Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Aufgabennummer: 1_043	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gustav kommt in der Nacht nach Hause und muss im Dunkeln die Haustüre aufsperren. An seinem ringförmigen Schlüsselbund hängen fünf gleiche Schlüsseltypen, von denen nur einer sperrt. Er beginnt die Schlüssel zufällig und nacheinander zu probieren. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl k der Schlüssel an, die er probiert, bis die Tür geöffnet ist.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie in der Tabelle die fehlenden Wahrscheinlichkeiten und ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$ dieser Zufallsvariablen X!

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$					

$E(X) =$ ______________________

Möglicher Lösungsweg

Gleichwahrscheinlichkeit liegt vor, weil:

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{5}$

Erwartungswert:

$$E(X) = \left(1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5}\right) = 3$$

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn die Tabelle korrekt ausgefüllt und der Erwartungswert richtig berechnet ist.

Binomialverteilung

Aufgabennummer: 1_044	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: WS 3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Zufallsvariable X sei binomialverteilt mit $n = 25$ und $p = 0,15$.
Es soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, sodass die Zufallsvariable X höchstens den Wert 2 annimmt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie den zutreffenden Term an!

$\binom{25}{2} \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^{23}$	☐
$0,85^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0,15^1 \cdot 0,85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^{23}$	☐
$\binom{25}{1} \cdot 0,15^1 \cdot 0,85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^{23}$	☐
$1 - \binom{25}{2} \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^{23}$	☐
$1 - \left[0,85^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0,15^1 \cdot 0,85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^{23}\right]$	☐
$\binom{25}{2} \cdot 0,85^2 \cdot 0,15^{23}$	☐

Lösungsweg

$\binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	
$0{,}85^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	☒
$\binom{25}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	
$1 - \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	
$1 - \left[0{,}85^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}\right]$	
$\binom{25}{2} \cdot 0{,}85^2 \cdot 0{,}15^{23}$	

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die eine zutreffende Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

Graphen einer Binomialverteilung

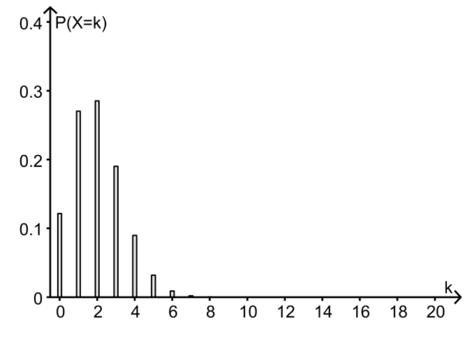
Aufgabennummer: 1_046	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: WS 3.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

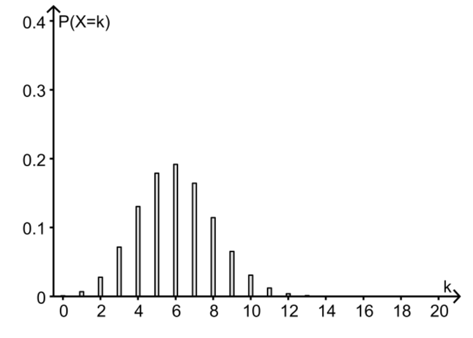
In den untenstehenden Grafiken sind Binomialverteilungen dargestellt.

Aufgabenstellung:

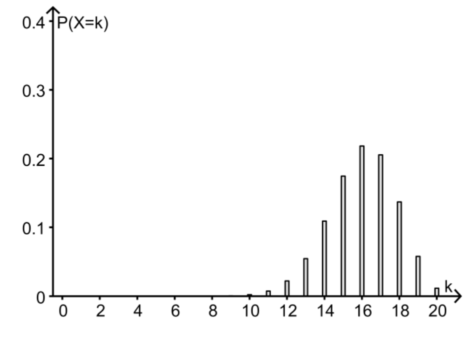
Kreuzen Sie diejenige Grafik an, die einer Binomialverteilung mit n = 20 und p = 0,9 zuzuordnen ist!



