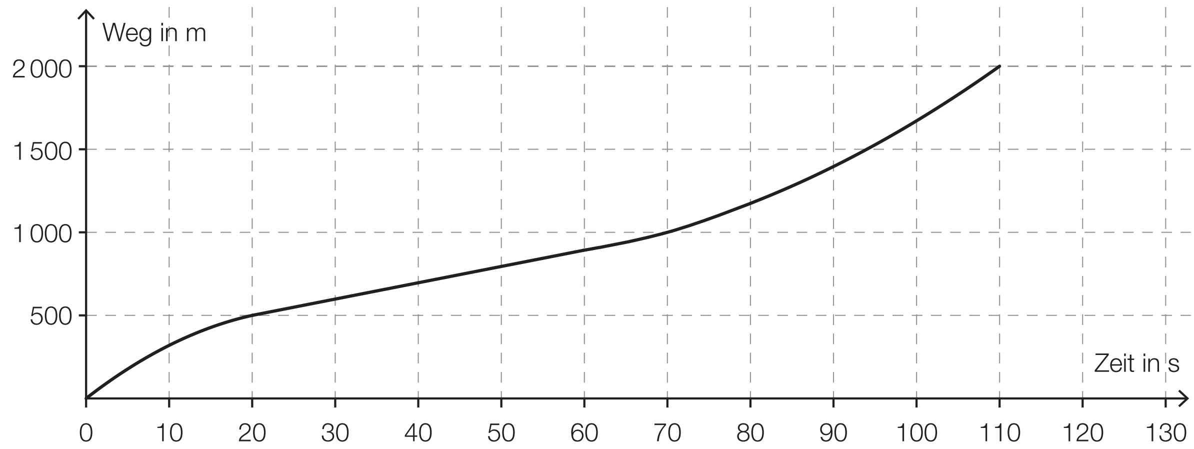
Aufgabennummer: 2_086	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AN 1.1, AN 1.3	

Section-Control bezeichnet ein System zur Überwachung der Einhaltung von Tempolimits im Straßenverkehr. Dabei wird nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen, sondern die mittlere Geschwindigkeit über eine längere Strecke ermittelt.

a) In einem 6 km langen Baustellenbereich wird eine Section-Control errichtet.
Es gilt eine zulässige Höchstgeschwindigkeit von 60 km/h.
Jemand behauptet: „Wenn ich die zulässige Höchstgeschwindigkeit im gesamten Baustellenbereich um 10 % überschreite, dann verkürzt sich meine Fahrzeit im Baustellenbereich um 10 %."

1) Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist.

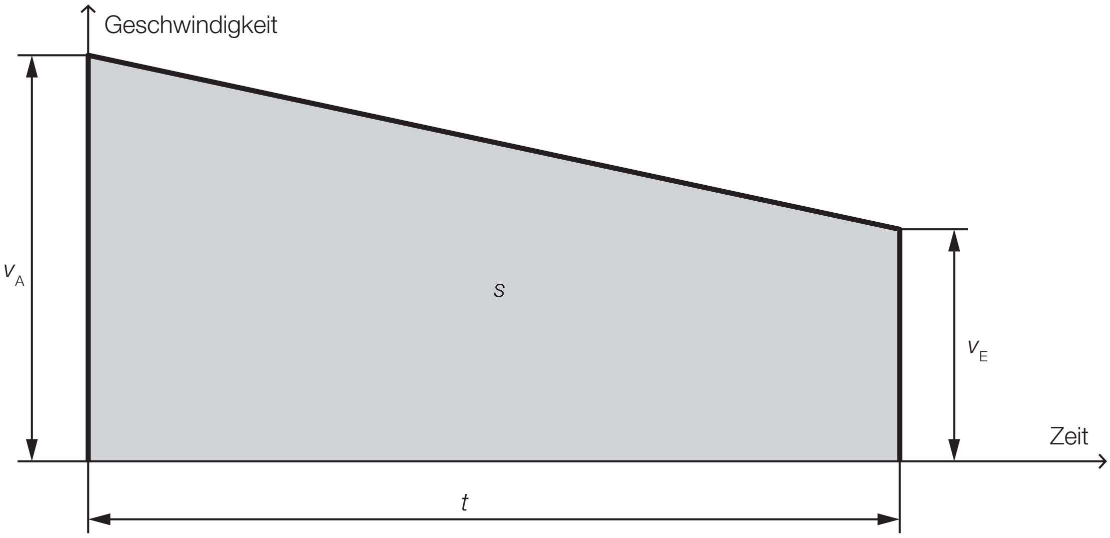
b) Im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist die Fahrt eines Fahrzeugs in einem überprüften Bereich dargestellt.



1) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs auf der ersten Weghälfte.

2) Argumentieren Sie, dass die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte kleiner als die mittlere Geschwindigkeit auf der zweiten Weghälfte ist.

c) Ein Fahrzeug fährt durch einen Bereich, der durch eine Section-Control überwacht wird. Seine Geschwindigkeit nimmt auf diesem Streckenabschnitt linear ab.



Die Endgeschwindigkeit v_E, die Fahrzeit t und der zurückgelegte Weg s sind bekannt.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anfangsgeschwindigkeit v_A des Fahrzeugs.

v_A = ____

Lösungserwartung

a1) $s = 6$ km

$v_1 = 60$ km/h: $t_1 = \frac{s}{v_1} = 0{,}1$ h

$v_2 = 66$ km/h: $t_2 = \frac{s}{v_2} = 0{,}\overline{09}$ h

90 % von 0,1 h sind exakt 0,09 h. Das ist weniger als t_2.

b1) $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1\,000\text{ m}}{70\text{ s}} = 14{,}285...$ m/s $\approx 14{,}29$ m/s

b2) Die Fahrzeit für die erste Weghälfte beträgt 70 Sekunden. Die Fahrzeit für die zweite Weghälfte beträgt nur 40 Sekunden. Daher ist die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte geringer.

c1) Der Flächeninhalt des Trapezes entspricht dem zurückgelegten Weg: $s = \frac{v_A + v_E}{2} \cdot t$.