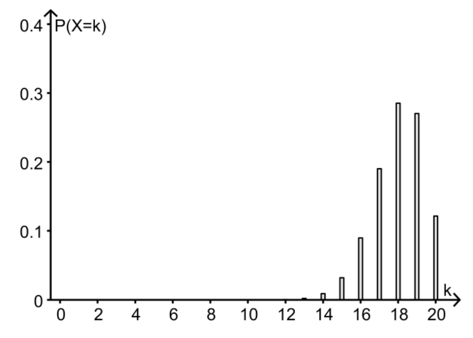
☐



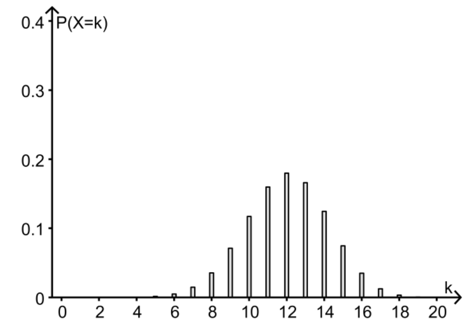
☐



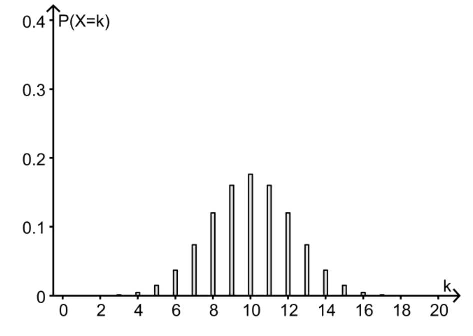
☐



☐

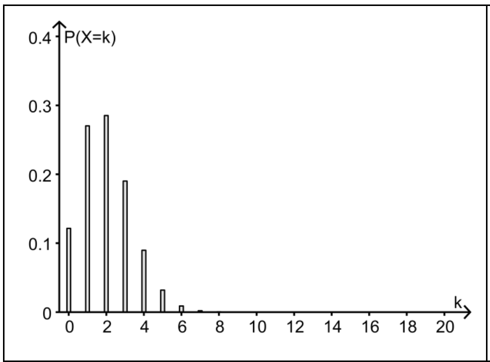


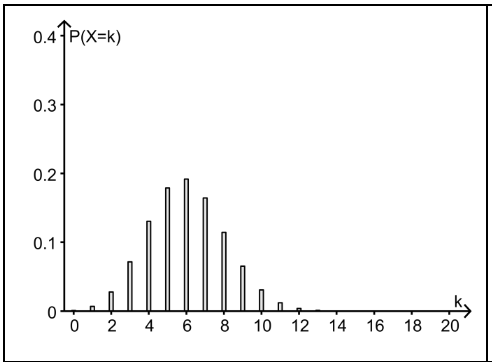
☐

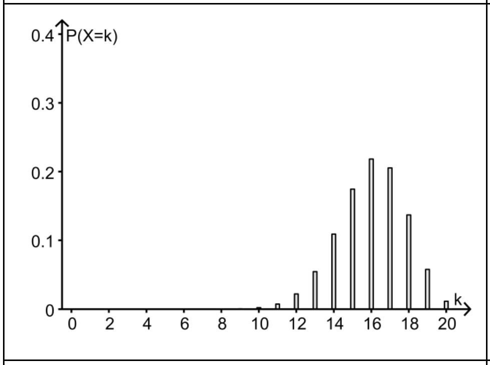


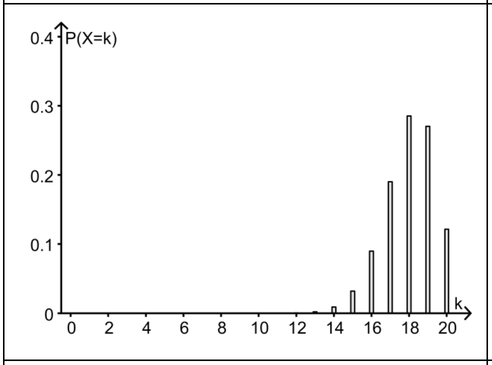
☐

Lösungsweg

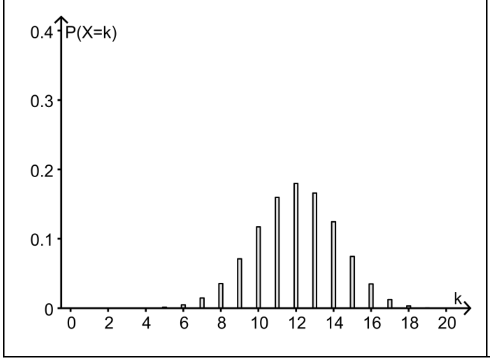


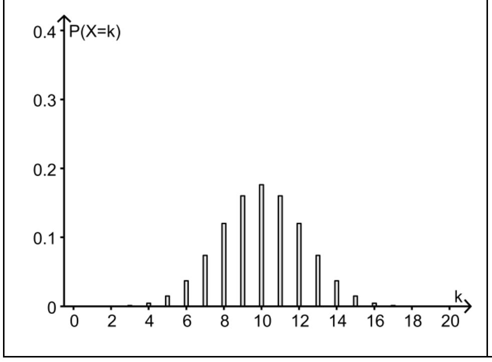






☒





Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn genau die eine zutreffende Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

Aufnahmetest

Aufgabennummer: 1_047	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: WS 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine Universität führt einen Aufnahmetest durch. Dabei werden zehn Multiple-Choice-Fragen gestellt, wobei jede Frage vier Antwortmöglichkeiten hat. Nur eine davon ist richtig.
In den letzten Jahren wurden durchschnittlich 40 Bewerber/innen aufgenommen. Dabei traten etwa 95 % der angemeldeten Kandidatinnen und Kandidaten tatsächlich zum Aufnahmetest an.
Heuer treten 122 Bewerber/innen zu diesem Aufnahmetest an.

Nehmen Sie an, dass Kandidat K alle Antworten völlig zufällig ankreuzt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Anzahl der angemeldeten Kandidatinnen und Kandidaten, die tatsächlich zum Aufnahmetest erscheinen, ist binomialverteilt mit $n = 122$ und $p = 0{,}40$.	☐
Die Anzahl der richtig beantworteten Fragen des Aufnahmetests des Kandidaten K ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}25$.	☐
Die durchschnittliche Anzahl der richtig beantworteten Fragen aller angetretenen Kandidatinnen und Kandidaten ist binomialverteilt mit $n = 122$ und $p = 0{,}40$.	☐
Die Anzahl der zufällig ankreuzenden Kandidatinnen und Kandidaten, die aufgenommen werden, ist binomialverteilt mit $n = 40$ und $p = 0{,}25$.	☐
Die Anzahl der falsch beantworteten Fragen des Aufnahmetests des Kandidaten K ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}75$.	☐