$v_A = 2 \cdot \frac{s}{t} - v_E$

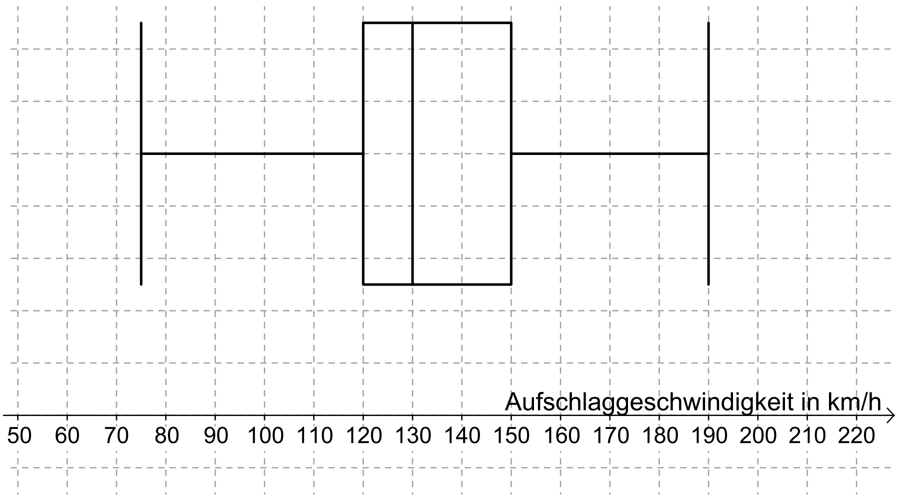
Tennis

Aufgabennummer: 2_087	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.5, WS 1.1

Im Rahmen der Nachwuchsförderung wurden die Leistungen der Teilnehmer eines Knaben-Tennisturniers genauer beobachtet.

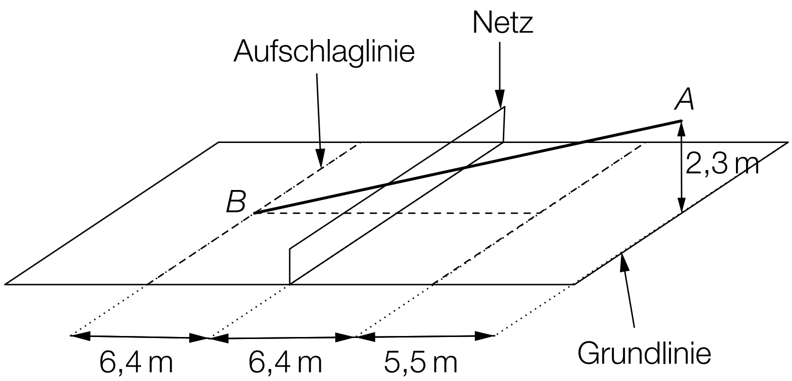
a) Für die Auswertung der Daten der Aufschlaggeschwindigkeit der Teilnehmer wurde der nachstehende Boxplot erstellt.



1) Lesen Sie diejenige Aufschlaggeschwindigkeit ab, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde.

2) Lesen Sie den Quartilsabstand ab.

b) Ein Spieler trifft beim Aufschlag den Ball in einer Höhe von 2,3 m im Punkt *A* genau über der Mitte der Grundlinie. Er visiert den Punkt *B* (Mitte der Aufschlaglinie) an. Um nicht ins Netz zu gehen, muss der Ball das Netz in einer Höhe von mindestens 1 Meter (über dem Boden) überqueren.
Die Flugbahn des Tennisballs beim Aufschlag kann modellhaft mittels einer Gerade beschrieben werden.



1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Aufschlag über das Netz geht.

c) Mithilfe einer Videoanalyse wird ein Grundlinienschlag modelliert.
Die Flugbahn zwischen dem Abschlagpunkt und dem Punkt, in dem der Ball auf dem Boden aufkommt, kann durch die Funktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{50} \cdot x^2 + \frac{2}{5} \cdot x + \frac{21}{50} \quad \text{mit } x \geq 0$$

x ... horizontale Entfernung zum Abschlagpunkt in Metern (m)
$f(x)$ ... Höhe des Balles an der Stelle x über dem Boden in m

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der obigen Zahl $\frac{21}{50}$ für die Flugbahn.

Lösungserwartung

a1) Aufschlaggeschwindigkeit, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde:
120 km/h

a2) Quartilsabstand: 30 km/h

b1) Argumentation mit ähnlichen Dreiecken:

$$\frac{2{,}3}{6{,}4 + 6{,}4 + 5{,}5} = \frac{h}{6{,}4}$$

$h = 0{,}80\ldots \text{ m} \approx 0{,}8 \text{ m}$

Der Ball ist beim Netz in einer Höhe von rund 0,8 m.
Somit geht der Ball ins Netz.

Eine Argumentation mit einer linearen Funktion oder mit Steigungswinkeln ist ebenfalls möglich.

c1) Der Ball befindet sich im Abschlagpunkt in einer Höhe von $\frac{21}{50}$ Metern.

Vergnügungspark

Aufgabennummer: 2_088	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.3, AG 4.1, FA 4.4, AN 4.2	

Ein kürzlich eröffneter Vergnügungspark ist ein beliebtes Ausflugsziel in der Region.

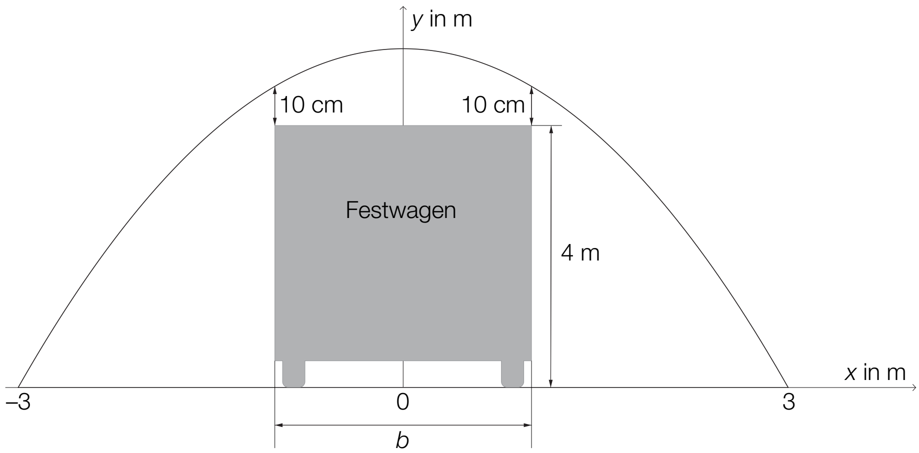
a) Beim Eingang zum Vergnügungspark steht ein Torbogen. Dieser wird durch einen Teil des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung beschrieben:

$y = 9 - x^2$

x, y ... Koordinaten in Metern (m)

Dabei wird der ebene Boden durch die x-Achse beschrieben.