Lösungsweg

Die Anzahl der angemeldeten Kandidatinnen und Kandidaten, die tatsächlich zum Aufnahmetest erscheinen, ist binomialverteilt mit $n = 122$ und $p = 0{,}40$.	
Die Anzahl der richtig beantworteten Fragen des Aufnahmetests des Kandidaten K ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}25$.	☒
Die durchschnittliche Anzahl der richtig beantworteten Fragen aller angetretenen Kandidatinnen und Kandidaten ist binomialverteilt mit $n = 122$ und $p = 0{,}40$.	
Die Anzahl der zufällig ankreuzenden Kandidatinnen und Kandidaten, die aufgenommen werden, ist binomialverteilt mit $n = 40$ und $p = 0{,}25$.	
Die Anzahl der falsch beantworteten Fragen des Aufnahmetests des Kandidaten K ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}75$.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die beiden zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Erwartungswert*

Aufgabennummer: 1_148	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 3.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

In der nachstehenden Tabelle ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen X dargestellt.

a_i mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$	1	2	3	4
$P(X = a_i)$	0,1	0,3	0,5	0,1

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsvariablen X!

$E(X)$ = ___________________________________

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

$E(X) = 2{,}6$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn der Wert richtig angegeben ist.

Binomialverteilung*

Aufgabennummer: 1_152	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: WS 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Einige der unten angeführten Situationen können mit einer Binomialverteilung modelliert werden.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige(n) Situation(en) an, bei der/denen die Zufallsvariable X binomialverteilt ist!

Aus einer Urne mit vier blauen, zwei grünen und drei weißen Kugeln werden drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. (X = Anzahl der grünen Kugeln)	☐
In einer Gruppe mit 25 Kindern sind sieben Linkshänder. Es werden drei Kinder zufällig ausgewählt. (X = Anzahl der Linkshänder)	☐
In einem U-Bahn-Waggon sitzen 35 Personen. Vier haben keinen Fahrschein. Drei werden kontrolliert. (X = Anzahl der Personen ohne Fahrschein)	☐
Bei einem Multiple-Choice-Test sind pro Aufgabe drei von fünf Wahlmöglichkeiten richtig. Die Antworten werden nach dem Zufallsprinzip angekreuzt. Sieben Aufgaben werden gestellt. (X = Anzahl der richtig gelösten Aufgaben).	☐
Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Mädchens liegt bei 52 %. Eine Familie hat drei Kinder. (X = Anzahl der Mädchen)	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

Aus einer Urne mit vier blauen, zwei grünen und drei weißen Kugeln werden drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. (X = Anzahl der grünen Kugeln)	☒
Bei einem Multiple-Choice-Test sind pro Aufgabe drei von fünf Wahlmöglichkeiten richtig. Die Antworten werden nach dem Zufallsprinzip angekreuzt. Sieben Aufgaben werden gestellt. (X = Anzahl der richtig gelösten Aufgaben).	☒
Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Mädchens liegt bei 52 %. Eine Familie hat drei Kinder. (X = Anzahl der Mädchen)	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau drei Aussagen angekreuzt sind und alle Kreuze richtig gesetzt sind.

Kennzahlen der Binomialverteilung

Aufgabennummer: 1_188	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.2	
☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Auf einer Sortieranlage werden Flaschen von einem Scanner untersucht und es wird die Art des Kunststoffes ermittelt. 95 % der Flaschen werden richtig erkannt und in die bereitgestellten Behälter einsortiert.
Die Werte der Zufallsvariablen X beschreiben die Anzahl der falschen Entscheidungen bei einem Stichprobenumfang von 500 Stück. Verwenden Sie die Binomialverteilung als Modell.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Zufallsvariable X!

Möglicher Lösungsweg

$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}05 = 25$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{500 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} = 4{,}8734$

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn beide Werte richtig berechnet sind und σ im Lösungsintervall [4,8; 4,9] liegt.

Modellierung mit Binomialverteilung

Aufgabennummer: 1_293	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: WS 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind fünf Situationen, bei denen nach einer Wahrscheinlichkeit gefragt wird.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige(n) Situation(en) an, die mithilfe der Binomialverteilung modelliert werden kann/können!

In der Kantine eines Betriebes essen 80 Personen. Am Montag werden ein vegetarisches Gericht und drei weitere Menüs angeboten. Erfahrungsgemäß wählt jede vierte Person das vegetarische Gericht. Es werden 20 vegetarische Gerichte vorbereitet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese nicht ausreichen?	☐
Bei einer Lieferung von 20 Smartphones sind fünf defekt. Es werden nacheinander drei Geräte entnommen, getestet und nicht zurückgelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens zwei davon defekt?	☐
In einer Klasse müssen die Schüler/innen bei der Überprüfung der Bildungsstandards auf einem anonymen Fragebogen ihr Geschlecht (m, w) ankreuzen. In der Klasse sind 16 Schülerinnen und 12 Schüler. Fünf Personen haben auf dem Fragebogen das Geschlecht nicht angekreuzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich drei Schüler unter den fünf Personen?	☐
Ein Großhändler erhält eine Lieferung von 2 000 Smartphones, von denen erfahrungsgemäß 5 % defekt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich 80 bis 90 defekte Geräte in der Lieferung?	☐
In einer Klinik werden 500 kranke Personen mit einem bestimmten Medikament behandelt. Die Wahrscheinlichkeit, dass schwere Nebenwirkungen auftreten, beträgt 0,001. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei mehr als zwei Personen schwere Nebenwirkungen auftreten?	☐