Bei einer Parade muss ein 4 Meter hoher Festwagen durch den Torbogen geschoben werden. Nach oben hin muss ein senkrechter Minimalabstand von 10 cm eingehalten werden (siehe Skizze – nicht maßstabgetreu).

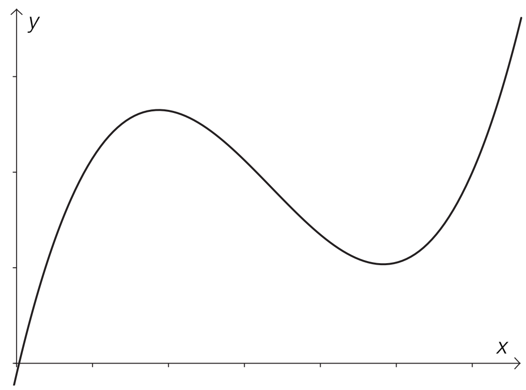


1) Berechnen Sie, welche Breite b der Festwagen maximal haben darf.

Vor der Parade wird der Torbogen mit einer Folie verschlossen.

2) Berechnen Sie den Flächeninhalt der dazu benötigten Folie.

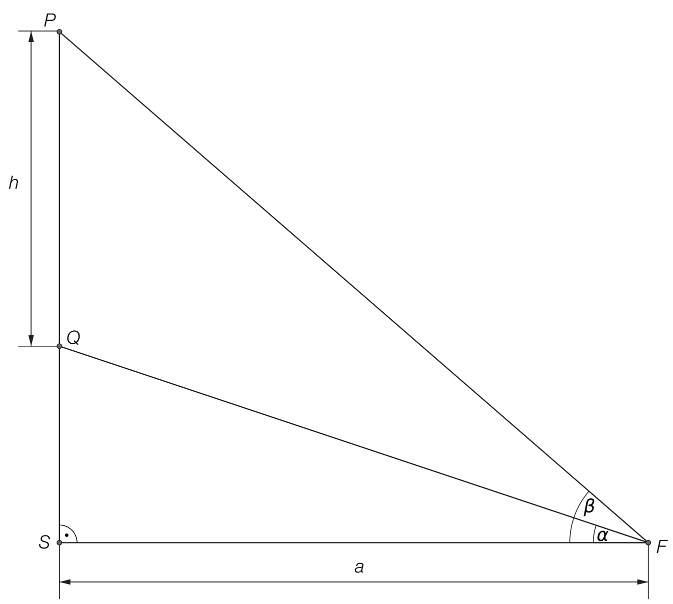
b) Eine der Hauptattraktionen ist die Hochschaubahn. Ein Teilstück kann durch die Polynomfunktion modelliert werden, deren Graph in der folgenden Abbildung zu sehen ist:



1) Erklären Sie, welchen Grad diese Polynomfunktion mindestens haben muss.

c) Im Vergnügungspark gibt es ein Kino.

Fiona sitzt a Meter von der Leinwand entfernt (Punkt F). Der Höhenwinkel zum unteren Ende der Leinwand (Punkt Q) wird mit α bezeichnet, der Höhenwinkel zum oberen Ende der Leinwand (Punkt P) wird mit β bezeichnet.



1) Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Höhe h der Leinwand aus a, α und β.

h = ____

Lösungserwartung

a1) $4{,}1 = 9 - x^2$
$x^2 = 4{,}9$
$x = \pm 2{,}213\ldots$

Der Festwagen darf rund 4,42 m breit sein.

a2) $\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\mathrm{d}x = 36$

Der Flächeninhalt der benötigten Folie beträgt 36 m².

b1) Diese Polynomfunktion hat im dargestellten Intervall 2 lokale Extremstellen. Somit muss die 1. Ableitung dieser Funktion 2 Nullstellen haben, also mindestens eine Polynomfunktion 2. Grades sein. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Eine Gerade parallel zur x-Achse hat 3 Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

c1) rechtwinkeliges Dreieck *FPS*: $\tan(\beta) = \frac{\overline{SP}}{a} \Rightarrow \overline{SP} = a \cdot \tan(\beta)$

rechtwinkeliges Dreieck *FQS*: $\tan(\alpha) = \frac{\overline{SQ}}{a} \Rightarrow \overline{SQ} = a \cdot \tan(\alpha)$

$h = \overline{SP} - \overline{SQ}$
$h = a \cdot \tan(\beta) - a \cdot \tan(\alpha) = a \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$

Wachstum von Holzbeständen

Aufgabennummer: 2_089	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 5.1, FA 5.2	

a) Bauer Waldner weiß, dass sich der Holzbestand seines Waldes um ca. 2,7 % pro Jahr bezogen auf das jeweilige Vorjahr vermehrt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der Holzbestand 36 000 m³.

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für diejenige Funktion f auf, die den Holzbestand in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren angibt.

b) Der Holzbestand eines anderen Waldes kann näherungsweise mithilfe der Funktion g beschrieben werden:

$g(t) = 31\,800 \cdot 1{,}025^t$

t ... Zeit in Jahren
$g(t)$ ... Holzbestand zum Zeitpunkt t in Kubikmetern (m³)

Wenn der Holzbestand auf 33 000 m³ angewachsen ist, wird so viel geschlägert, dass wieder der Holzbestand zum Zeitpunkt $t = 0$ vorliegt.