Lösung

In der Kantine eines Betriebes essen 80 Personen. Am Montag werden ein vegetarisches Gericht und drei weitere Menüs angeboten. Erfahrungsgemäß wählt jede vierte Person das vegetarische Gericht. Es werden 20 vegetarische Gerichte vorbereitet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese nicht ausreichen?	☒
Ein Großhändler erhält eine Lieferung von 2 000 Smartphones, von denen erfahrungsgemäß 5 % defekt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich 80 bis 90 defekte Geräte in der Lieferung?	☒
In einer Klinik werden 500 kranke Personen mit einem bestimmten Medikament behandelt. Die Wahrscheinlichkeit, dass schwere Nebenwirkungen auftreten, beträgt 0,001. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei mehr als zwei Personen schwere Nebenwirkungen auftreten?	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Flaschensortieranlage

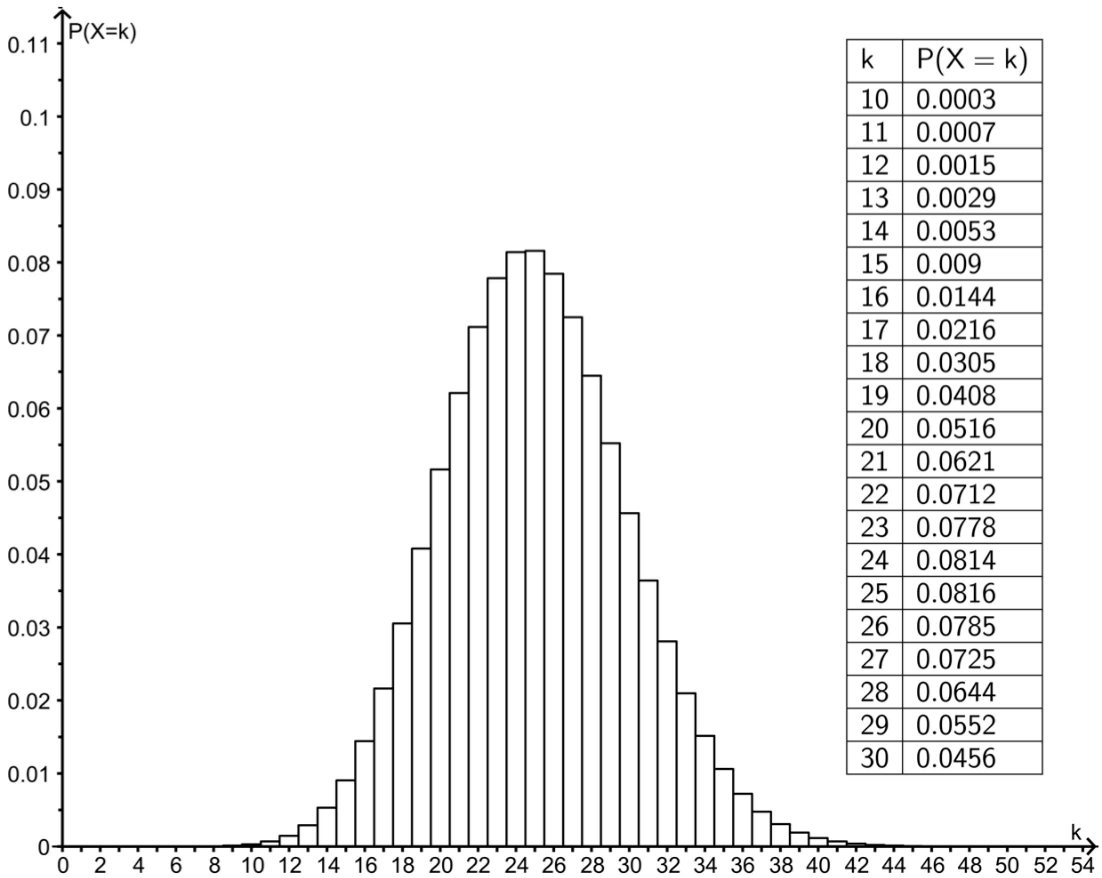
Aufgabennummer: 1_292	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Auf einer Sortieranlage werden 500 Flaschen von einem Scanner untersucht – es wird die Art des Kunststoffes ermittelt. p % der Flaschen werden richtig erkannt und in die bereitgestellten Behälter einsortiert. Die Werte der binomialverteilten Zufallsvariablen X beschreiben die Anzahl k der falschen Entscheidungen beim vorgegebenen Stichprobenumfang.