Für den Verkauf dieses geschlägerten Holzes betragen die Einnahmen € 96.000.

1) Berechnen Sie den durchschnittlichen Verkaufspreis für 1 m³ Holz.
2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Holzbestand auf 33 000 m³ angewachsen ist.

c) Ein Student behauptet: „Um die relative Änderung r des Holzbestandes von einem Zeitpunkt t_1 bis zu einem späteren Zeitpunkt t_2 zu berechnen, subtrahiere ich vom Holzbestand zum Zeitpunkt t_2 den Holzbestand zum Zeitpunkt t_1 und dividiere die Differenz durch den Holzbestand zum Zeitpunkt t_1."

1) Übersetzen Sie die Rechenanleitung des Studenten in eine Formel.

Lösungserwartung

a1) $f(t) = 36\,000 \cdot 1{,}027^t$

t … Zeit in Jahren
$f(t)$ … Holzbestand zum Zeitpunkt t in m^3

b1) Verkauft wurden 1 200 m^3, daher betrug der durchschnittliche Preis pro Kubikmeter € 80.

b2) $33\,000 = 31\,800 \cdot 1{,}025^t$

$$t = \frac{\ln(33\,000) - \ln(31\,800)}{\ln(1{,}025)} = 1{,}50\ldots$$

Nach etwa 1,5 Jahren beträgt der Holzbestand 33 000 m^3.

c1) $$r = \frac{h(t_2) - h(t_1)}{h(t_1)}$$

r … relative Änderung
t_1, t_2 … Zeitpunkte
$h(t_1)$, $h(t_2)$ … Holzbestand zum Zeitpunkt t_1 bzw. t_2

Gold

Aufgabennummer: 2_090	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, AN 1.1	

Das Edelmetall Gold gilt als besonders wertvoll, weil es selten vorkommt, leicht zu Schmuck verarbeitet werden kann und sehr beständig ist.

a) Der *World Gold Council*, eine globale Lobby-Organisation der Goldminenindustrie, schätzt die bis zum Jahr 2012 weltweit geförderte Goldmenge auf rund $1{,}713 \cdot 10^8$ Kilogramm (kg).
Gold hat eine Dichte von 19,3 Gramm pro Kubikzentimeter (g/cm³). Die Masse ist das Produkt von Volumen und Dichte.

Stellen Sie sich vor, dass die gesamte weltweit geförderte Goldmenge in einen Würfel gegossen wird.

1) Berechnen Sie die Kantenlänge dieses Würfels in Metern.

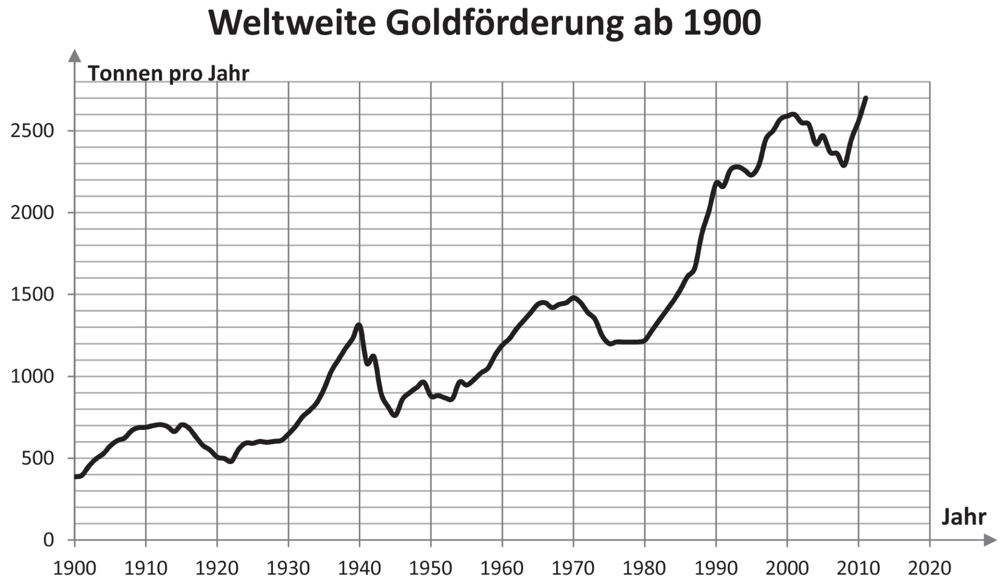
b) Gold kommt in der Natur auch in der Form von Nuggets (Goldklumpen) vor. Es wird in der Einheit *Feinunze* (oz. tr.) gehandelt, die einer Masse von 31,1035 Gramm (g) reinen Goldes entspricht.

Gesucht ist der Wert W eines Nuggets in Euro, wenn folgende Größen bekannt sind:

m ... Masse des Nuggets in Gramm (g)
p ... Preis in Euro für eine Feinunze Gold

1) Erstellen Sie eine Formel für W.

c) Die nachstehende Grafik zeigt die weltweite jährliche Förderung von Gold ab dem Jahr 1900 in Tonnen.



Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Goldfoerderung.png [29.08.2013] (adaptiert).

1) Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, in welchem Jahrzehnt die weltweite Förderung absolut am stärksten gestiegen ist.

d) In einer Zeitung wird folgende Analyse veröffentlicht: „Der Wert der Ein-Unzen-Krugerrand-Goldmünze ist im Jahr 2010 um 20 % gestiegen. Im Jahr 2011 stieg der Wert nochmals um 10 %. Also ist der Wert der Münze in diesen beiden Jahren insgesamt um 30 % gestiegen."

1) Begründen Sie, warum diese Aussage über die Wertentwicklung nicht richtig ist.

Lösungserwartung

a1) Kantenlänge des Würfels: $a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{1{,}713 \cdot 10^{11}\text{ g}}{19{,}3\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} = 2\,070{,}4...\text{ cm}$

Der Würfel hat eine Kantenlänge von rund 20,7 Metern.

b1) $W = \frac{m \cdot p}{31{,}1035}$

c1) Die weltweite jährliche Förderung ist zwischen 1980 und 1990 absolut am stärksten gestiegen.

d1) Die angegebenen Prozentsätze dürfen nicht addiert werden, weil sie sich nicht auf denselben Grundwert beziehen.
Der Wert der Goldmünze ist um den Faktor $1{,}2 \cdot 1{,}1 = 1{,}32$ gestiegen, also um 32 %.