Aufgabenstellung:

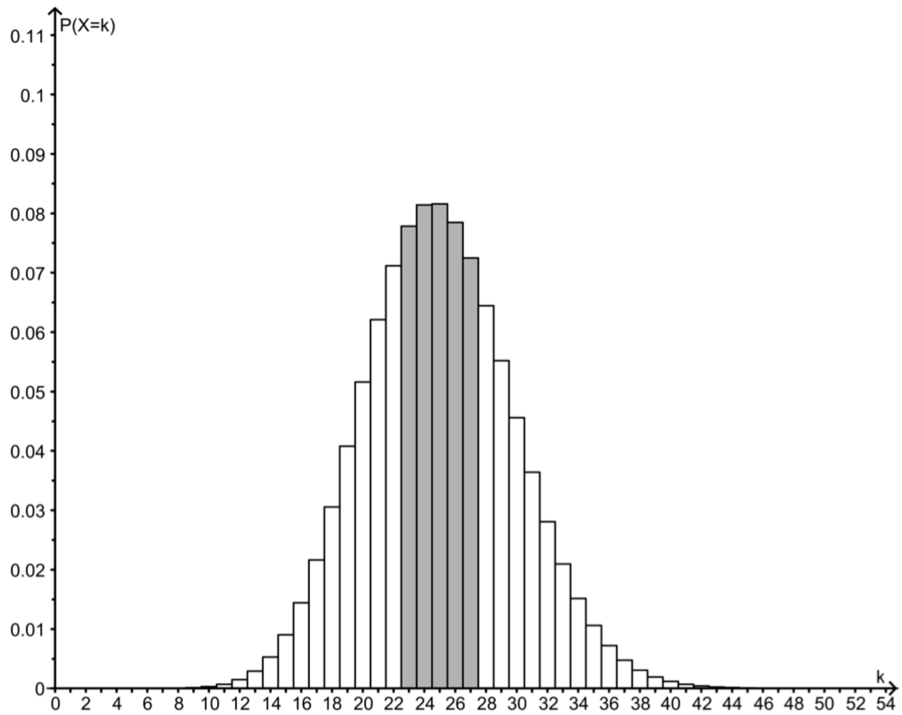
Berechnen Sie mithilfe der gegebenen Tabelle die Wahrscheinlichkeit $P(22 < X \leq 27)$ und markieren Sie diese in der Grafik.



k	P(X = k)
10	0.0003
11	0.0007
12	0.0015
13	0.0029
14	0.0053
15	0.009
16	0.0144
17	0.0216
18	0.0305
19	0.0408
20	0.0516
21	0.0621
22	0.0712
23	0.0778
24	0.0814
25	0.0816
26	0.0785
27	0.0725
28	0.0644
29	0.0552
30	0.0456

Möglicher Lösungsweg

$P(22 < X \leq 27) = 0{,}0778 + 0{,}0814 + 0{,}0816 + 0{,}0785 + 0{,}0725 = 0{,}3918 \approx 39{,}2\ \%$



Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet und in der Grafik gekennzeichnet ist.

Binomialverteilte Zufallsvariable

Aufgabennummer: 1_291	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Zufallsvariable X sei binomialverteilt mit $n = 8$ und $p = 0{,}25$.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X)$	0,1001	0,2670	0,3115	0,2076	0,0865	0,0231	0,0038	0,0004	0,00002

μ ist der Erwartungswert, σ die Standardabweichung der Verteilung.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die folgende Wahrscheinlichkeit!

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) =$

Möglicher Lösungsweg

$\mu = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}25 = 2$

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} \approx 1{,}22$

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(1 \leq X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$

$= 0{,}2670 + 0{,}3115 + 0{,}2076 = 0{,}7861 = 78{,}61\ \%$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet wurde.