Mathematikwettbewerb

Aufgabennummer: 2_091	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: WS 1.1, WS 1.2, WS 1.3	

Eine Schülergruppe hat an einem Mathematikwettbewerb teilgenommen.

a) Die 12 Burschen der Schülergruppe haben folgende Punktezahlen erreicht:

32; 38; 40; 52; 53; 54; 56; 60; 61; 64; 66; 84

Nun sollen die Ergebnisse übersichtlich dargestellt werden. Dazu wird die folgende Klasseneinteilung verwendet:

A	30 bis 39
B	40 bis 49
C	50 bis 59
D	60 bis 69
E	70 bis 79
F	80 bis 89

1) Erstellen Sie ein Säulen- oder Balkendiagramm, in welchem die Häufigkeiten der jeweiligen Klassen *A* bis *F* dargestellt sind.

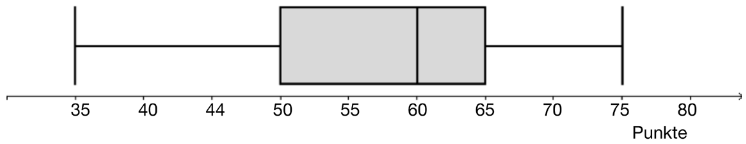
b) Das arithmetische Mittel und der Median für die Punktezahlen der Burschen betragen 55 Punkte.
Die 12 Mädchen der Schülergruppe haben folgende Punktezahlen erreicht:

37; 38; 44; 53; 54; 57; 59; 60; 61; 62; 63; 65

Die Mädchen behaupten, dass sie sowohl beim arithmetischen Mittel als auch beim Median eine größere Punktezahl als die Burschen erreicht haben.

1) Überprüfen Sie nachvollziehbar, ob diese Behauptung richtig ist.

c) Die Punkteverteilung einer anderen Schülergruppe ist in dem nachstehenden Boxplot dargestellt.

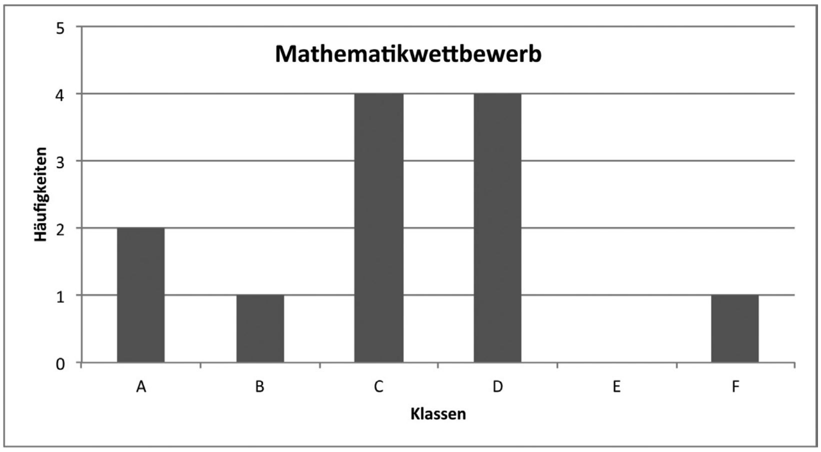


1) Lesen Sie ab, wie viel Prozent der Schüler/innen mindestens 50 Punkte erreicht haben.

2) Ermitteln Sie die Spannweite der Punktezahlen.

Lösungserwartung

a1)



b1) Punktezahlen der Mädchen:
- arithmetisches Mittel: 54,4 Punkte
- Median: 58 Punkte

Die Behauptung ist also falsch.

c1) Die Punktezahl 50 ist das 1. Quartil. Das heißt: Mindestens 75 % der Schüler/innen haben mindestens 50 Punkte erreicht.

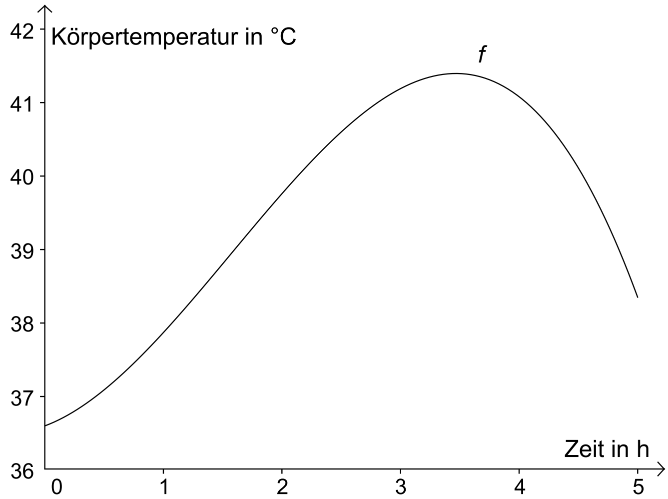
c2) Spannweite: 75 – 35 = 40.
Die Spannweite beträgt 40 Punkte.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Ganzkörperhyperthermie

Aufgabennummer: 2_092	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.7, FA 4.4, AN 3.3, AN 4.2	

Bei einem Therapieverfahren wird die Körpertemperatur bewusst stark erhöht (künstliches Fieber). Die nebenstehende Grafik dokumentiert näherungsweise den Verlauf des künstlichen Fiebers bei einer solchen Behandlung.



Die Funktion f beschreibt den Zusammenhang zwischen Zeit und Körpertemperatur:

$f(t) = -0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6$

t ... Zeit in Stunden (h) mit $0 \leq t \leq 5$
$f(t)$ ... Körpertemperatur zur Zeit t in °C

a) 1) Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Körpertemperatur 37 °C beträgt.

b) 1) Dokumentieren Sie, wie die maximale Körpertemperatur im angegebenen Zeitintervall mithilfe der Differenzialrechnung berechnet werden kann.

2) Begründen Sie, warum der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben kann.

c) Die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ während der 5 Stunden andauernden Behandlung soll ermittelt werden.

Die mittlere Körpertemperatur in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ ist:

$$\overline{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Berechnen Sie die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ im Zeitintervall [0; 5].

Lösungserwartung

a1) $-0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6 = 37$

$t = 0{,}429... \Rightarrow t \approx 0{,}43$ h

b1) Dazu muss das Maximum der Funktion f ermittelt werden: Man berechnet die Nullstellen der 1. Ableitung f'. Dann berechnet man die Funktionswerte an diesen Stellen und den Randstellen. Die größte dieser Zahlen ist der maximale Funktionswert.

b2) Die 1. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine quadratische Funktion. Eine quadratische Funktion hat höchstens 2 Nullstellen. Daher kann der Graph der Polynomfunktion 3. Grades nur höchstens 2 Extrempunkte haben.

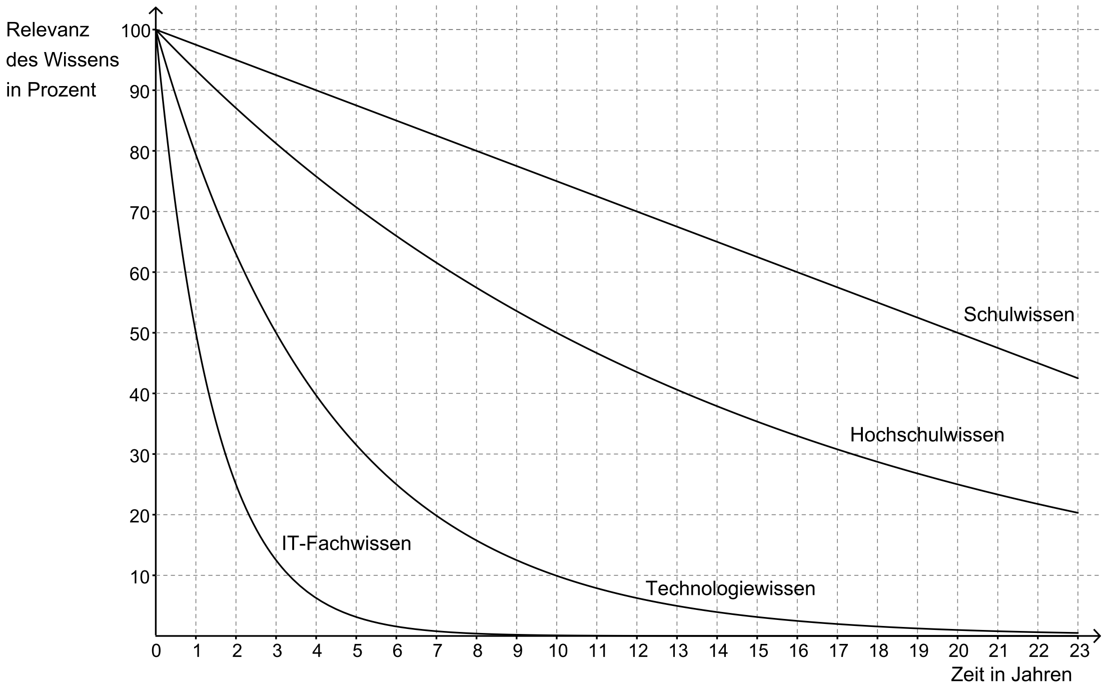
c1) $\overline{f} = \frac{1}{5} \cdot \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 39{,}55... \approx 39{,}6$

Die mittlere Körpertemperatur beträgt rund 39,6 °C.

Halbwertszeit des Wissens

Aufgabennummer: 2_093	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.2, FA 5.1, FA 5.2	

Das zu einem bestimmten Zeitpunkt erworbene Wissen verliert im Laufe der Zeit aufgrund gesellschaftlicher Veränderungen, technologischer Neuerungen etc. an Aktualität und Gültigkeit („Relevanz"). Die nachstehende Abbildung beschreibt die Abnahme der Relevanz des Wissens in verschiedenen Fachbereichen. Für jedes Jahr wird angegeben, wie viel Prozent des ursprünglichen Wissens noch relevant sind.



a) Man geht davon aus, dass die Relevanz des beruflichen Fachwissens exponentiell abfällt und eine Halbwertszeit von 5 Jahren hat.

1) Zeichnen Sie in die Abbildung der Angabe den Verlauf der Relevanz des beruflichen Fachwissens im Intervall [0; 15] ein.

b) Die Relevanz von Technologiewissen nimmt mit einer Halbwertszeit von 3 Jahren exponentiell ab.

1) Stellen Sie diejenige Exponentialfunktion auf, die die Relevanz des Technologiewissens in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

c) Die Relevanz des Hochschulwissens lässt sich durch folgende Funktion N beschreiben:

$N(t) = 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren
$N(t)$ ... Relevanz des Hochschulwissens zur Zeit t in % des anfänglichen Hochschulwissens

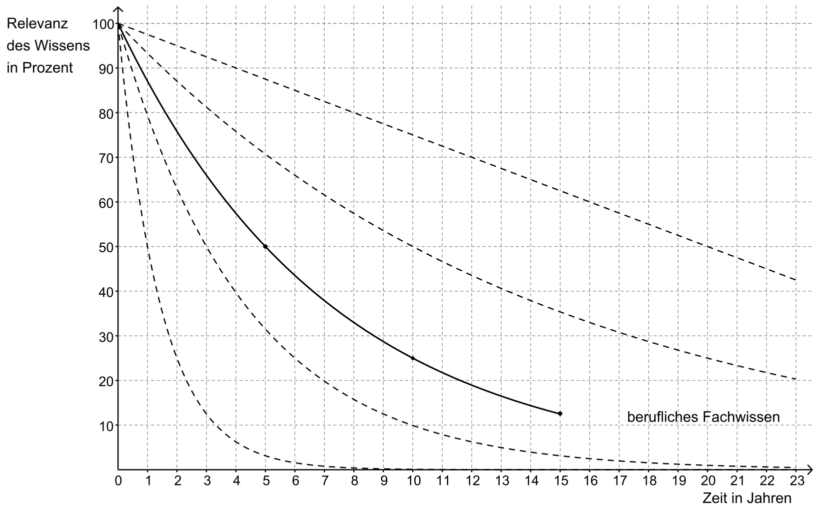
1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Relevanz des Hochschulwissens nach 7 Jahren bereits abgenommen hat.

d) Die Relevanz des Schulwissens kann in den ersten Jahrzehnten durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

1) Lesen Sie aus der Abbildung in der Angabe die Steigung dieser linearen Funktion ab.

Lösungserwartung

a1)



Die Werte nach 5, 10 bzw. 15 Jahren müssen klar als 50 %, 25 % bzw. 12,5 % erkennbar sein.

b1) Aufstellen der Exponentialfunktion:

$T(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$

t ... Zeit in Jahren
$T(t)$ ... Relevanz des Technologiewissens zur Zeit t in Prozent der anfänglichen Relevanz des Wissens

c1) $100 - N(7) = 100 - 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot 7} = 38{,}4... \approx 38$

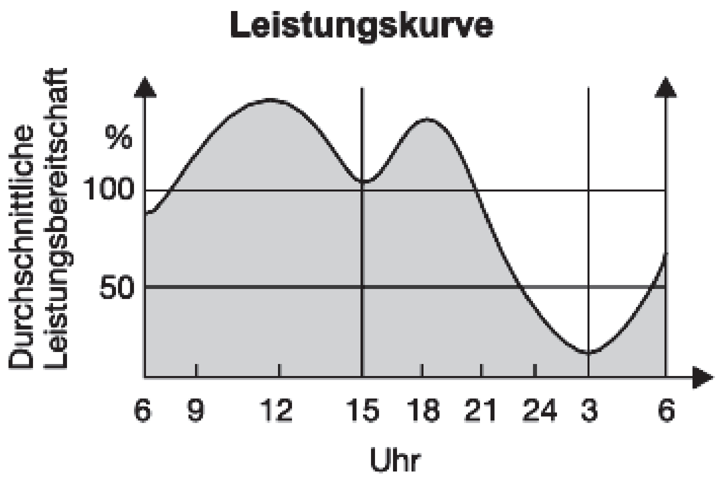
Die Relevanz des Hochschulwissens hat um rund 38 % abgenommen.

d1) $k = -\frac{5}{2}$

Leistungskurve

Aufgabennummer: 2_094	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.5, AN 1.3, AN 2.1	

Die *Leistungskurve*, auch *Arbeitskurve* genannt, ist die Darstellung der Arbeitsleistung einer Arbeitnehmerin/eines Arbeitnehmers in Abhängigkeit von der Tageszeit unter Berücksichtigung seiner Durchschnittsleistung (100 Prozent). Auf einer Webseite findet man folgende Grafik:



Quelle: http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/85252/leistungskurve-v9.html [30.05.2014].

a) 1) Lesen Sie ab, in welchen Zeitintervallen die Leistungsbereitschaft abnimmt.

b) Um 9 Uhr beträgt die Leistungsbereitschaft einer Arbeitnehmerin 110 %. Um 12 Uhr beträgt sie 140 %. Im Zeitintervall von 12 Uhr bis 14 Uhr beträgt die mittlere Änderungsrate der Leistungsbereitschaft –12 % pro Stunde.

1) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Leistungsbereitschaft im Zeitintervall von 9 Uhr bis 12 Uhr.

2) Berechnen Sie die Leistungsbereitschaft um 14 Uhr.

c) Die Leistungsbereitschaft eines Arbeitnehmers kann im Zeitintervall von 0 Uhr bis 6 Uhr durch die Funktion f beschrieben werden. Dabei gilt:

$$f(t) = \frac{10}{3} \cdot t^2 - 20 \cdot t + 40$$

t ... Zeit in Stunden, $0 \leq t \leq 6$
$f(t)$ ... Leistungsbereitschaft zur Zeit t in Prozent

1) Berechnen Sie die 1. Ableitung der Leistungsbereitschaft um 2:30 Uhr.

Lösungserwartung

a1) Eine Abnahme der Leistungsbereitschaft liegt im Zeitintervall von ca. 12 Uhr bis ca. 15 Uhr sowie im Zeitintervall von ca. 18 Uhr bis ca. 3 Uhr vor.

Toleranzintervall: $\pm 0{,}5$ *h*

b1) mittlere Änderungsrate: $\frac{140-110}{12-9} = 10 \rightarrow +\,10\,\%$ pro Stunde

b2) Leistungsbereitschaft um 14 Uhr: $140 - 2 \cdot 12 = 116 \rightarrow 116\,\%$

c1) $f'(t) = \frac{20}{3} \cdot t - 20$

$f'(2{,}5) = -\frac{10}{3} \approx -3{,}33$

Baumhaus

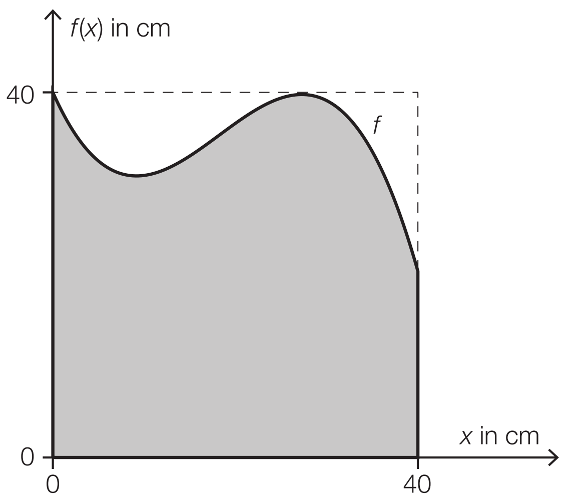
Aufgabennummer: 2_095	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, AG 4.2, FA 6.4, AN 4.2	

Eine Familie plant, ein Baumhaus aus Holz zu errichten. Der Baum dafür steht in einem horizontalen Teil des Gartens.

a) Eine 3,2 m lange Leiter wird angelehnt und reicht dann vom Boden genau bis zum Einstieg ins Baumhaus in einer Höhe von 2,8 m.

1) Berechnen Sie denjenigen Winkel, unter dem die Leiter gegenüber dem horizontalen Boden geneigt ist.

b) Die Fenster des Baumhauses sollen eine spezielle Form haben (siehe grau markierte Fläche in der nachstehenden Abbildung).



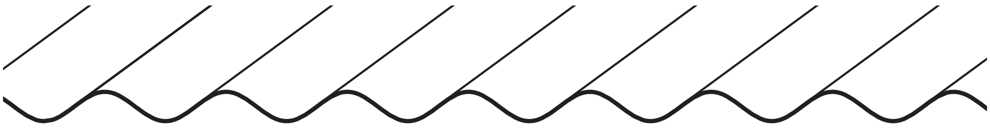
Die obere Begrenzungslinie des Fensters kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden.

$f(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}164 \cdot x^2 - 2{,}25 \cdot x + 40$ mit $0 \leq x \leq 40$

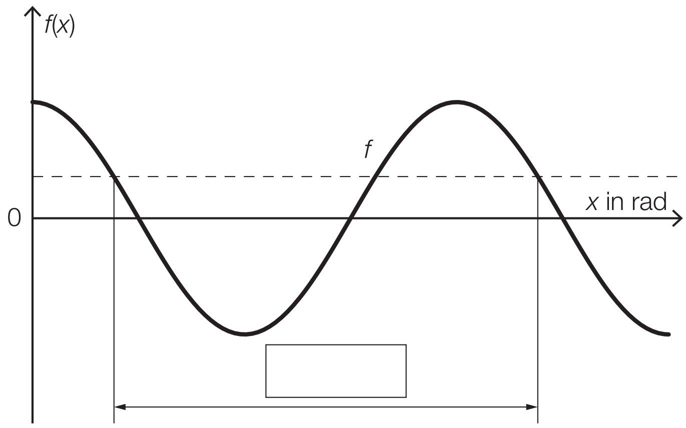
x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Fensterfläche in der dargestellten Form kleiner als die Fensterfläche eines quadratischen Fensters mit der Seitenlänge 40 cm ist.

c) Das Baumhaus wird mit gewellten Kunststoffplatten überdacht.

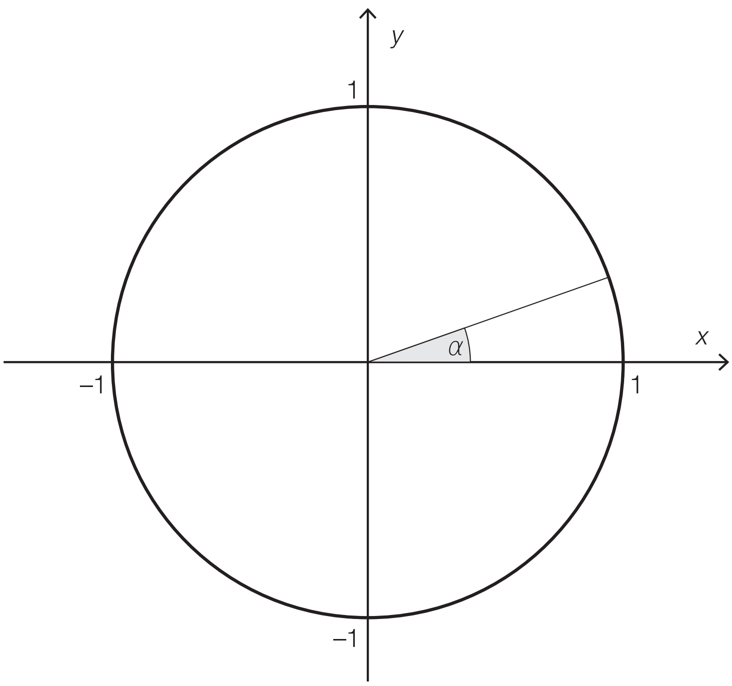


Dem Querschnitt liegt der Graph der Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ zugrunde. Dieser ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

In der nachstehenden Abbildung ist ein Winkel α im Einheitskreis dargestellt.



2) Zeichnen Sie im obigen Einheitskreis denjenigen Winkel β ein, für den gilt: $\sin(\beta) = \sin(\alpha)$ mit $\beta \neq \alpha$ und $0° \leq \beta \leq 360°$.

Lösungserwartung

a1) $\arcsin\left(\frac{2{,}8}{3{,}2}\right) = 61{,}0...°$

Der Winkel beträgt rund 61°.

b1) Flächeninhalt zwischen den Achsen und dem Graphen der Funktion in cm^2:

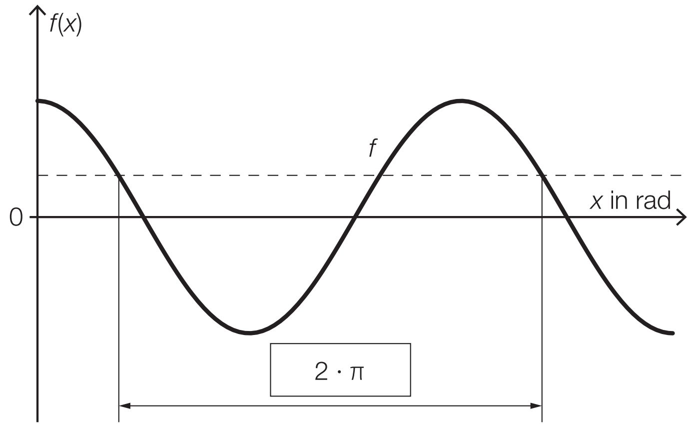
$\int_0^{40} f(x)\,\mathrm{d}x = 1\,378{,}66...$

Flächeninhalt des Quadrats in cm^2: $A = 1\,600$

prozentueller Unterschied: $\frac{1\,378{,}66... - 1\,600}{1\,600} = -0{,}1383...$

Die Fensterfläche ist um rund 13,8 % kleiner als die Fensterfläche eines quadratischen Fensters mit der Seitenlänge 40 cm.

c1)



c2)